

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНАЯ АКАДЕМИЯ

Ю.И. БЛОХ

**РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ
ГРАВИРАЗВЕДКИ И
МАГНИТОРАЗВЕДКИ**

МОСКВА - 1993 г.

УДК 550.831 + 550.838

Решение прямых задач гравirazведки и магниторазведки: Учебное пособие / Ю.И.Блох. - М: МГГА. 1993. 79 с.

В учебном пособии по курсу "Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий" изложены физико-математические основы и методы решения прямых задач гравirazведки и магниторазведки - основной базы интерпретации аномалий. Рассмотрены двумерные и трехмерные типовые модели, применяемые при моделировании геологических объектов, в том числе произвольные многоугольные цилиндры и многогранники. Отдельно рассмотрены сильномагнитные геологические объекты сложной формы, для которых изложены основы вычисления распределения намагниченности путем решения соответствующего интегрального уравнения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 08.02 "Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых".

Ил. 8. Табл. 2. Библиогр. 15 назв.

© Московская государственная геологоразведочная академия, 1993 г.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие написано в соответствии с программой курса интерпретация гравитационных и магнитных аномалий", изучаемого студентами после освоения курсов "Гравиразведка", "Магниторазведка", и "Теория поля". Оно предназначено студентам-геофизикам дневного, вечернего и заочного отделений института.

Первая часть пособия посвящена решению прямых задач гравиразведки и магниторазведки - основной базы интерпретации. В пособии рассматриваются физико-математические основы решения прямых задач, математический аппарат, разработанный для двумерных и трехмерных задач, особенности вычисления магнитных полей сильномагнитных объектов с учетом размагничивания, приводятся конкретные формулы, пригодные для реализации на ЭВМ.

Основной системой единиц, принятой в пособии, в соответствии с требованиями ГОСТа является система СИ. Автор не является ее приверженцем и разделяет мнение тех физиков, которые считают ее применительно к электромагнитным величинам крайне неудобной. Вместе с тем предлагаемые рядом магниторазведчиков паллиативные приемы, при которых сохраняется вид формул, характерный для системы СГС, по мнению автора, лишь запутывают студентов, да и инженеров-геофизиков. Принципиальные отличия, характерные для системы СГС, указываются в тексте.

Список литературы к пособию содержит основные работы, опубликованные по рассматриваемым вопросам в течение последнего десятилетия. Изучив пособие, читатель сможет с помощью этих источников более углубленно разобраться в различных аспектах решения прямых задач гравиразведки и магниторазведки.

Для удобства читателей в конце пособия приведены вопросы для повторения. С их помощью можно готовиться к зачетам и экзаменам.

ГЛАВА 1. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ

§ 1. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ АНОМАЛИЙ И ПРЯМЫЕ ЗАДАЧИ.

Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий представляет собой упорядоченную совокупность аналитических и синтетических процедур извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений при заданном

объеме априорной информации с целью решения поставленной геологической задачи.

Поясним данное определение. В результате проведенных съемок геофизики получают материалы, в которых в скрытом виде содержится огромная геологическая информация, однако сами по себе карты и графики аномалий геологической информацией не являются. Извлечение этой информации с целью решения некоторой геологической задачи - основное содержание интерпретации. Вместе с тем, не имея никакой дополнительной информации, только из данных съемок можно в лучшем случае получить лишь формальные распределения физических свойств, объясняющие аномальные поля. Таких формальных распределений бесконечно много, поэтому для содержательной интерпретации необходима вся имеющаяся по изучаемому объекту геолого-геофизическая информация. Эту информацию принято называть априорной от латинского выражения *a priori*, что значит "заранее", "независимо от опыта".

В соответствии с данным определением в процессе интерпретации выполняют два типа процедур. Аналитические процедуры представляют собой преобразование одного числового массива в другой. Они формализуются и выполняются автоматически на ЭВМ. К ним относятся и процедуры решения прямых задач. Синтетические процедуры связаны с обращением к неформализуемой априорной информации, поэтому они обычно выполняются человеком-интерпретатором. Естественно, при этом также могут использоваться возможности ЭВМ: базы данных, банки знаний, средства визуализации и т.п., но ведущая роль в синтезе остается за человеком.

Различают три фазы синтеза. Начальный синтез позволяет сформулировать основные подходы к интерпретации и выбрать процедуры анализа. Промежуточный синтез заключается в соотнесении результатов анализа с априорной информацией и внесении корректив в аналитические процедуры. Наконец, итоговый синтез дает возможность выразить результаты интерпретации в содержательной геологической форме и дать окончательное решение поставленной задачи.

Важнейший принцип интерпретации - принцип модельности. В соответствии с ним интерпретация неизбежно проводится в рамках определенных модельных представлений. В общем понимании модель - это совокупность принятых интерпретатором упрощений, допущений и т.п. Эти упрощения могут относиться к изучаемому объекту, и тогда говорят о модели объекта. При этом в интерпретации

различают физико-геологические интерпретационные модели (ФГИМ) и физико-математические интерпретационные модели (ФМИМ). Они различаются по уровню формализации и определяют те науки, в терминах которых формулируются упрощения. Упрощения также могут относиться к интерпретируемым характеристикам полей, и тогда определяют модели поля.

Рассмотрим основные типы упрощений при составлении ФГИМ объектов.

Упрощения размерности. Реальные геологические объекты и создаваемые ими гравитационные и магнитные аномалии - трехмерны. Вместе с тем, многие геологические образования имеют существенную вытянутость в некотором горизонтальном направлении. К ним можно отнести дайки, зоны разломов, флексуры и т.д. Линейную вытянутость имеет ряд рудных и нефтяных месторождений. Для таких объектов характерно слабое изменение аномального поля по простиранию вблизи эпицентра. Если длина объекта более чем в 5 раз превышает его мощность, то можно считать, что он вблизи эпицентра не создает компоненты аномального поля, направленной вдоль простирания. Такая аномалия и такой объект называются двумерными. В этом случае, упрощая задачу, считают, что аномалия создается бесконечным цилиндром сложного сечения. Если вытянутость объекта не столь велика, то иногда вводят так называемые 2,5-мерные модели. Они также представляют собой горизонтальные цилиндры, но ограниченные по простиранию вертикальными плоскостями. Аномальное поле 2,5-мерных моделей, как правило, анализируется на профиле, проведенном вкрест простирания над центром модели.

Упрощения распределения физических свойств. Геологические объекты неоднородны, но при интерпретации приходится прибегать к упрощениям распределения их свойств. Чаще всего отдельные геологические образования полагают однородными как по плотности, так и по магнитным свойствам: магнитной восприимчивости и естественной остаточной намагниченности. Если же такое допущение чересчур грубо, распределение физических свойств описывают каким-либо простым законом, например, полиномиальным. В частности, при истолковании гравитационных аномалий на платформах часто считают плотность пород линейно или параболически изменяющейся с глубиной.

Упрощения формы. При интерпретации сложные по форме геологические объекты аппроксимируют более простыми. Если нет возможности представить объект одним телом простой формы, то его можно представить состоящим из нескольких простых тел. Естественно, возникает вопрос о том, как оценивать

простоту или сложность. Это можно сделать, определив число параметров объекта - чисел, которыми характеризуется его местоположение и форма. Например, форма и местоположение шара описываются четырьмя параметрами: тремя координатами центра и радиусом. Надо отметить, что один и тот же объект можно описать разными способами и различным числом параметров, поэтому оценкой сложности его формы должно служить количество параметров при наиболее экономном его описании.

Параметрами описываются и распределения физических свойств. Если плотность или магнитная восприимчивость постоянны, они сами и являются параметрами модели. При более сложных распределениях свойств количество параметров возрастает. Например, плотность σ , изменяющуюся линейно с глубиной h , можно описать двумя параметрами p_1 и p_2 : $\sigma(h) = p_1 + p_2 h$.

Перейдем теперь к основным типам упрощений в моделях аномальных полей. Как известно, гравиметры измеряют компоненту гравитационного поля, нормальную к уровенной поверхности в точке наблюдения. Поскольку направление нормали в разных точках различно, гравиметры измеряют в них разные компоненты. Вместе с тем, если наблюдения проводятся на ограниченной площади, где направления нормалей практически одинаковы, то, упрощая задачу, считают, что измеренная гравитационная аномалия - это аномалия вертикальной составляющей гравитационного поля W_z . Если же решаются региональные или глобальные задачи, где из-за сферичности Земли такое упрощение недопустимо, полагают, что измерена радиальная компонента [11,14], что также является упрощением. Приведенные соображения справедливы и для компонент магнитного поля, измеряемых с помощью магнитометров, снабженных уровнями. Для модульных протонных и квантовых магнитометров применяют упрощение, называемое гармоническим приближением для ΔT . Как известно, в районе съемок с нормальными компонентами магнитного поля X_0, Y_0, Z_0 аномалия ΔT описывается следующим образом:

$$\Delta T = \sqrt{(X_0 + \Delta X)^2 + (Y_0 + \Delta Y)^2 + (Z_0 + \Delta Z)^2} - \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}, \quad (1.1)$$

где $\Delta X, \Delta Y$ и ΔZ - аномалии соответствующих компонент. Аномалия ΔT не удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть не является гармонической функцией. Тем не менее, если $\Delta T \ll T_0$, при анализе аномалий считают, что ΔT ведет себя как компонента аномального вектора, направленная вдоль вектора нормального поля.

Поскольку любая компонента аномального вектора является гармонической функцией, такое допущение называется гармоническим приближением для ΔT . Проекцию одного вектора на другой легко определить через их скалярное произведение, поэтому аналогом (1.1) в гармоническом приближении будет являться следующее более простое соотношение:

$$\Delta T = \frac{X_0 \Delta X + Y_0 \Delta Y + Z_0 \Delta Z}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}}. \quad (1.2)$$

Последнюю формулу можно применять при анализе аномалий ΔT , не превышающих 5000 нТл.

Наконец, при перечислении допущений, лежащих в основе модели поля, нельзя не упомянуть о тех упрощениях, которые определяют вид соответствующих редукций силы тяжести: плоскопараллельный промежуточный слой, нормальный вертикальный градиент и т.п. Эти упрощения подробно рассматриваются в курсе гравиразведки.

Согласно вышеизложенному, прямая задача гравиразведки (магниторазведки) состоит в вычислении в ряде точек пространства модели гравитационного (магнитного) поля, создаваемой заданной моделью объекта. Другими словами, решение прямой задачи представляет собой аналитическую процедуру, с помощью которой модели объекта ставится в соответствие модель поля. Поскольку при решении конкретных прямых задач совокупность упрощений по отношению к вычисляемому полю с очевидностью следует из существа решаемой задачи, мы далее будем писать "поле", имея в виду его конкретную модель.

Прямые задачи - фундамент интерпретации. Благодаря знаниям особенностей решения прямых задач для типовых моделей, интерпретатор получает возможность качественно истолковывать гравитационные и магнитные аномалии, сокращать возможный набор моделей, подлежащих анализу. М.А. Алексидзе образно назвал прямую задачу гравиразведки - гравитационной проверкой [1]. Именно решение прямой задачи дает возможность проверить достоверность некоторой модели объекта, а последовательное упорядоченное решение прямых задач лежит в основе одного из ведущих методов количественной интерпретации - метода подбора.

§ 2. ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИРАЗВЕДКИ.

Ускорение силы тяжести \vec{g} является напряженностью гравитационного поля и подчиняется в произвольной точке \mathbf{a} следующим дифференциальным уравнениям:

$$\text{rot } \vec{g} = 0, \quad \text{div } \vec{g} = -4\pi\lambda\sigma(\mathbf{a}), \quad (2.1)$$

причем на границах тел оно непрерывно. Здесь σ - плотность, а $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$ - гравитационная постоянная. Первое из этих уравнений дает возможность ввести скалярный гравитационный потенциал W соотношением

$$\vec{g} = \text{grad } W. \quad (2.2)$$

Положительный знак перед градиентом отмечает, что гравитирующие массы притягиваются друг к другу. Характер притяжения точечных масс описывается законом всемирного тяготения И.Ньютона. Масса m_1 , находящаяся в точке \mathbf{a} , притягивается к массе m , расположенной в точке \mathbf{q} с силой

$$F = \frac{\gamma \cdot m \cdot m_1}{L_{qa}^2}, \quad (2.3)$$

где L_{qa} - расстояние между точками \mathbf{q} и \mathbf{a} . Поскольку напряженность поля - это сила, действующая на единичную массу, можно вычислить величину ускорения силы тяжести, создаваемого массой m в точке \mathbf{a} :

$$g(\mathbf{a}) = \frac{\gamma \cdot m}{L_{qa}^2} \quad (2.4)$$

или в векторной форме

$$\vec{g}(\mathbf{a}) = -\gamma \frac{m}{L_{qa}^2} \vec{L}_{qa}. \quad (2.5)$$

В этой формуле знак минус появляется в связи с тем, что вектор направлен из точки \mathbf{q} в точку \mathbf{a} . Из (2.2) и (2.5) следует, что в точке \mathbf{a} потенциал точечной массы m , расположенной в точке \mathbf{q} , определяется соотношением

$$W(\mathbf{a}) = \frac{\gamma \cdot m}{L_{qa}}. \quad (2.6)$$

Данная формула справедлива в любой системе координат. Запишем ее подробно в левой прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рис.1.

Особенность принятой системы состоит в том, что ось z направлена вниз. Это отвечает общепринятым представлениям, что положительна та сила тяжести, которая направлена вниз, а также упрощает вид выводимых соотношений. Во введенной системе координат формула (2.6) примет вид

$$W(x, y, z) = \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \quad (2.7)$$

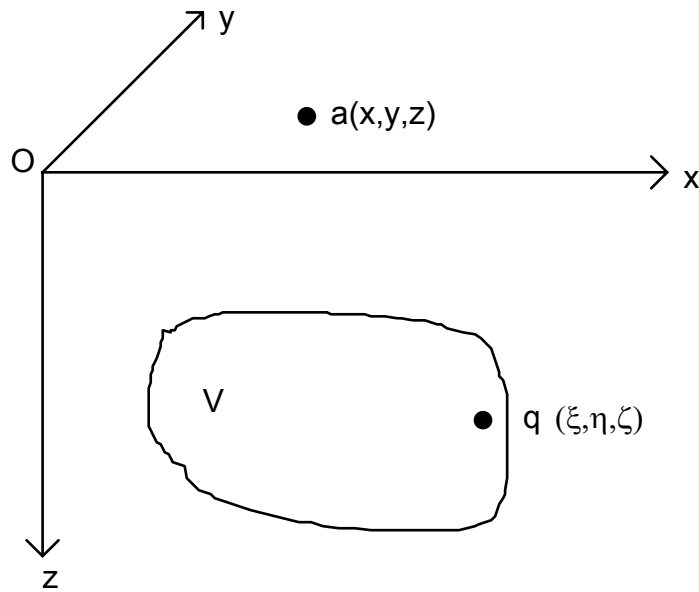


Рис. 1

С помощью данной формулы можно получить соотношение для потенциала тела V , учитывая, что в каждой из точек тела $m = \sigma dV = \sigma d\xi d\eta d\zeta$. Интегрируя (2.7) по объему тела, получаем

$$W(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta) dV}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \quad (2.8)$$

Выведенная формула является основной при решении прямых задач для разных геологических объектов. Дифференцируя ее, можно получать интегральные соотношения для любых элементов гравитационного поля. В частности, компоненты аномального вектора \vec{g} в соответствии с (2.2) выглядят следующим образом:

$$W_x(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\xi - x) dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (2.9)$$

$$W_y(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\eta - y)dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}, \quad (2.10)$$

$$W_z(x, y, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)(\zeta - z)dV}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \quad (2.11)$$

Напомним, что при интерпретации гравитационных аномалий на небольшом участке, где не сказывается сферичность Земли, Δg отождествляется с \mathbf{W}_z , поэтому наибольшее практическое значение имеет именно последняя формула (2.11). Дальнейшее дифференцирование подынтегральных выражений дает возможность получить соотношения для высших производных гравитационного потенциала, что предоставляется выполнить читателю самостоятельно.

Таким образом, в рамках принятых модельных представлений аномалия ускорения силы тяжести 3-мерных объектов может быть вычислена по формуле (2.11). Эта же формула является исходной при расчете гравитационных аномалий для 2,5-мерных моделей. Для двумерных моделей она упрощается. Во-первых, для двумерных моделей плотность не меняется вдоль простираения, поэтому вместо $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ в (2.11) можно подставить $\sigma(\xi, \zeta)$. Во-вторых, аномалии двумерных объектов не зависят от y , поэтому, подставив для простоты $y=0$, получим

$$g(x, z) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)dV}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 + \eta^2]^{3/2}}. \quad (2.12)$$

Учитывая, что $d\mathbf{S}=d\xi d\zeta$, сведем тройной интеграл к повторному:

$$g(x, z) = \gamma \int_S \sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 + \eta^2]^{3/2}} \right) dS. \quad (2.13)$$

Внутренний интеграл берется с помощью подстановки Эйлера, после чего (2.13) принимает окончательный вид:

$$g(x, z) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z)dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (2.14)$$

Напомним, что для данной модели $\mathbf{g}=\mathbf{W}_z$. Если аналогично рассчитать \mathbf{W}_x , получим

$$W_x(x, z) = 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\xi - x)dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (2.15)$$

Формулы (2.14) и (2.15) можно рассматривать как результат применения соотношения (2.2) к логарифмическому потенциалу, вводимому выражением

$$W(x, z) = -\gamma \int_S \sigma(\xi, \zeta) \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS. \quad (2.16)$$

Соотношения (2.14) - (2.16) дают возможность рассчитывать гравитационные аномалии двумерных моделей, но фактически при решении прямой задачи удобнее пользоваться их комплексными аналогами, что будет рассмотрено далее в главе 2.

§ 3. ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

Магнитное поле описывается двумя основными характеристиками: напряженностью \vec{H} и индукцией \vec{B} , между которыми в системе СИ существует следующее локальное соотношение:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}), \quad (3.1)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная постоянная, а \vec{I} - намагниченность в рассматриваемой точке. Из (3.1) следует, что в любой точке, куда может быть помещен магнитометр, в том числе и в скважине, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. В настоящее время принято градуировать приборы в единицах индукции - Тесла.

Намагниченность вещества сложным образом зависит от его магнитных свойств и намагничивающего поля, что характеризует петля гистерезиса. Магниторазведка изучает слабые магнитные поля - ведь нормальное геомагнитное поле всего около 50 мкТл. В связи с этим в магниторазведке применяют упрощенную модель намагничения: считают горные породы и руды "идеальным ферромагнетиком", что дает возможность следующим образом связать намагниченность с магнитными свойствами

$$\vec{I} = \kappa \vec{H} + \vec{I}_n. \quad (3.2)$$

Здесь κ - безразмерная магнитная восприимчивость, а \vec{I}_n - вектор естественной остаточной намагниченности. Из этой формулы следует, что размерность намагниченности совпадает с размерностью напряженности: А/м. Подставив (3.2) в (3.1), получим в любой точке пространства

$$\vec{B} = \mu_0[(1 + \kappa)\vec{H} + \vec{I}_n]. \quad (3.3)$$

Величина в круглых скобках называется относительной магнитной проницаемостью вещества и обозначается μ , тогда $\mu=1+k$, и (3.3) можно переписать в следующем виде

$$\vec{B} = \mu_0(\mu\vec{H} + \vec{I}_n). \quad (3.4)$$

Характеристики \vec{H} и \vec{B} удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям, являющимся частным случаем уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \vec{H} = 0; \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (3.5)$$

Как устанавливается в курсе теории поля, из этих уравнений следует, что на границах тел непрерывны тангенциальная компонента напряженности и нормальная компонента индукции магнитного поля. Нормальная компонента напряженности на границе тела испытывает разрыв, равный нормальной компоненте намагниченности в данной точке. Эти соотношения являются исходными при решении прямой задачи магниторазведки.

Решим с их помощью прямую задачу для однородного полупространства. Пусть полупространство с магнитной восприимчивостью k и нормальной к границе естественной остаточной намагниченностью I_n помещено во внешнее однородное намагничивающее поле с напряженностью $H^{\text{прв}}$ (рис. 2).

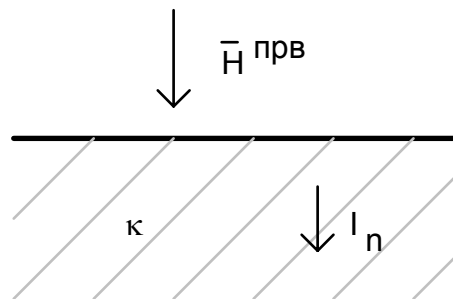


Рис. 2

Очевидно, полупространство в этом случае должно намагничиваться однородно и нормально к границе. Вычислим модуль его намагниченности I , исходя из условия непрерывности на границе нормальной компоненты индукции. При этом учтем, что в (3.3) и (3.4) \vec{H} - это суммарная напряженность, векторно складывающаяся из первичной $\vec{H}^{\text{прв}}$ и вторичной (аномальной) $\vec{H}^{\text{втр}}$. Для данной задачи аномалию легко определить, поскольку разрыв напряженности на границе должен составлять I . В силу симметрии модели это может быть только тогда, когда в

свободном полупространстве $H^{втр} = 0,5 I$, а в полупространстве, занятом магнетиком, $H^{втр} = -0,5 I$. Тогда во внешнем полупространстве нормальная компонента индукции в соответствии с (3.3) составляет $\mu_0(H^{ппв} + 0,5 I)$, а во внутреннем $\mu_0[(1 + \kappa)(H^{ппв} - 0,5 I) + I_n]$. Приравнивая их и решая получающееся уравнение относительно I , получаем

$$I = \frac{\kappa H^{ппв} + I_n}{1 + 0,5\kappa}. \quad (3.6)$$

Так как при выводе данного выражения удовлетворены и уравнения (3.5) и граничные условия, то в силу теоремы единственности, доказываемой в курсах теории поля, аномалия вертикальной составляющей индукции магнитного поля над вертикально намагниченным полу пространством

$$Z = 0,5 \mu_0 I, \quad (3.7)$$

где I определяется выражением (3.6). Горизонтальная составляющая при этом равна нулю.

Обратимся к формуле (3.6). В безграничном пространстве, где отсутствует аномальное поле, намагниченность в соответствии с (3.2), была бы равна

$$I = \kappa H^{ппв} + I_n. \quad (3.8)$$

Сравнивая (3.8) и (3.6), видим, что полупространство намагничивается слабее, нежели пространство, заполненное таким же магнетиком, в **1+0,5κ** раз. Числовой параметр **0,5** принято называть коэффициентом размагничивания или размагничивающим фактором и обозначать как **N**. Дело в том, что вторичное (аномальное) поле направлено внутри полупространства противоположно первичному и приводит к его размагничиванию. Этот эффект называется эффектом размагничивания объекта в собственном аномальном поле, а внутреннее аномальное поле часто определяют как размагничивающее.

Прямая задача для полупространства решается весьма просто, но приемы, примененные при этом - частные. Для объектов более сложных форм необходимо иметь достаточно общий математический аппарат вычисления аномалий. Попытаемся построить его таким же способом, как для гравirazведки, то есть введя скалярный потенциал, определив его для шара и проинтегрировав по объему изучаемой модели.

Возможность введения скалярного магнитного потенциала U вытекает из первого уравнения (3.5). Определим его соотношением

$$\vec{H} = -\text{grad } U. \quad (3.9)$$

Знак минус перед градиентом в отличие от (2.2) отмечает, что одноименные магнитные полюса отталкиваются друг от друга. Подставим (3.4) во второе уравнение (3.5) с учетом (3.9), в результате убедимся, что скалярный магнитный потенциал удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\text{div} (\mu \text{grad } U) = \text{div } \vec{I}_n. \quad (3.10)$$

Для однородных объектов уравнение упрощается и переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta U = 0. \quad (3.11)$$

На границах тел потенциал удовлетворяет двум граничным условиям. Из непрерывности тангенциальной компоненты напряженности следует, что потенциал на границе непрерывен. Если обозначить потенциал внутри тела как U_i , а вне тела как U_e , то на границе $U_i = U_e$. Данные потенциалы как и поля складываются из потенциалов первичного и вторичного полей: $U = U^{\text{прв}} + U^{\text{втр}}$, тогда можно считать, что на границе непрерывен вторичный потенциал, и первое граничное условие принимает вид:

$$U_i^{\text{прв}} = U_e^{\text{втр}}. \quad (3.12)$$

Второе граничное условие вытекает из непрерывности нормальных компонент вектора индукции и имеет вид:

$$\frac{\partial U^{\text{прв}}}{\partial n} + \frac{\partial U_e^{\text{втр}}}{\partial n} = \mu \left(\frac{\partial U^{\text{прв}}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{\text{втр}}}{\partial n} \right). \quad (3.13)$$

Решить прямую задачу магниторазведки для любого объекта можно, найдя такие потенциалы внутри и вне его, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению и двум граничным условиям. Решим эту задачу для однородного шара.

Пусть шар радиуса a с магнитной восприимчивостью k помещен в однородное первичное магнитное поле $\vec{H}^{\text{прв}}$, направленное вдоль оси z .

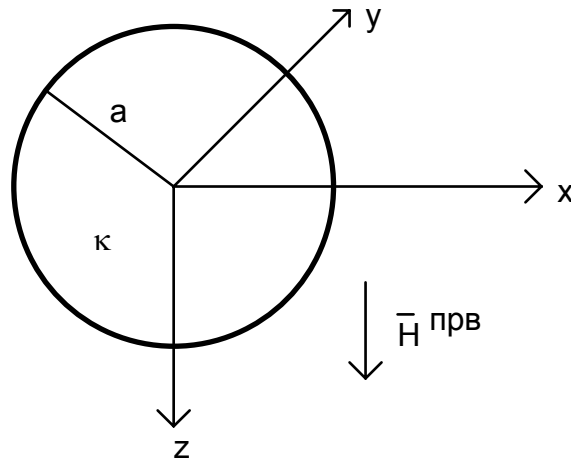


Рис. 3.

Расположим центр шара в начале декартовой системы координат (Рис. 3) и определим потенциал первичного поля. С помощью (3.9) легко убедиться, что

$$U^{\text{прв}} = -H^{\text{прв}} z. \quad (3.14)$$

Из курса теории поля известно, что шар в однородном поле поляризуется однородно, и его внешнее поле эквивалентно полю диполя. Убедимся в этом, попытавшись удовлетворить условиям теоремы единственности. Для этого составим выражения для внутреннего и внешнего вторичных потенциалов с неопределенными коэффициентами и найдем их значения из граничных условий. Для удобства расчетов перейдем к сферическим координатам R, θ, φ , вводимым соотношениями:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi; y = R \sin \theta \sin \varphi; z = R \cos \theta. \quad (3.15)$$

В сферической системе координат потенциал первичного поля примет вид

$$U^{\text{прв}} = -H^{\text{прв}} R \cos \theta. \quad (3.16)$$

Внутренний вторичный потенциал будем искать как потенциал однородного поля с неопределенным коэффициентом A :

$$U_i^{\text{втр}} = -A H^{\text{прв}} R \cos \theta. \quad (3.17)$$

Внешний вторичный потенциал будем искать в форме потенциала вертикального диполя, расположенного в центре шара, с неопределенным коэффициентом C :

$$U_e^{\text{втр}} = C H^{\text{прв}} \frac{\cos \theta}{R^2}. \quad (3.18)$$

Удовлетворим сначала условие (3.12). При $R=a$ приравняем (3.17) и (3.18), в результате чего получим соотношение $C=a^3 A$. В условии (3.13) вместо дифференцирова-

ния по нормали в сферической системе можно дифференцировать по координате R , тогда получим следующее уравнение для определения A : $-1-2A = \mu(-1+A)$ откуда $A=(\mu-1)/(\mu+2)$. Выражения для потенциалов, удовлетворяющие условиям теоремы единственности, примут вид:

$$U_i^{\text{втр}} = -\frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{прв}} R \cos \theta,$$

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{прв}} \frac{\cos \theta}{R^2}. \quad (3.19)$$

Переходя обратно к декартовой системе координат, получим внутри шара

$$U_i^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} H^{\text{прв}} z, \quad (3.20)$$

а вне его

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{\mu-1}{\mu+2} a^3 H^{\text{прв}} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.21)$$

Проанализируем полученные выражения. Потенциал вне шара эквивалентен потенциалу диполя, помещенного в его центр, с дипольным моментом, ориентированным по направлению намагничивающего поля. Преобразуем (3.21), умножив и поделив на $4\pi/3$ и учитывая, что $\mu=1+k$. В результате получим

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{kH^{\text{прв}}}{1 + \frac{1}{3}k} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.22)$$

Первый сомножитель в данной формуле возникает благодаря применению системы СИ, второй сомножитель представляет собой намагниченность шара, а третий - его объем. Таким образом, потенциал внешнего аномального поля шара можно представить в виде

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.23)$$

Дипольный момент шара, как видно, совпадает с его магнитным моментом $M=IV$, а намагниченность шара определяется формулой

$$I = \frac{kH^{\text{прв}}}{1 + \frac{1}{3}k}. \quad (3.24)$$

Напомним, что задача решалась при $I_n = 0$. Если учесть наличие остаточной намагниченности, направленной так же, как намагничивающее поле, то (3.24) преобразуется к виду

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}} + I_n}{1 + \frac{1}{3} \kappa}. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.25) и (3.6), можно убедиться, что они имеют одинаковый вид:

$$I = \frac{\kappa H^{\text{прв}} + I_n}{1 + \kappa N}, \quad (3.26)$$

только для полупространства коэффициент размагничивания $N=1/2$, а для шара $N=1/3$.

Анализируя (3.20), можно установить, что потенциал внутреннего поля шара - это потенциал однородного поля с напряженностью

$$\vec{H}_i^{\text{втр}} = -N \vec{I}, \quad (3.27)$$

направленного противоположно намагниченности, следовательно, в данном случае и первичному полю. Из вида полученной формулы становится ясно, почему внутреннее аномальное поле называют размагничивающим, а параметр N - коэффициентом размагничивания.

Выведенные формулы относились к шару, центр которого совпадает с началом координат. Переносим центр в точку $q(\xi, \eta, \zeta)$, получаем

$$U_e^{\text{втр}} = -\frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{\zeta - z}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}}. \quad (3.28)$$

Легко убедиться, что данная формула имеет следующую структуру:

$$U_e^{\text{втр}} = -\frac{1}{4\pi} \cdot IV \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right), \quad (3.29)$$

допускающую обобщение на случай произвольно ориентированной намагниченности. Если шар намагничивается в поле, имеющем компоненты напряженности $H_x^{\text{прв}}, H_y^{\text{прв}}, H_z^{\text{прв}}$, а компоненты его вектора остаточной намагниченности соответственно I_{nx}, I_{ny}, I_{nz} , то он приобретает компоненты намагниченности

$$I_x = \frac{\kappa H_x^{\text{прв}} + I_{\text{пх}}}{1 + \kappa N}; I_y = \frac{\kappa H_y^{\text{прв}} + I_{\text{пy}}}{1 + \kappa N}; I_z = \frac{\kappa H_z^{\text{прв}} + I_{\text{пz}}}{1 + \kappa N}. \quad (3.30)$$

Каждая из компонент создает свою часть общего потенциала, который, как следует из (3.29) и принципа суперпозиции полей:

$$U_e^{\text{втр}} = -\frac{V}{4\pi} \left[I_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{L_{\text{qa}}} \right) + I_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{L_{\text{qa}}} \right) + I_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{L_{\text{qa}}} \right) \right]. \quad (3.31)$$

В квадратной скобке содержится скалярное произведение двух векторов: первый - это \vec{I} с компонентами I_x, I_y, I_z , а второй вектор - это $\text{grad}(1/L_{\text{qa}})$. Записывая U вместо $U_e^{\text{втр}}$, получаем общее выражение для потенциала в точке a , создаваемого шаром с центром в точке q :

$$U(a) = -\frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \text{grad} \frac{1}{L_{\text{qa}}} \right). \quad (3.32)$$

Оператор grad в данной формуле берется по координатам точки a . Применяя символический оператор Гамильтона ∇ , (3.32) можно переписать в форме:

$$U(a) = -\frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{\text{qa}}} \right), \quad (3.33)$$

а, принимая во внимание, что $\overset{q}{\nabla} = -\overset{a}{\nabla}$, и в альтернативной, имея в виду, что выбор одной из формул зависит от характера решаемой задачи:

$$U(a) = \frac{V}{4\pi} \left(\vec{I} \overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{\text{qa}}} \right). \quad (3.34)$$

Полученные выражения дают возможность путем интегрирования по объему модели записать формальные соотношения для потенциала 3-мерного тела V :

$$U(a) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{\text{qa}}} \right) dV \quad (3.35)$$

или

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \overset{q}{\nabla} \frac{1}{L_{\text{qa}}} \right) dV. \quad (3.36)$$

Вместе с тем очевидно, что данные соотношения надо применять с осторожностью, что, в частности, следует из несовпадения намагниченностей пространства, полупространства и шара.

В необходимости корректного применения выведенных соотношений можно дополнительно убедиться, решив прямую задачу для горизонтального кругового цилиндра, вытянутого вдоль оси y . Задача эта решается аналогично задаче для шара, только вычисления проводятся не в сферической, а в цилиндрической системе координат. Предоставляем само решение провести читателю самостоятельно и приведем лишь конечный результат. Если радиус цилиндра обозначить через a , то потенциал однородного вторичного поля внутри цилиндра при вертикальном намагничении будет

$$U_i^{\text{втр}} = N I z, \quad (3.37)$$

где $N=1/2$ (как для полупространства), а намагниченность I также вычисляется по формуле (3.26) с данным коэффициентом размагничивания. Внешний аномальный потенциал цилиндра эквивалентен потенциалу вертикального линейного диполя, расположенного на оси цилиндра:

$$U_e^{\text{втр}} = \frac{1}{2\pi} \cdot IS \cdot \frac{z}{x^2 + z^2}, \quad (3.38)$$

где $S=\pi a^2$ - площадь поперечного сечения цилиндра, а произведение IS - его линейный магнитный момент. Формальное интегральное соотношение для магнитного потенциала двумерной модели, обобщая (3.38), можно записать следующим образом:

$$U(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{(\xi - x) I_x(\xi, \zeta) + (\zeta - z) I_z(\xi, \zeta)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} dS. \quad (3.39)$$

От формулы (3.35) для трехмерной модели можно, интегрируя по η аналогично проведенному для гравитационной задачи, формально перейти к (3.39), но значения намагниченности при этом останутся такими же, как для шара, а не как для кругового цилиндра. Для решения вопроса о применимости этих выражений надо разобраться в зависимости намагничения от формы, чему посвящен следующий параграф.

В заключение данного параграфа укажем еще на одно формальное соотношение - так называемое соотношение Пуассона между гравитационным и

магнитным потенциалами однородных и однородно намагниченных тел. Если в формулах (2.8), (3.35) и (3.36) положить $\sigma = \text{const}$ и $\vec{I} = \text{const}$, то легко убедиться, что

$$U(a) = \frac{1}{4\pi\gamma\sigma} \left(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}^q W(a) \right) = -\frac{1}{4\pi\gamma\sigma} \left(\vec{I} \cdot \vec{\nabla}^a W(a) \right). \quad (3.40)$$

Применимость соотношения Пуассона также определяется характером размагничивания изучаемой модели.

§ 4. ЭФФЕКТ РАЗМАГНИЧИВАНИЯ И ПРИМЕНИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

Сложности в применении выведенных формальных соотношений заключаются в том, что намагниченные тела, а также разные части одного тела взаимодействуют друг с другом, создавая дополнительные намагниченности. Рассмотрим этот эффект на простом примере. Пусть на небольшом расстоянии друг от друга расположены два тела, например, шары. Каждый из шаров в земном поле приобретает однородную намагниченность и создает во внешнем по отношению к нему пространстве аномальное поле. При этом получается, что тела намагничиваются не только в земном и собственном аномальном поле, но и в аномальном поле соседнего тела, а это поле существенно неоднородно. В итоге надо сделать вывод о том, что аномальное поле над моделью, состоящей из двух сближенных тел, не равно сумме их аномальных полей, а их намагниченность - неоднородна даже если каждое из тел, будучи уединенным, намагничивалось бы однородно.

Необходимо четко различать, что в соответствии с принципом суперпозиции полей магнитные поля не взаимодействуют друг с другом, в то время как намагниченные тела - взаимодействуют. Можно сказать, что справедлив принцип суперпозиции полей, но в магнитном поле нет суперпозиции тел, как в гравитационном. Именно из-за этого, строго говоря, неправомочно складывать потенциалы тел, а, следовательно, неправомочно проводить и интегрирование потенциалов. Однако, при определенных условиях погрешности, вносимые благодаря взаимовлиянию, оказываются малыми, и интегральные соотношения, рассматриваемые как модель со своими допущениями, - применимыми на практике.

Рассмотрим условия применимости интегральных соотношений. Ранее было показано, что полупространство, шар и круговой цилиндр в однородном поле

намагничиваются однородно. Это - уникальное свойство, характерное для узкого класса объектов. Болгарский геофизик Д.П.Зидаров доказал, что помимо полупространства таким свойством обладают только эллипсоиды, частными формами которых и являются шар и круговой цилиндр. Если намагничивающее поле направлено вдоль какой-либо из осей эллипсоида, его намагниченность может быть определена по формуле (3.26), то есть влияние размагничивания может быть учтено введением безразмерного коэффициента размагничивания **N**, зависящего от формы эллипсоида. Как было отмечено выше, для шара **N=1/3**, а для кругового цилиндра при намагничении перпендикулярно оси - **N=1/2**. В общем случае коэффициенты размагничивания выражаются через эллиптические интегралы, для их определения существуют рассчитанные таблицы и номограммы [10], но коэффициенты размагничивания эллиптических цилиндров вычисляются по элементарной формуле. Если эллиптический цилиндр с полуосями **a** и **b** намагничивается в поле, параллельном полуоси **a**, то его размагничивающий фактор равен:

$$N_a = \frac{b}{a + b}. \quad (4.1)$$

в частности, при **a=b** для кругового цилиндра **N=1/2**.

Коэффициенты размагничивания эллипсоидов подчиняются определенным специфическим закономерностям. Первая из них состоит в том, что $0 \leq N \leq 1$. Наиболее интересны крайние случаи, присущие вырожденным формам эллипсоидов. При **N=0** размагничивание отсутствует, а намагниченность определяется по формуле (3.8) для пространства. Этому случаю соответствуют эллипсоиды, вытянутые вдоль поля на бесконечное расстояние, например, эллиптические цилиндры при $a \rightarrow \infty$. Надо сказать, что эллиптические цилиндры любого сечения, будучи вытянуты от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль намагничивающего поля, не размагничиваются, поскольку не создают аномального поля. Случай **N=1** соответствует бесконечному плоскопараллельному слою, намагниченному перпендикулярным к нему полем, например при $b \rightarrow \infty$ в (4.1).

Вторая присущая исключительно эллипсоидам закономерность состоит в том, что сумма коэффициентов размагничивания вдоль всех полуосей: **a**, **b** и **c** - строго равна единице:

$$N_a + N_b + N_c = 1, \quad (4.2)$$

поэтому в таблицах обычно указывают лишь два из трех коэффициентов. Отметим, что для полупространства аналогичная сумма равна лишь $1/2$, поскольку при намагничении его полем, параллельным границе, размагничивание отсутствует, как и аномальное поле.

Тела любых форм, отличных от полупространства и эллипсоидов, в однородном поле намагничиваются неоднородно. Неоднородно намагничивается из-за взаимовлияния и совокупность нескольких эллипсоидов. Степень неоднородности намагничения определяется магнитной восприимчивостью тел, точнее говоря их относительной магнитной проницаемостью μ . Обратим внимание, что при $N=1$ знаменатель в (3.26) равен $\mu=1+k$. Оказывается, намагниченность разных частей неэллипсоидального объекта может различаться не более, чем в μ раз. К неоднородно намагничивающимся объектам неприменимо понятие коэффициента размагничивания, поскольку в каждой их точке влияние размагничивания различно, и намагниченность меняется как по величине, так и по направлению. На рис. 4 векторами показаны распределения намагниченности внутри некоторых двумерных моделей с магнитной восприимчивостью 2 СИ в вертикальном намагничивающем поле.

Хотя магнитная восприимчивость - безразмерна, значения ее различаются в системах СИ и СГС: $k_{СИ} = 4\pi \cdot k_{СГС}$. Так как знаменатель в (3.26), очевидно, должен быть численно равным в обеих системах, из-за этого различаются и безразмерные коэффициенты размагничивания: $N_{СГС} = 4\pi \cdot N_{СИ}$, например у шара в СГС - $N=4\pi/3$.

Отмеченные особенности проявления эффекта размагничивания указывают на то, что при $k \rightarrow 0$ влияние этого эффекта пренебрежимо мало, поэтому для слабомагнитных объектов можно вычислять магнитный потенциал с помощью интегральных формул. Отметим также, что соотношение Пуассона (3.40), строго говоря, выполняется лишь для эллипсоидов, но при $k \rightarrow 0$ может с определенной погрешностью соблюдаться и для тел неэллипсоидальной формы. В этой ситуации необходим анализ возникающих погрешностей в зависимости от магнитной восприимчивости изучаемых геологических объектов.

Начнем анализ с выбора критерия значимости эффектов, возникающих за счет размагничивания. Наиболее естественным критерием представляется сопоставление со среднеквадратической погрешностью выполненной магнитной съемки. Если по результатам контрольных наблюдений магниторастворки

удостоверились, что погрешности определения магнитных аномалий не превышают определенной величины, упрощения, вносимые при интерпретации, должны быть согласованы с ней. Отсюда следует, что пренебрежимо малой погрешностью упрощений при формировании какой бы то ни было модели может считаться лишь такая, которая заведомо искажает поле модели менее, чем на величину среднеквадратической погрешности съемки.

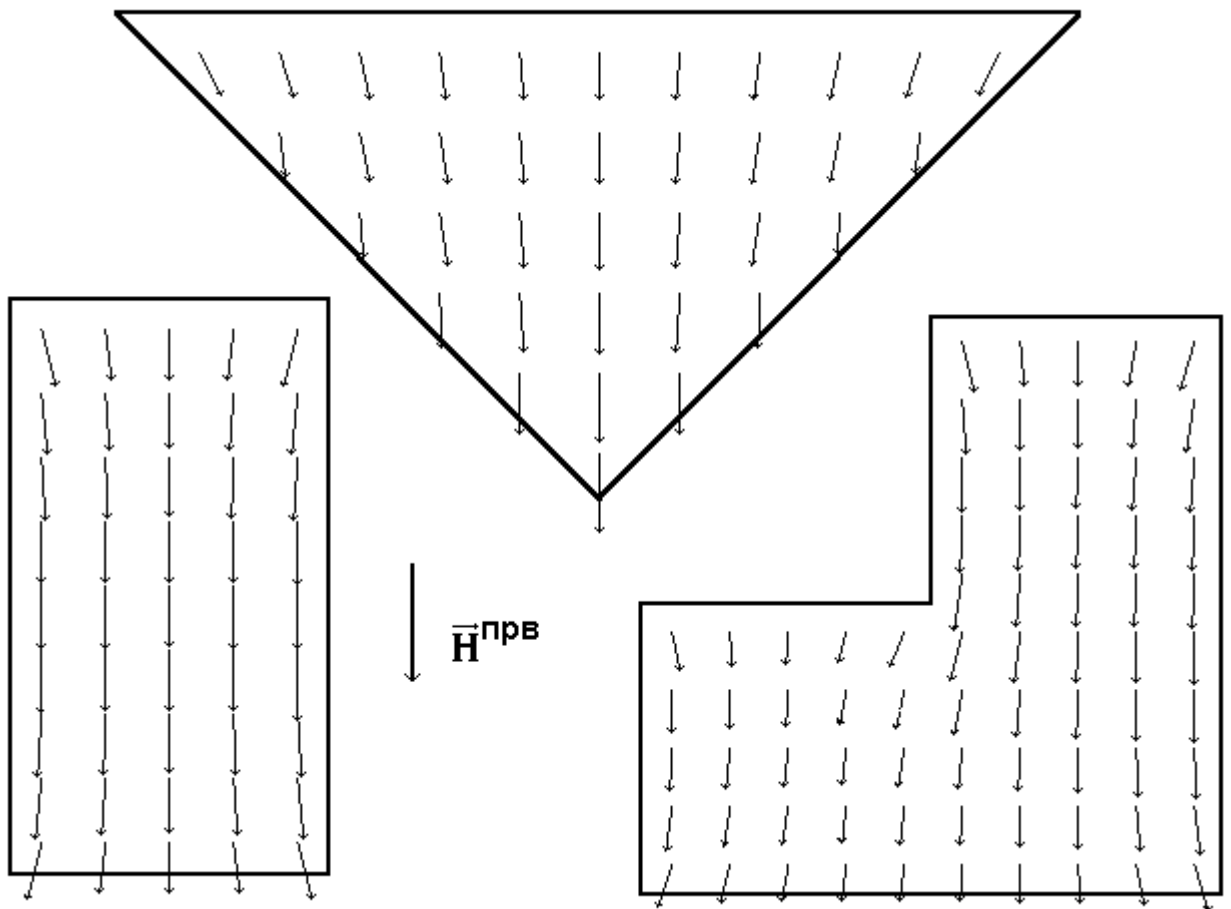


Рис. 4. Намагниченность однородных моделей с $\kappa=2$ СИ, полученная в однородном вертикальном поле под влиянием размагничивания

Посмотрим с этой точки зрения на те магнитные аномалии, которые связаны с влиянием размагничивания. Ясно, что наибольшие эффекты наблюдаются вблизи поверхности намагниченного объекта, причем различные его части, как было отмечено выше, могут отличаться по намагниченности в μ раз. Вблизи поверхности аномалии можно оценить по формуле (3.7) для полупространства. Если подставить в нее сначала намагниченность, вычисленную без учета размагничивания по

формуле (3.8), полагая $I_n=0$, а затем намагниченность (3.26) с $N=1$, то есть при максимальном размагничивании, и получить разность этих аномалий, то максимальная погрешность в магнитных аномалиях за счет пренебрежения размагничиванием окажется равной

$$\Delta Z = \frac{\kappa^2 T_0}{2(1 + \kappa)}. \quad (4.3)$$

В таблице 1 сведены вычисленные таким способом погрешности при намагничивающем поле $T_0 = 50$ мкТл. Если остаточная намагниченность не равна нулю, то погрешности, как следует из (3.8) и (3.26), могут возрасти. Анализ таблицы показывает, что при величинах κ , характерных для магнетитовых руд, погрешности сопоставимы с самой наблюдаемой аномалией. С уменьшением κ уменьшаются и погрешности, но лишь при $\kappa < 634 \cdot 10^{-5}$ СИ они не превышают 1 нТл, то есть той точности, которая вполне достижима для современных высокоточных съемок с протонными и квантовыми магнитометрами.

Таблица 1.

κ, ед. СИ	Предельные погрешности за счет размагничивания, нТл
1	12500
0,1	227
0,01	2,48
0,001	0,025

Таким образом, если магнитная восприимчивость изучаемых объектов не превышает $634 \cdot 10^{-5}$ СИ, то при существующем уровне точности магнитных съемок влиянием размагничивания заведомо можно пренебрегать, что дает возможность применять интегральные формулы, а также соотношение Пуассона при решении прямой задачи магниторазведки для сложных моделей. Аномалии компонент магнитной индукции могут вычисляться по формуле, вытекающей из (3.9), а именно:

$$\vec{B} = -\mu_0 \text{grad } U. \quad (4.4)$$

Аномалии ΔT можно вычислять, зная аномалии компонент, по формулам (1.1) или (1.2). При $\kappa > 634 \cdot 10^{-5}$ СИ необходимо сравнивать предельные погрешности со среднеквадратической погрешностью съемки и, если они превышают ее, корректно

учитывать размагничивание. Способы решения прямой задачи магниторазведки для сильномагнитных объектов будут рассмотрены в главе 4.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРОСТЫЕ СЛОИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

Магнитный потенциал слабомагнитных трехмерных объектов может быть вычислен по формулам (3.35), (3.36), а для двумерных - по формуле (3.39). Вместе с тем эти формулы при определенных условиях могут быть упрощены за счет перехода от интегрирования по объему модели к интегрированию по ее поверхности. Воспользуемся при этом возможностями действий с символическим оператором Гамильтона ∇ и проинтегрируем по частям выражение (3.36):

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla \frac{1}{L_{qa}} \right) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{I}(q)}{L_{qa}} \nabla dV. \quad (5.1)$$

Поскольку скалярное произведение оператора ∇ на вектор - есть дивергенция этого вектора, результат интегрирования по частям можно записать в виде:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \frac{\vec{I}(q)}{L_{qa}} dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV. \quad (5.2)$$

Применим к первому из интегралов теорему Остроградского-Гаусса:

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \frac{\vec{I}(q)}{L_{qa}} dV = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\operatorname{Div} \vec{I}(q)}{L_{qa}} dS. \quad (5.3)$$

Поверхностная дивергенция, как известно, представляет собой в каждой точке поверхности разность нормальных компонент намагниченности внутри и вне тела:

$$\operatorname{Div} \vec{I} = I_{\text{nor}}^i - I_{\text{nor}}^e. \quad (5.4)$$

Если модель находится в немагнитном пространстве $I_{\text{nor}}^e = 0$ и, обозначая проекцию намагниченности на внешнюю нормаль просто как I_{nor} , получаем:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I_{\text{nor}}(q)}{L_{qa}} dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{I}(q)}{L_{qa}} dV. \quad (5.5)$$

Для слабомагнитных объектов можно считать, что они в земном поле намагничиваются однородно, тогда $\operatorname{div} \vec{I}(q) = 0$ и

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I_{\text{nor}}(q)}{L_{qa}} dS. \quad (5.6)$$

Таким образом, потенциал однородно намагниченного тела эквивалентен потенциалу простого слоя фиктивных магнитных масс, распределенных на поверхности тела, причем, в каждой точке поверхности плотность этих масс равна проекции намагниченности на внешнюю нормаль в данной точке.

Использование эквивалентных простых слоев фиктивных магнитных масс дает возможность не только расчетов, но и быстрого качественного суждения о форме магнитных аномалий различных моделей. Наиболее удобно применение этих представлений к многогранникам, поскольку для каждой из граней проекция намагниченности на внешнюю нормаль однородна, следовательно и эквивалентный простой слой на каждой из граней - однороден.

Рассмотрим применение данного подхода к качественному анализу аномального поля одной из наиболее распространенных моделей - вертикального двумерного пласта с неограниченным распространением на глубину. Эту модель применяют при аппроксимации даек, рудных тел и т.п.

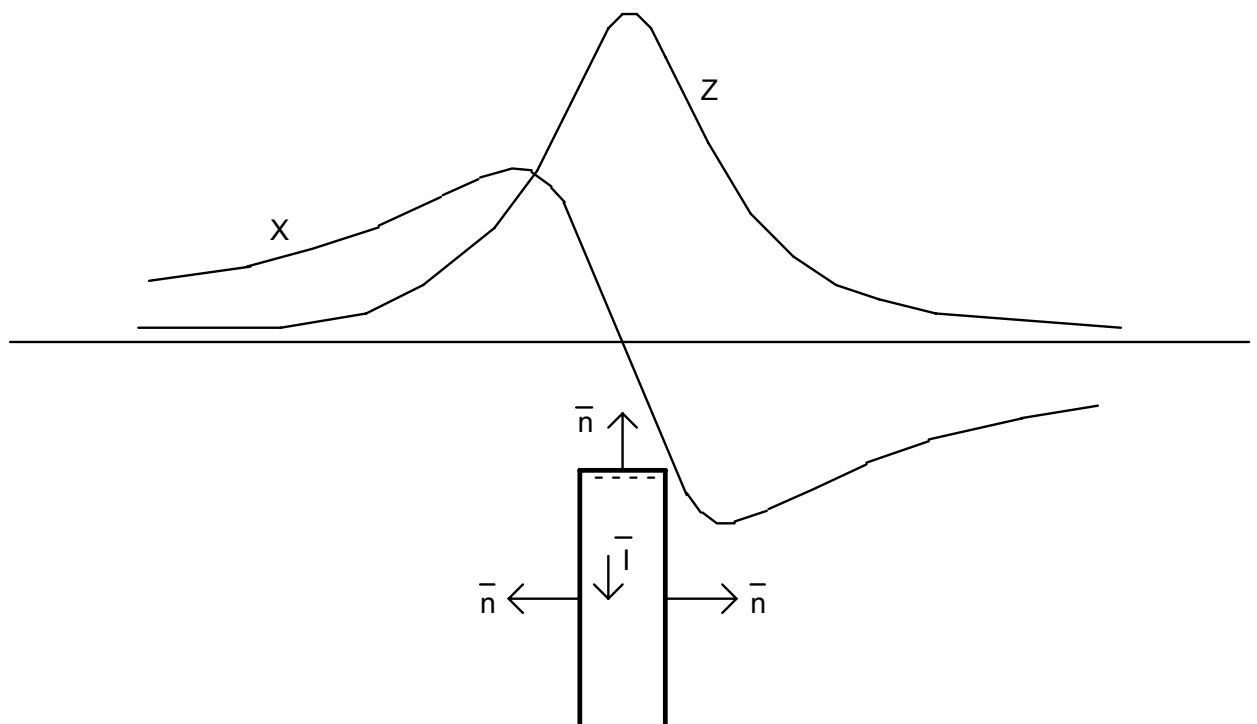


Рис. 5. Магнитные аномалии вертикального пласта.

Если пласт намагничен вертикально, то его магнитная аномалия эквивалентна притяжению отрицательных фиктивных магнитных масс, сосредоточенных на его

верхней кромке и имеющих плотность -1 (рис. 5). Знак "минус" возникает в связи с тем, что на верхней кромке внешняя нормаль направлена противоположно намагниченности. На боковых же кромках внешняя нормаль перпендикулярна намагниченности, поэтому там плотность эквивалентных масс - нулевая, то есть не создающая аномального поля. Для выяснения характера магнитных аномалий в любой из точек вне тела надо мысленно поместить в эту точку единичную положительную массу и проанализировать силу, с которой притягивает (или отталкивает) ее эквивалентный простой слой. При этом, если проекция силы на соответствующую координатную ось совпадает с направлением оси, аномалия этой компоненты считается положительной, если их направления противоположны - отрицательной. В данном случае над пластом наблюдается положительная аномалия вертикальной составляющей ΔZ и знакопеременная аномалия горизонтальной составляющей ΔX , причем слева от пласта $\Delta X > 0$, а справа от него $\Delta X < 0$. Над серединой его верхней кромки ΔZ максимальна, а $\Delta X = 0$. Для выяснения характера аномалий ΔT можно применять тот же подход, рассматривая эту аномалию в соответствии с моделью гармонического приближения (1.2) как компоненту, направленную вдоль вектора нормального геомагнитного поля.

С помощью эквивалентных простых слоев можно вычислять магнитные аномалии разнообразных по форме тел. Вместе с тем, для этого эффективнее воспользоваться специально разработанным математическим аппаратом, излагаемым в следующих главах как для двумерных, так и для трехмерных объектов.

ГЛАВА 2. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

§ 6. КОМПЛЕКСНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

При интерпретации линейных аномалий широко применяют двумерные модели, то есть считают изучаемый объект бесконечным горизонтальным цилиндром, физические свойства которого не меняются по простиранию. Двумерность моделей естественно порождает необходимость работы с упорядоченными парами чисел. Действительно, точка на плоскости вертикального разреза двумерной модели описывается двумя координатами, намагниченность двумерного тела характеризуется двумя компонентами, да и вектор аномального поля имеет только две составляющих, поскольку та из компонент, которая направлена вдоль простирания, в силу симметрии двумерных тел равна нулю. Для работы с упорядоченными парами в математике разработан мощный аппарат теории функций комплексной переменной, который оказался весьма эффективным при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Естественность введения комплексных характеристик вытекает непосредственно из вида дифференциальных уравнений, описывающих гравитационное и магнитное поля. Из (2.1) следует, что вне гравитирующих объектов напряженность гравитационного поля \vec{g} подчиняется следующим дифференциальным уравнениям:

$$\operatorname{rot} \vec{g} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{g} = 0. \quad (6.1)$$

В рассматриваемом двумерном случае вектор \vec{g} имеет только две компоненты g_x и g_z , в то время как $g_y = 0$, $\partial g_x / \partial y = 0$ и $\partial g_z / \partial y = 0$. Тогда (6.1) можно представить в виде:

$$\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = 0. \quad (6.2)$$

Аналогично, дифференциальные уравнения магнитного поля (3.5) в немагнитной среде, где $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, могут быть записаны в форме:

$$\operatorname{rot} \vec{T} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{T} = 0. \quad (6.3)$$

Обозначение \mathbf{T} введено для универсальности и может трактоваться и как напряженность (\mathbf{H}), и как индукция (\mathbf{B}). Чаще результаты измерений магнитного поля рассматривают как компоненты или модуль индукции. Если горизонтальную (вкrest простираения) компоненту индукции обозначить как \mathbf{X} , а вертикальную - как \mathbf{Z} , то для двумерных тел (6.3) можно переписать как

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \quad (6.4)$$

Соотношения (6.2) фактически представляют собой условия Коши-Римана аналитичности функции

$$\mathbf{G}(u) = g_z(x,z) + i g_x(x,z) \quad (6.5)$$

комплексной переменной

$$u = x + i z, \quad (6.6)$$

а (6.4) - условия аналитичности функции

$$\mathbf{T}(u) = \mathbf{Z}(x,z) + i \mathbf{X}(x,z) \quad (6.7)$$

той же переменной. Таким образом, дифференциальные уравнения полей совершенно естественно определяют комплексные характеристики, относящиеся к узкому и хорошо изученному классу аналитических функций комплексной переменной. Аналитическая функция $\mathbf{G}(u)$ впервые была введена в 30-х годах нашего века А.А.Заморевым и получила название комплексной напряженности гравитационного поля. Функция $\mathbf{T}(u)$ называется комплексной индукцией магнитного поля. Использование аппарата теории аналитических функций дает возможность значительно упростить решение прямой задачи для двумерных моделей.

Применяя комплексные переменные, обычно принимают систему координат с осью x , направленной вправо и осью z , направленной вверх. При этом над объектом с повышенной плотностью $g_z < 0$, то есть наблюдаемая аномалия $\Delta g = -g_z$. Аналогично наблюдаемая аномалия $\Delta Z = -Z$. Эти факты, вытекающие из вида применяемой системы координат, необходимо постоянно иметь в виду при проведении вычислений по формулам, полученным для комплексной переменной. Текущую точку внутри тела с координатами ξ и ζ опишем комплексной переменной

$$w = \xi + i \zeta. \quad (6.8)$$

Избыточная плотность двумерного тела рассматривается как действительный параметр $\sigma(w)$, а намагниченность - как комплексный параметр, вводимый формулой

$$l(w) = l_x(\xi, \zeta) + i l_z(\xi, \zeta). \quad (6.9)$$

Комплексная напряженность гравитационного поля двумерной модели описывается следующим интегралом по площади ее поперечного сечения S :

$$G(u) = 2i\gamma \int_S \frac{\sigma(w) dS}{w - u}. \quad (6.10)$$

Докажем это, выделив действительную и мнимую части, для чего распишем подробно комплексные переменные и домножим числитель и знаменатель на выражение, комплексно сопряженное к знаменателю:

$$\begin{aligned} G(u) &= 2i\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta) [(\xi - x) - i(\zeta - z)] dS}{[(\xi - x) + i(\zeta - z)][(\xi - x) - i(\zeta - z)]} = \\ &= 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\zeta - z) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} + i \cdot 2\gamma \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)(\xi - x) dS}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = g_z(x, z) + i g_x(x, z). \end{aligned}$$

Таким образом, одна компактная формула (6.10) в комплексных переменных фактически эквивалентна (с учетом разнонаправленности осей z) двум более громоздким формулам в декартовых координатах: (2.14) и (2.15).

Комплексная индукция магнитного поля для двумерной модели описывается следующим интегралом:

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_S \frac{I(w) dS}{(w - u)^2}. \quad (6.11)$$

Доказательство этого утверждения предоставляем провести читателю самостоятельно аналогично тому, как это было проведено для гравитационной задачи. При этом, естественно, надо учесть, что намагниченность является (в отличие от плотности) комплексным параметром, определяемым соотношением (6.9).

Для однородных и однородно намагниченных двумерных тел имеет место комплексное соотношение Пуассона, которое, как следует из (6.10) и (6.11), можно записать следующим образом:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi\sigma} \cdot \frac{dG(u)}{du}. \quad (6.12)$$

Напомним, что это соотношение, как и формула (6.11) справедливы, строго говоря, лишь для эллиптических цилиндров, а для тел других форм могут применяться лишь как приближенные при небольшой величине магнитной восприимчивости.

Формулы (6.10) и (6.11) дают возможность доказать теоремы, связывающие аномальные поля различных моделей. Применение этих теорем зачастую упрощает решение соответствующих прямых задач.

Теорема вращения для магнитного поля. Если во всех точках двумерной модели **S** повернуть вектор намагниченности на один и тот же угол φ , не меняя его модуля, то в произвольной внешней точке вектор аномального поля, также не меняя своего модуля, развернется на такой же угол, но в противоположном направлении.

Используя экспоненциальное представление комплексных чисел, условие поворота намагниченности $I_1(\xi, \zeta)$ на угол φ против часовой стрелки можно записать следующим образом:

$$I_2(\xi, \zeta) = e^{i\varphi} I_1(\xi, \zeta). \quad (6.13)$$

Подставляя данное соотношение в (6.11), получим

$$T_2(u) = e^{i\varphi} T_1(u). \quad (6.14)$$

Сопоставив (6.7) и (6.9), легко убедиться, что поскольку горизонтальная компонента намагниченности является действительной частью в **I**, а горизонтальная компонента поля является мнимой частью **T** (для вертикальных компонент наоборот), то поворот на угол φ поля осуществляется именно в противоположном направлении, что и требовалось доказать.

Теорема линейного преобразования гравитационного поля. Комплексная напряженность гравитационного поля двумерной модели **S₂**, полученной из модели **S₁** линейным преобразованием $w_2 = a w_1 + b$, где **a** и **b** - комплексные числа, и имеющая ту же однородную плотность σ , связана с комплексной напряженностью модели **S₁** соотношением

$$G_2(u) = \bar{a} G_1\left(\frac{u-b}{a}\right). \quad (6.15)$$

Учитывая, что $dS_2 = |a|^2 dS_1 = a \cdot \bar{a} \cdot dS_1$, где черта означает комплексное сопряжение, получаем:

$$G_2(u) = 2i\gamma\sigma \int_{S_2} \frac{dS_2}{w_2 - u} = 2i\gamma\sigma \int_{S_1} \frac{a \bar{a} dS_1}{a w_1 + b - u} = 2i\gamma\sigma \bar{a} \int_{S_1} \frac{dS_1}{w_1 - \frac{u-b}{a}} = \bar{a} G_1\left(\frac{u-b}{a}\right).$$

что и требовалось доказать.

Аналогичная теорема линейного преобразования магнитного поля приводит к формуле:

$$T_2(u) = \frac{\bar{a}}{a} T_1\left(\frac{u-b}{a}\right), \quad (6.16)$$

доказательство чего предоставляем провести читателю. Следствием этого результата является так называемый критерий подобия магнитных полей. Если $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, а \mathbf{a} - чисто действительное число, то из (6.16) следует $\mathbf{T}_2(\mathbf{u}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{u}/\mathbf{a})$. Таким образом, если в условии прямой задачи изменить все линейные размеры, а магнитные свойства оставить неизменными, то магнитные аномалии не изменятся. Критерий подобия часто применяется при интерпретации магнитных аномалий.

Несмотря на свою простоту, представления аномальных полей площадными интегралами - не самые эффективные. В следующем параграфе будет рассмотрен еще более эффективный аппарат, но прежде, чем перейти к его изложению, обратимся к решению прямых задач для масс, распределенных по линиям. В этом случае вместо интегралов по площади, используются линейные интегралы. Пусть $\sigma_{\text{пов}}$ - поверхностная плотность простого слоя масс, распределенных по линии L . Тогда, приняв во внимание, что по определению

$$\sigma_{\text{пов}} = \lim_{l \rightarrow 0} \sigma l, \quad (6.17)$$

где σ - объемная плотность, а l - мощность слоя, комплексную напряженность гравитационного поля можно вычислять по следующей формуле:

$$G(u) = 2i\gamma \int_L \frac{\sigma_{\text{пов}}(w) |dw|}{w - u}. \quad (6.18)$$

Приведем в качестве примера решение прямой задачи для двумерной однородной прямолинейной пластинки, концы которой расположены в точках с комплексными координатами w_1 и w_2 . Введем параметрическое уравнение отрезка прямой, соединяющей эти точки:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \mathbf{t}. \quad (6.19)$$

Изменяя параметр \mathbf{t} от 0 до 1, получаем координаты любой из точек отрезка. Подставив (6.19) в (6.18), применим известную формулу интегрального исчисления:

$$\int_L f(w) dw = \int_a^b f[w(t)] w'(t) dt, \quad (6.20)$$

тогда

$$G(u) = 2i\gamma\sigma_{нов} \int_L \frac{|w_2 - w_1| dt}{w_1 + (w_2 - w_1) - u} = 2i\gamma\sigma_{нов} \frac{|w_2 - w_1|}{w_2 - w_1} \ln \frac{u - w_2}{u - w_1}. \quad (6.21)$$

Использованный при интегрировании прием широко применяется при решении прямых задач и называется параметрическим представлением носителя. С его помощью достаточно просто вычислять аномалии масс, распределенных и по криволинейным носителям. Для вычисления магнитной аномалии дипольной пластинки с плотностью $I_{пов}$ достаточно в соответствии с соотношением Пуассона продифференцировать (6.21) по u :

$$T(u) = \frac{\mu_0 i I_{нов}}{2\pi} \cdot \frac{|w_2 - w_1|}{w_2 - w_1} \cdot \left(\frac{1}{u - w_2} - \frac{1}{u - w_1} \right). \quad (6.22)$$

Обратим внимание, что $I_{пов}$ - комплексная характеристика, так как определяется следующей формулой:

$$I_{пов} = \lim_{l \rightarrow 0} Il. \quad (6.23)$$

Пластинки часто применяются при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий как простые и удобные аппроксимирующие элементы в алгоритмах подбора.

§ 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ИНТЕГРАЛАМИ ТИПА КОШИ

Наиболее эффективными при решении прямых задач для двумерных моделей являются интегральные представления, в которых интегрирование осуществляется не по площади поперечного сечения модели, а по ее границе. Чтобы получить их, надо перейти от рассмотрения координат точки модели x и z к другим независимым координатам: $w = \xi + i \zeta$ и $\bar{w} = \xi - i \zeta$ (черта означает комплексное сопряжение). В свою очередь ξ и ζ легко выразить через w и \bar{w} :

$$\xi = \frac{w + \bar{w}}{2}; \quad \zeta = \frac{w - \bar{w}}{2i}. \quad (7.1)$$

В соответствии с этими обозначениями любую функцию $f(\xi, \zeta)$ можно также рассматривать в виде $f(w, \bar{w})$.

Введем операторы дифференцирования по переменным w и \bar{w} :

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right), \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right). \quad (7.3)$$

Пусть $F(w) = u(\xi, \zeta) + i v(\xi, \zeta)$ - аналитическая функция. Применим к ней оператор (7.2):

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} - i \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right). \quad (7.4)$$

Так как $F(w)$ - аналитична, она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} = - \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad (7.5)$$

тогда (7.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial F(w)}{\partial w} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{dF(w)}{dw}. \quad (7.6)$$

Таким образом, дифференцирование аналитической функции по w можно проводить формально как дифференцирование функции одной переменной.

Если применить к $F(w)$ оператор (7.3), то с учетом условий (7.5) получим:

$$\frac{\partial F(w)}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (7.7)$$

Функция $\overline{F(w)}$, комплексно сопряженная к аналитической, называется антианалитической функцией. Для антианалитической функции можно аналогично показать, что

$$\frac{\partial \overline{F(w)}}{\partial w} = 0; \quad \frac{\partial \overline{F(w)}}{\partial \bar{w}} = \overline{\left(\frac{\partial F(w)}{\partial w} \right)}. \quad (7.8)$$

Полученные соотношения позволяют записать формулу Грина для функции двух переменных в комплексной форме. Как известно, формула Грина справедлива для любой области, ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами, и имеет вид:

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (7.9)$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - функции, непрерывные вместе с их производными $\partial Q/\partial x$ и $\partial P/\partial y$, а Γ - граница области S . В комплексной форме можно записать две формулы Грина для комплексной функции $F(w, \bar{w}) = u(\xi, \zeta) + i v(\xi, \zeta)$:

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(w, \bar{w}) dw = \int_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} dS, \quad (7.10)$$

$$-\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(w, \bar{w}) d\bar{w} = \int_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial w} dS. \quad (7.11)$$

Основное значение имеет формула (7.10). Докажем ее, предоставив читателю самостоятельно доказать формулу (7.11). Вначале выделим действительную и мнимую составляющие правой части формулы (7.10):

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial F(w, \bar{w})}{\partial \bar{w}} dS &= \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + i \frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS + \frac{i}{2} \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) dS. \end{aligned}$$

Теперь применим к действительной и мнимой части формулу Грина (7.9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (v d\xi + u d\zeta) + \frac{i}{2} \int_{\Gamma} (-u d\xi + v d\zeta) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u + iv) (-i d\xi + d\zeta) = \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} (u + iv) (d\xi + i d\zeta) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} F(w, \bar{w}) dw. \end{aligned}$$

Формула (7.10) доказана. В наиболее важном частном случае, когда функция

$$F(w, \bar{w}) = \overline{f_1(w)} \cdot f_2(w) \quad (7.12)$$

представляет собой произведение антианалитической функции на аналитическую, (7.10) принимает вид:

$$\frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \overline{f_1(w)} f_2(w) dw = \int_S \frac{\partial \overline{f_1(w)}}{\partial \bar{w}} f_2(w) dS. \quad (7.13)$$

Принимая

$$f_1 = w, \quad f_2 = \frac{1}{w-u}, \quad (7.14)$$

из формулы (7.13) получим

$$2i \int_S \frac{dS}{w-u} = \int_\Gamma \frac{\bar{w} dw}{w-u}, \quad (7.15)$$

откуда непосредственно следует представление решения прямой задачи для однородного двумерного объекта с плотностью σ , занимающего область S :

$$G(u) = \gamma \sigma \int_\Gamma \frac{\bar{w} dw}{w-u}. \quad (7.16)$$

Полученное соотношение является представлением комплексной напряженности гравитационного поля двумерного однородного объекта в виде интеграла типа Коши.

Оно легко распространяется и на случай переменной плотности $\sigma(w, \bar{w}) = \sigma_1(\xi, \zeta)$.

При этом, применяя формулу (7.13), получаем

$$G(u) = \gamma \int_\Gamma \frac{\Phi(w, \bar{w}) dw}{w-u}, \quad (7.17)$$

где

$$\Phi(w, \bar{w}) = \int \sigma(w, \bar{w}) d\bar{w}. \quad (7.18)$$

Последнее выражение есть неопределенный интеграл от плотности по \bar{w} . Легко убедиться, что при постоянной плотности σ $\Phi(w, \bar{w}) = \sigma \bar{w}$, и формула (7.17) переходит в формулу (7.16).

Комплексная индукция магнитного поля также может быть представлена контурным интегралом. Для объекта с постоянной намагниченностью I контурный интеграл легко получить из формулы (7.16) с помощью соотношения Пуассона (6.12):

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\bar{w} dw}{(w-u)^2}. \quad (7.19)$$

Это - представление комплексной индукции в форме производной от интеграла типа Коши. В случае неоднородной намагниченности соответствующее представление, получаемое с помощью комплексной формулы Грина, имеет следующий вид:

$$T(u) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Psi(w, \bar{w}) dw}{(w-u)^2}, \quad (7.20)$$

где

$$\Psi(w, \bar{w}) = \int I(w, \bar{w}) d\bar{w}. \quad (7.21)$$

Представления комплексных характеристик аномальных полей в виде интегралов типа Коши значительно упрощают решение прямых задач для двумерных моделей.

§ 8. АНОМАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ТИПОВЫХ ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим аномальные поля однородных моделей, наиболее часто встречающихся в практике интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. При этом мы используем метод вычисления контурных интегралов, предложенный А.В.Цирульским и заключающийся в записи уравнения границы модели в форме

$$\bar{w} = f(w). \quad (8.1)$$

Такая запись уравнения границы дает возможность избежать появления под интегралом сопряженных переменных и представить комплексную напряженность однородного тела в виде:

$$G(u) = \gamma\sigma \int_{\Gamma} \frac{f(w) dw}{w-u}. \quad (8.2)$$

Рассмотрим вначале гравитационную задачу для двумерного объекта с сечением в форме круга (горизонтальный круговой цилиндр) с центром в начале координат и радиусом R . Как известно, уравнение такой окружности в каноническом виде

$$\xi^2 + \zeta^2 = R^2. \quad (8.3)$$

Учитывая, что $\xi^2 + \zeta^2 = w\bar{w}$, выразим (8.3) в форме Цирульского:

$$\bar{w} = \frac{R^2}{w}. \quad (8.4)$$

Тогда в соответствии с (8.2)

$$G(u) = \gamma\sigma \int_{\Gamma} \frac{R^2 dw}{w(w-u)}. \quad (8.5)$$

Функция R^2/w - аналитична во внешности окружности и непрерывна на самой окружности, следовательно, для нее интеграл типа Коши (8.5) фактически является интегралом Коши, который в общем виде для внешней точки имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w) dw}{w-u} = -f(u) + f(\infty). \quad (8.6)$$

где $f(\infty)$ - значение $f(u)$ в бесконечно удаленной точке при $|f(\infty)| < +\infty$. Отсюда

$$G(u) = -\frac{2\pi\gamma\sigma R^2 i}{u}. \quad (8.7)$$

Отметим, что $\pi R^2 \sigma = m$ - линейная масса, которой эквивалентен по своему гравитационному притяжению круговой цилиндр.

Комплексная индукция магнитного поля данного кругового цилиндра вычисляется с помощью соотношения Пуассона и, очевидно, выражается формулой:

$$T(u) = \frac{\mu_0 R^2 I i}{2u^2}. \quad (8.8)$$

Перейдем теперь к решению прямой задачи гравirazведки для эллиптического цилиндра, с полуосями a и b , имеющего каноническое уравнение границы поперечного сечения:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1. \quad (8.9)$$

Выражая ξ и ζ через w и \bar{w} по формулам (7.1) и разрешая полученное квадратное уравнение относительно \bar{w} , представим уравнение эллипса в форме Цирульского:

$$\bar{w} = \frac{w(a^2 + b^2) \pm 2ab \sqrt{w^2 - a^2 + b^2}}{a^2 - b^2}. \quad (8.10)$$

Для выбора знака перед корнем доопределим, например, чтобы в точке a выполнялось $f(a) = \bar{a}$, так как на контуре тела $\bar{w} = f(w)$. Тогда

$$\bar{w} = \frac{w(a^2 + b^2) - 2ab \sqrt{w^2 - a^2 + b^2}}{a^2 - b^2}. \quad (8.11)$$

Преобразуем данное уравнение к следующему виду:

$$\bar{w} = f^i(w) + f^e(w). \quad (8.12)$$

Функция

$$f^i(w) = \frac{a-b}{a+b} w \quad (8.13)$$

аналитична внутри контура эллипса, а из теоремы Коши следует, что для любой такой функции в произвольной внешней точке

$$\int_{\Gamma} \frac{f^i(w) dw}{w-u} = 0. \quad (8.14)$$

Функция

$$f^e(w) = \frac{2ab}{a^2-b^2} \left(w - \sqrt{w^2 - a^2 + b^2} \right) \quad (8.15)$$

аналитична вне контура эллипса, и для нее из формул (7.16) и (8.6) следует:

$$G(u) = -\frac{4\pi\gamma\sigma ab i}{a^2-b^2} \left(u - \sqrt{u^2 - a^2 + b^2} \right), \quad (8.16)$$

поскольку $f^e(\infty)=0$. Подчеркнем, что аналитичность уравнений границ в форме Цирульского как для круга, так и для эллипса, дала возможность при решении прямой задачи фактически избежать интегрирования. Для комплексной индукции магнитного поля эллиптического цилиндра, применяя соотношение Пуассона, получаем:

$$T(u) = -\frac{\mu_0 ab I i}{a^2-b^2} \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2 + b^2}} \right). \quad (8.17)$$

К наиболее популярным моделям, применяемым при аппроксимации двумерных геологических объектов, относятся произвольные многоугольники и их частные формы: пласты, уступы, прямоугольники и т. п. Несколько реже применяются круговые многоугольники - такие, у которых вершины соединяются не прямыми, а дугами окружностей. Применяя аппарат ТФКП, решение прямых задач для них получить весьма просто.

Рассмотрим решение прямой задачи гравirazведки для произвольного однородного N -угольника. Обозначим его вершины как $w_1, w_2, w_3, \dots, w_N$, нумеруя их против часовой стрелки как показано на рис. 6. Так как многоугольник замкнут, то $w_{N+1} = w_1$. Обратим внимание на то, что многоугольник может быть и невыпуклым - у него лишь не должно быть точек самопересечения.

Представим уравнение отрезка, соединяющего две последующих вершины многоугольника: w_n и w_{n+1} в форме Цирульского:

$$\bar{w} = a_n w + b_n, \quad (8.18)$$

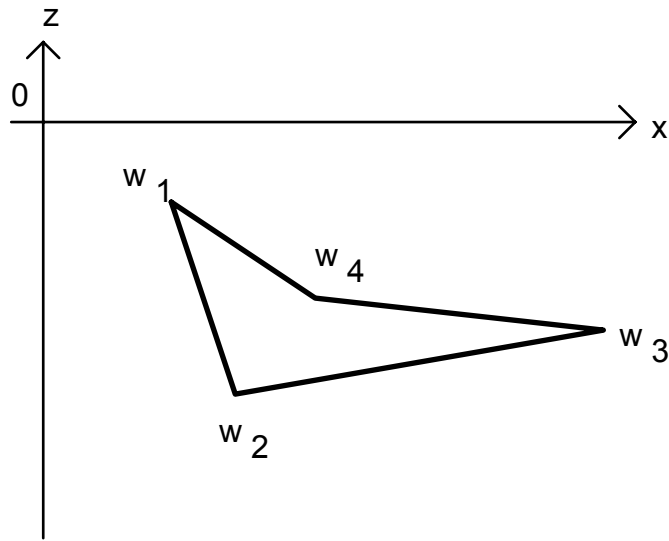


Рис. 6

тогда интеграл (7.16) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(u) &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{(a_n w + b_n) dw}{w - u} = \\ &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[a_n \int_{w_n}^{w_{n+1}} dw + (a_n u + b_n) \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{w - u} \right] = \\ &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[a_n (w_{n+1} - w_n) + (a_n u + b_n) \ln \frac{u - w_{n+1}}{u - w_n} \right]. \end{aligned}$$

Найдем значения a_n и b_n из условий

$$\bar{w}_n = a_n w_n + b_n, \quad \bar{w}_{n+1} = a_n w_{n+1} + b_n,$$

тогда

$$a_n = \frac{\bar{w}_{n+1} - \bar{w}_n}{w_{n+1} - w_n},$$

а коэффициент $(a_n u + b_n)$ можно выразить двояко:

$$a_n u + b_n = a_n (u - w_n) + \bar{w}_n = a_n (u - w_{n+1}) + \bar{w}_{n+1}.$$

Подставляя коэффициенты в результаты интегрирования, получим

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N (\overline{w_{n+1}} - \overline{w_n}) + \gamma\sigma \sum_{n=1}^N [a_n(u - \overline{w_n}) + \overline{w_n}] \ln \frac{u - \overline{w_{n+1}}}{u - \overline{w_n}}.$$

Первая сумма в этом выражении для замкнутого многоугольника равна нулю. Во второй же сумме целесообразно перегруппировать слагаемые, собрав под знаком суммы все те выражения, которые относятся к n -ой вершине:

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \{ -[a_n(u - \overline{w_n}) + \overline{w_n}] \ln(u - \overline{w_n}) + \\ + [a_{n-1}(u - \overline{w_n}) + \overline{w_n}] \ln(u - \overline{w_n}) \} = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N (a_{n-1} - a_n)(u - \overline{w_n}) \ln(u - \overline{w_n}).$$

Окончательно

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N K_n (u - \overline{w_n}) \ln(u - \overline{w_n}), \quad (8.19)$$

где K_n - комплексная постоянная, относящаяся к n -ой вершине и определяемая соотношением

$$K_n = \frac{\overline{w_n} - \overline{w_{n-1}}}{\overline{w_n} - \overline{w_{n-1}}} - \frac{\overline{w_{n+1}} - \overline{w_n}}{\overline{w_{n+1}} - \overline{w_n}} = 2 \left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\overline{w_n} - \overline{w_{n-1}}} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{\overline{w_{n+1}} - \overline{w_n}} \right). \quad (8.20)$$

Применяя к полученному выражению соотношение Пуассона, получим комплексную индукцию магнитного поля произвольного многоугольника:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=1}^N K_n \ln(u - \overline{w_n}). \quad (8.21)$$

Постоянные в полученном выражении, очевидно, также определяются формулой (8.20).

Завершим рассмотрение типовых двумерных моделей круговым многоугольником - таким, у которого вершины соединены не прямыми, а дугами окружностей. Пронумеруем вершины кругового многоугольника против часовой стрелки и обозначим их $w_1, w_2, w_3, \dots, w_N$. Поскольку вершины соединяются дугами окружностей, для каждой из таких дуг надо указать комплексную координату центра. Обозначим центр окружности, дуга которой соединяет n -ую и $(n+1)$ -ую вершины как c_n . Уравнение этой окружности можно представить в виде:

$$\left| w - c_n \right|^2 = (w - c_n)(\overline{w - c_n}) = R_n^2, \quad (8.22)$$

где R_n - ее радиус. Отсюда следует, что уравнение данной окружности в форме Цирульского:

$$\bar{w} = \bar{c}_n + \frac{R_n^2}{w - c_n}. \quad (8.23)$$

Подставляя в (8.2), произведем интегрирование:

$$\begin{aligned} G(u) &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[\bar{c}_n \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{w-u} + R_n^2 \int_{w_n}^{w_{n+1}} \frac{dw}{(w-c_n)(w-u)} \right] = \\ &= \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[\bar{c}_n \ln \frac{w_{n+1}-u}{w_n-u} + \frac{R_n^2}{u-c_n} \left(\ln \frac{w_{n+1}-u}{w_n-u} - \ln \frac{w_{n+1}-c_n}{w_n-c_n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$G(u) = \gamma\sigma \sum_{n=1}^N \left[\bar{c}_n \ln \frac{w_{n+1}-u}{w_n-u} + \frac{R_n^2}{u-c_n} \ln \frac{(w_{n+1}-u)(w_n-c_n)}{(w_n-u)(w_{n+1}-c_n)} \right]. \quad (8.24)$$

Вывод формулы для комплексной индукции магнитного поля с помощью соотношения Пуассона (6.12) предоставляем читателю провести самостоятельно.

Таким образом, теория функций комплексной переменной дает возможность эффективно решать прямую задачу для двумерных моделей достаточно сложных форм. Решения при этом получаются простыми и легко анализируемыми, что определяет плодотворность их применения при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

§ 9. ГРАВИТАЦИОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ АНОМАЛИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ

Аномальные поля трехмерных моделей вычисляются путем дифференцирования интегральных соотношений для их потенциалов: (2.8) и (3.35), поскольку в силу (2.2) и (3.9):

$$\vec{g} = \text{grad } W, \quad \vec{B} = -\mu_0 \text{ grad } U. \quad (9.1)$$

Принципиально применение этих соотношений дает возможность решения прямых задач для любых объектов. За время развития теории гравиразведки и магниторазведки для некоторых тел выведены десятки принципиально идентичных, но несколько различающихся по виду вычислительных формул. Вместе с тем не все они могут устроить интерпретатора. Одни из этих формул чересчур громоздки и неудобны для программирования на ЭВМ. Другие в силу ряда специфических особенностей позволяют вычислять поле не во всех внешних по отношению к телу точках. Третьи - более универсальны, но требуют при реализации на ЭВМ двойной точности представления чисел, что снижает быстродействие программ и т.д. На примере двумерных объектов мы уже убедились в том, что удобный математический аппарат значительно упрощает решение прямых задач. Это ставит задачу вывода формул, дающих возможность наиболее эффективного применения в алгоритмах, реализуемых на ЭВМ.

В настоящей главе мы будем пользоваться левой прямоугольной декартовой системой координат, аналогичной той, которая рассматривалась в первой главе. Вместе с тем стандартные обозначения координат: x, y, z или же ξ, η, ζ - применять, вообще говоря, не вполне удобно. В предыдущей главе мы могли упрощать вид аномалий двумерных моделей, используя комплексные координаты. Для трехмерных полей столь удобного аппарата, к сожалению, нет, однако, некоторое упрощение могут давать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \\ \xi_1 &= \xi, & \xi_2 &= \eta, & \xi_3 &= \zeta. \end{aligned}$$

Ось x_3 считается направленной вниз. Таким образом, координаты точки расчета поля $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$, а координаты текущей точки модели - $\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Во введенных обозначениях потенциал гравитационного поля тела (2.8) выглядит следующим образом:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{1/2}}. \quad (9.2)$$

Формулы для компонент аномального гравитационного поля в декартовой системе координат приводились ранее в первой главе: (2.9), (2.10). Во введенных же обозначениях вместо трех формул можно записать одну общую:

$$W_{x_i}(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (\xi_i - x_i) dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{3/2}}. \quad (9.3)$$

Вторые производные гравитационного потенциала удобно рассматривать в виде квадратной матрицы из 9 элементов, у которой элемент ij представляет собой производную

$$W_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Эта матрица называется матрицей Гессе или гессианом от функции (9.2). Матрица Гессе - симметрична, и ее внедиагональные (при $i \neq j$) элементы вычисляются по следующей формуле:

$$W_{x_i x_j}(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) (\xi_i - x_i) (\xi_j - x_j) dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{5/2}}. \quad (9.4)$$

Диагональные элементы имеют несколько более сложный вид:

$$W_{x_i x_i}(x_1, x_2, x_3) = \gamma \int_V \frac{\sigma(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \left[3(\xi_i - x_i)^2 - \sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right] dV}{\left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{5/2}}. \quad (9.5)$$

Обратим внимание на то, что сумма диагональных элементов матрицы тождественно равна нулю для любой модели \mathbf{V} . Этот факт является следствием гармоничности гравитационного потенциала, так как сумма диагональных элементов - это лапласиан потенциала. Таким образом, из 9 элементов матрицы Гессе вторых производных гравитационного потенциала независимыми фактически являются лишь 5, что упрощает вычисления. Из пяти основных вторых производных могут быть получены все остальные, в том числе и комбинации - такие как кривизна $W_{\Delta} = W_{yy} - W_{xx}$.

Наиболее удобно применение матричных представлений при решении прямой задачи магниторазведки. В первой главе приводилось соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами однородных и однородно намагниченных тел: (3.40). Рассмотрим соотношение между магнитной индукцией и гравитационным потенциалом таких тел. Для этого воспользуемся вторым выражением в формуле (9.1):

$$\vec{B}(a) = -\mu_0 \text{grad } U(a) = -\mu_0 \overset{a}{\nabla} U(a) \quad (9.6)$$

и применим его к соотношению Пуассона, в результате чего получим:

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi\gamma\sigma} \overset{a}{\nabla} \left(\vec{I} \cdot \overset{a}{\nabla} W(a) \right). \quad (9.7)$$

Воспользуемся известной формулой векторного исчисления, раскрывающей градиент скалярного произведения векторов:

$$\text{grad } (\vec{P} \cdot \vec{Q}) = \frac{d\vec{P}}{dr} \vec{Q} + \frac{d\vec{Q}}{dr} \vec{P} + [\vec{P} \times \text{rot } \vec{Q}] + [\vec{Q} \times \text{rot } \vec{P}]. \quad (9.8)$$

Здесь производные $d\vec{P}/dr$ и $d\vec{Q}/dr$ представляют собой линейные операторы (аффиноры), которые целесообразно выражать в матричной форме. Если, например, $\vec{P} = (X, Y, Z)$, а $\vec{r} = (x, y, z)$, то

$$\frac{d\vec{P}}{dr} = \begin{pmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dY}{dx} & \frac{dZ}{dx} \\ \frac{dX}{dY} & \frac{dY}{dY} & \frac{dZ}{dY} \\ \frac{dX}{dy} & \frac{dY}{dy} & \frac{dZ}{dy} \\ \frac{dX}{dz} & \frac{dY}{dz} & \frac{dZ}{dz} \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Применяя (9.8) к (9.7), и учитывая, что намагниченность рассматриваемого объекта постоянна, а $\text{rot grad } \mathbf{W}(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{0}$, получим:

$$\vec{B}(\mathbf{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi\gamma\sigma} \frac{d\bar{g}(\mathbf{a})}{d\bar{L}_{qa}} \vec{I}. \quad (9.10)$$

Аффино́р $d\bar{g}(\mathbf{a})/d\bar{L}_{qa}$ фактически представляет собой матрицу Гессе вторых производных гравитационного потенциала, что и определяет удобство применения матричных записей при анализе магнитных аномалий.

Рассмотрим применение матричного аппарата при решении прямой задачи магниторазведки для шара. Пусть центр шара с намагниченностью \vec{I} расположен в точке $\mathbf{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В соответствии с (9.10) магнитная индукция данного шара в точке $\mathbf{a}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ будет определяться следующим матричным выражением:

$$\vec{B}(\mathbf{a}) = \frac{\mu_0}{4\pi} D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \vec{I}, \quad (9.11)$$

где V - объем шара, а $D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ - симметричная матрица третьего порядка. Ее удобнее выразить через более простую матрицу $T_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$, элементы t_{ij} которой вычисляются по формуле:

$$t_{ij} = (\xi_i - x_i)(\xi_j - x_j), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (9.12)$$

Тогда

$$D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \frac{1}{L_{qa}^3} \left(\frac{3}{L_{qa}^2} T_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) - E \right), \quad (9.13)$$

где E - единичная матрица третьего порядка, то есть

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.14)$$

а

$$L_{qa} = \left[\sum_{k=1}^3 (\xi_k - x_k)^2 \right]^{1/2}. \quad (9.15)$$

Напомним, что в матрице $D_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ фактически вычисляются не **9**, а только **5** элементов, поскольку она симметрична, а сумма ее диагональных элементов равна нулю. Таким образом, матричная запись дает возможность компактного и удобного

представления аномалий компонент индукции магнитного поля. Для вычисления аномалий ΔT шара надо определить аномалии компонент и воспользоваться формулой (1.1) или, если аномалии малы по сравнению с нормальным геомагнитным полем, то ее гармоническим приближением (1.2). При этом необходимо помнить о том, что вектор магнитной индукции \vec{B} аномального поля, вычисляемый по формуле (9.11), имеет компоненты ΔX , ΔY и ΔZ .

§ 10. АНОМАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ОДНОРОДНОГО МАТЕРИАЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Во второй главе были получены выражения, описывающие аномальные поля материальной пластинки. Аналогичная трехмерная модель материального стержня также широко применяется при аппроксимации геологических объектов, к тому же, выражения для полей стержня оказываются весьма полезными при рассмотрении более сложных моделей.

Материальный стержень - это модель, аппроксимирующая тонкий цилиндр конечного простираения. Если плотность цилиндра обозначить σ , а площадь его поперечного сечения - S , то линейную плотность аппроксимирующего материального стержня $\sigma_{\text{лин}}$ можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{\text{лин}} = \lim_{S \rightarrow 0} \sigma S. \quad (10.1)$$

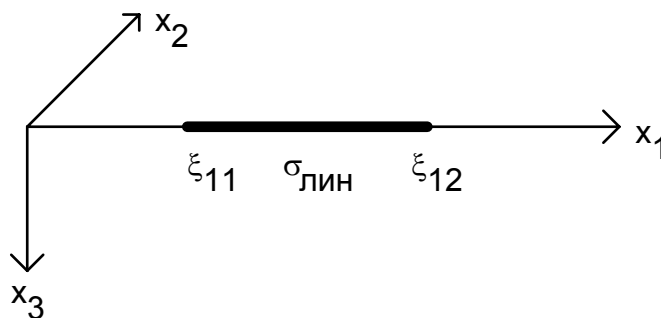


Рис. 7

Рассмотрим вначале стержень, совпадающий с частью оси x_1 , как показано на рис.7. Координаты его концов обозначим ξ_{11} и ξ_{12} . В принятой системе координат потенциал притяжения в точке $\mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$ будет вычисляться по следующей формуле, получаемой из (9.2) после подстановки (10.1):

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \sigma_{\text{лин}} \int_{\xi_{11}}^{\xi_{12}} \frac{d\xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \quad (10.2)$$

Обозначим расстояния между точкой расчета потенциала и концами отрезка как R_1 и R_2 :

$$R_1 = \sqrt{(\xi_{11} - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi_{12} - x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (10.3)$$

тогда, интегрируя (10.2) с помощью подстановки Эйлера, можно представить потенциал стержня в следующем виде:

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \sigma_{\text{лин}} \ln \frac{\xi_{12} - x_1 + R_2}{\xi_{11} - x_1 + R_1}. \quad (10.4)$$

Преобразуем данное выражение с помощью простого, но весьма эффективного приема, предложенного В.Н.Страховым. Для этого введем обозначения:

$$a = \xi_{12} - x_1 + R_2, \quad b = \xi_{11} - x_1 + R_1 \quad (10.5)$$

и вычислим разность **a-b** :

$$\begin{aligned} a - b &= \xi_{12} - \xi_{11} + R_2 - R_1 = \xi_{12} - \xi_{11} + \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1 + R_2} = \\ &= \frac{(R_1 + R_2)(\xi_{12} - \xi_{11}) + (\xi_{12} - x_1)^2 - (\xi_{11} - x_1)^2}{R_1 + R_2} = \\ &= \frac{\xi_{12} - \xi_{11}}{R_1 + R_2} (R_1 + R_2 + \xi_{12} - \xi_{11} - 2x_1) = \frac{L}{R_1 + R_2} (a + b). \end{aligned}$$

Здесь $L = \xi_{12} - \xi_{11}$ - длина стержня. Таким образом,

$$c = \frac{a - b}{a + b} = \frac{L}{R_1 + R_2}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{a}{b} = \frac{(a + b) + (a - b)}{(a + b) - (a - b)} = \frac{1 + c}{1 - c},$$

с учетом чего из (10.4) следует

$$W(x_1, x_2, x_3) = \gamma \sigma_{\text{лин}} \ln \frac{R_1 + R_2 + L}{R_1 + R_2 - L}. \quad (10.6)$$

Полученная формула не изменяется при любом повороте системы координат, поэтому справедлива не только для стержня, расположенного как на рис. 7, но и для любого материального стержня длиной L .

Дифференцируя (10.6), можно получить выражения для компонент аномального гравитационного поля и матрицу Гессе для вторых производных. В частности i -ая компонента гравитационного поля стержня, концы которого расположены в точках с координатами $\xi_1(\xi_{11} , \xi_{21} , \xi_{31})$ и $\xi_2(\xi_{12} , \xi_{22} , \xi_{32})$, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W_{x_i}(x_1, x_2, x_3) &= \gamma \sigma_{\text{лин}} \left[-\frac{1}{R_1 + R_2 + L} \left(\frac{\xi_{i1} - x_i}{R_1} + \frac{\xi_{i2} - x_i}{R_2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{R_1 + R_2 - L} \left(\frac{\xi_{i1} - x_i}{R_1} + \frac{\xi_{i2} - x_i}{R_2} \right) \right] = \\
 &= \frac{2\gamma L \sigma_{\text{лин}}}{(R_1 + R_2 + L)(R_1 + R_2 - L)} \left(\frac{\xi_{i1} - x_i}{R_1} + \frac{\xi_{i2} - x_i}{R_2} \right). \quad (10.7)
 \end{aligned}$$

Получение элементов матрицы Гессе предоставляем читателю. Укажем лишь на то, что дифференцирование для получения диагональных элементов отличается от дифференцирования для внедиагональных элементов. С помощью матрицы Гессе уже легко вывести выражения для компонент магнитного поля стержня с линейной намагниченностью:

$$\vec{I}_{\text{лин}} = \lim_{S \rightarrow 0} \vec{I}S, \quad (10.8)$$

используя соотношение (9.10).

§ 11. ГРАВИТАЦИОННЫЕ АНОМАЛИИ МНОГОУГОЛЬНОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

В гравиразведке при решении разнообразных геологических задач, связанных с контактными поверхностями, в качестве аппроксимирующих элементов применяются многоугольные горизонтальные пластинки (диски). Дело в том, что геологическая информация о форме поверхности обычно задается в виде карт изогипс. Изогипсы - это линии пересечения поверхности набором горизонтальных плоскостей, расположенных друг от друга на равном расстоянии Δh , называемом сечением

изогипс. В связи с этим данный объект естественно аппроксимировать набором горизонтальных дисков, мощность которых Δh , а форма определяется соответствующими изогипсами. Аппроксимируя каждую из изогипс многоугольником, получают модель в виде набора наложенных друг на друга многоугольных горизонтальных пластинок. Решение прямой задачи для такой модели получали М.Тальвани и М.Юинг, Г.Я.Голиздра и многие другие геофизики. В данном разделе мы будем следовать решению, данному В.Н.Страховым.

При $\Delta h \ll h$ каждая из пластинок фактически является однородным простым слоем с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пов}} = \sigma \Delta h$. Из формулы (9.2) следует, что потенциал такого простого слоя будет определяться следующим выражением:

$$W(a) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \int_S \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (11.1)$$

Пусть единственная многоугольная пластинка расположена на глубине $h = |\xi_3 - x_3|$. Рассчитаем ее гравитационный потенциал, преобразовав интеграл (11.1) по площади \mathbf{S} в интеграл по контуру многоугольной пластинки - Γ . Для этого удобно воспользоваться второй формулой Грина, которая в частном случае может быть записана следующим образом:

$$\int_S \Delta U(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\Gamma} \frac{\partial U(\xi_1, \xi_2)}{\partial n} dl, \quad (11.2)$$

причем внешняя нормаль \mathbf{n} расположена в плоскости пластинки. Удобство применения данной формулы связано с тем, что при $\mathbf{h} = \text{const}$, когда в операторе Лапласа нет надобности дифференцировать по ξ_3 :

$$\frac{1}{L_{qa}} = \Delta [L_{qa} - |\xi_3 - x_3| \ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|)] \quad (11.3)$$

Это соотношение можно проверить непосредственным вычислением. С учетом (11.2) и (11.3) потенциал пластинки, ограниченной контуром Γ , представляется в виде:

$$W(a) = \gamma \sigma_{\text{пов}} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial L_{qa}}{\partial n} - |\xi_3 - x_3| \frac{\partial}{\partial n} \ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right] dl. \quad (11.4)$$

Для получения потенциала многоугольной пластинки интеграл по контуру Γ надо представить в виде суммы интегралов по отдельным сторонам данного

многоугольника. Поскольку в формулу (11.4) входят дифференциалы по внешней нормали \mathbf{n} , вычисление вклада в потенциал W от каждой из N сторон естественно проводить во вспомогательной системе координат, повернутой вокруг оси ξ_3 таким образом, чтобы одна из координатных осей совпала с нормалью. Рассмотрим k -ую сторону многоугольника Γ_k (рис.8).

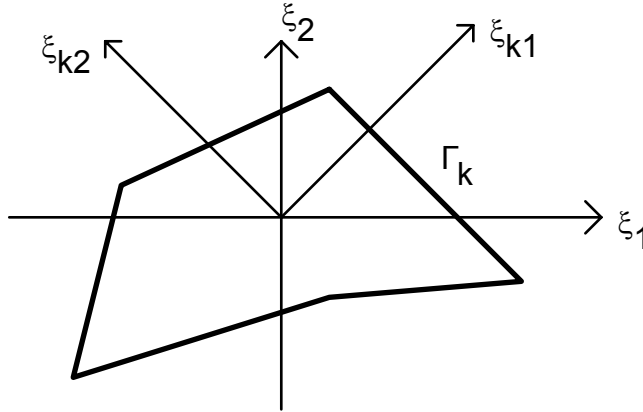


Рис. 8

Повернем горизонтальные оси координат так, чтобы ось x_{k1} (ξ_{k1}) была направлена по внешней нормали к стороне, а ось x_{k2} (ξ_{k2}) была бы параллельна этой стороне. Тогда на Γ_k

$$d\mathbf{l} = d\xi_{k2}, \quad \partial/\partial\mathbf{n} = \partial/\partial\xi_{k1},$$

и суммарный потенциал пластинки можно записать в следующем виде:

$$W(x) = \gamma\sigma_{\text{нов}} \sum_{k=1}^N \int_{\partial_k} \left[\frac{\partial R_k}{\partial \xi_{k1}} - h \frac{\partial}{\partial \xi_{k1}} \ln(R_k + h) \right] d\xi_{k2}, \quad (11.5)$$

где $h = |\xi_3 - x_3|$ и

$$R_k = \sqrt{(\xi_{k1} - x_{k1})^2 + (\xi_{k2} - x_{k2})^2 + h^2}. \quad (11.6)$$

Легко определить, что

$$\frac{\partial R_k}{\partial \xi_{k1}} = \frac{\xi_{k1} - x_{k1}}{R_k} \quad (11.7)$$

и

$$h \frac{\partial}{\partial \xi_{k1}} \ln(R_k + h) = (\xi_{k1} - x_{k1}) \left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_k + h} \right). \quad (11.8)$$

С учетом обхода границы многоугольника при интегрировании в положительном направлении (против часовой стрелки) обозначим координату ξ_{k2} начала отрезка L_k как $\xi_{k2н}$. Тогда соответствующая координата конца отрезка $\xi_{k2к} = \xi_{k2н} + L_k$, где L_k - его длина, и выражение для потенциала примет вид:

$$W(x) = \gamma\sigma_{нов} \sum_{k=1}^N (\xi_{k1} - x_{k1}) \int_{\xi_{k2}}^{\xi_{k2}+L_k} \frac{d\xi_{k2}}{R_k + h}. \quad (11.9)$$

Интеграл в этом выражении берется с помощью подстановки Эйлера. Учитывая преобразование, аналогичное сделанному при решении прямой задачи для материального стержня, получим в итоге следующую формулу, определяющую гравитационный потенциал многоугольной горизонтальной пластинки:

$$W(x) = \gamma\sigma_{нов} \left[\sum_{k=1}^N (\xi_{k1} - x_{k1}) \ln \frac{R_{k'} + R_{kj} + L_k}{R_{k'} + R_{kj} - L_k} - 2h \sum_{k=1}^N \operatorname{arctg} \frac{(\xi_{k1} - x_{k1})(D_{2k} - D_{1k})}{D_{1k}D_{2k} + (\xi_{k1} - x_{k1})^2} \right], \quad (11.10)$$

где в соответствии с (11.6) $R_{кн} = \sqrt{(\xi_{к1н} - x_{к1})^2 + (\xi_{к2н} - x_{к2})^2 + h^2}$ – расстояние от начальной точки отрезка Γ_k до точки \mathbf{x} , $R_{кк} = \sqrt{(\xi_{к1к} - x_{к1})^2 + (\xi_{к2к} - x_{к2})^2 + h^2}$ – расстояние от конечной точки отрезка до точки \mathbf{x} ,

$$D_{1к} = R_{кн} + h + \xi_{к2н} - x_{к2}$$

и

$$D_{2к} = R_{кк} + h + \xi_{к2н} - x_{к2} + L_k.$$

Вычисление вертикальной (нормальной к пластинке) и горизонтальных (параллельных пластинке) компонент гравитационного поля удобнее проводить по-разному из-за специфического горизонтального положения пластинки. Для непосредственного практического применения в рассматриваемой задаче нужна лишь вертикальная компонента. Горизонтальные же компоненты понадобятся при рассмотрении задачи для многогранника.

Для получения силы тяжести продифференцируем (11.1) по \mathbf{x}_3 :

$$g(a) = \frac{\partial W(a)}{\partial x_3} = \gamma\sigma_{нов} \int_S \frac{\xi_3 - x_3}{L_{qa}^3} dS. \quad (11.11)$$

Умножим числитель и знаменатель в этой формуле на $\xi_3 - x_3$. Так как $\xi_3 - x_3 = \text{const}$ - это глубина пластинки, ее можно вынести за знак интеграла, в результате чего (11.11) можно преобразовать:

$$g(a) = \frac{\gamma\sigma_{нов}}{\xi_3 - x_3} \int_S \frac{(\xi_3 - x_3)^2}{L_{qa}^3} dS. \quad (11.12)$$

Представление вертикальной производной в такой форме удобно, поскольку при $\xi_3 - x_3 = \text{const}$, аналогично тому, как это было сделано при вычислении потенциала пластинки, можно воспользоваться следующим легко проверяемым соотношением:

$$\frac{(\xi_3 - x_3)^2}{L_{qa}^3} = |\xi_3 - x_3| \Delta \left[\ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right] \quad (11.13)$$

Подставляя (11.13) в (11.12) и применяя формулу Грина (11.2), получим:

$$g(a) = \gamma\sigma_{нов} \text{sign} (\xi_3 - x_3) \int_{\partial} \left[\frac{\partial}{\partial n} \ln (L_{qa} + |\xi_3 - x_3|) \right] dl. \quad (11.14)$$

Здесь

$$\text{sign} (\xi_3 - x_3) = \frac{|\xi_3 - x_3|}{\xi_3 - x_3} \quad (11.15)$$

знаковая функция, равная **(+1)** при $\xi_3 > x_3$ и **(-1)** при $\xi_3 < x_3$. Перейдя к текущей системе координат, связанной с **k**-ым отрезком, и повторив преобразования как при вычислении потенциала, можно привести (11.14) в тех же обозначениях к следующему виду:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_3} = \gamma\sigma_{нов} \sum_{k=1}^N (\xi_{k1} - x_{k1}) \int_{\xi_{k2}}^{\xi_{k2} + L_k} \left(\frac{1}{R_k} - \frac{1}{R_k + h} \right) d\xi_{k2}. \quad (11.16)$$

Вычислив интеграл с помощью подстановки Эйлера, получим для вертикальной производной потенциала горизонтальной пластинки (для ускорения силы тяжести):

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_3} = 2\gamma\sigma_{нов} \text{sign}(\xi_3 - x_3) \sum_{k=1}^N \arctg \frac{(\xi_{k1} - x_{k1})(D_{2k} - D_{1k})}{D_{1k}D_{2k} + (\xi_{k1} - x_{k1})^2}. \quad (11.17)$$

Обозначения в этой формуле такие же, как и в (11.10).

Горизонтальные производные потенциала многоугольной пластинки целесообразно вычислять путем преобразования площадного интеграла в

контурный с помощью первой формулы Грина. Эту формулу (7.9) мы уже применяли во второй главе. Для производной по x_1 можно записать:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = \gamma \sigma_{\text{пов}} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_S \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (11.18)$$

Как было отмечено в первой главе, $\nabla^q = -\nabla^a$, поэтому (11.18) можно представить и так:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_S \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (11.19)$$

Применяя формулу Грина (7.9), преобразуем интеграл по площади в интеграл по контуру:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \int_{\Gamma} \frac{d\xi_2}{L_{qa}}. \quad (11.20)$$

а его - в сумму интегралов по сторонам многоугольной пластинки:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \frac{d\xi_2}{L_{qa}}. \quad (11.21)$$

Перейдем для вычисления интеграла в систему координат, связанную с k -ой стороной многоугольной пластинки, в результате чего криволинейный интеграл второго типа в формуле (11.21) преобразуется в интеграл первого типа, аналогичный тому, который вычислялся при определении потенциала материального стержня. Обозначим через c_k косинус угла между осями ξ_2 и ξ_{k2} . Тогда с учетом вышесказанного

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_1} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N c_k \ln \frac{R_{kH} + R_{kK} + L_k}{R_{kH} + R_{kK} - L_k}. \quad (11.22)$$

Аналогично для другой горизонтальной производной

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_2} = -\gamma \sigma_{\text{пов}} \sum_{k=1}^N d_k \ln \frac{R_{kH} + R_{kK} + L_k}{R_{kH} + R_{kK} - L_k}, \quad (11.23)$$

где d_k - косинус угла между осями ξ_1 и ξ_{k1} .

§ 12. АНОМАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОГРАННИКА

Наиболее общей моделью, применяемой при моделировании трехмерных геологических объектов, является произвольный многогранник. С помощью набора многогранников удобно аппроксимировать как замкнутые тела, так и контактные поверхности, особенно в магнитных задачах. Последнее утверждение следует из результатов § 5, где было показано, что аномальное поле однородно намагниченного тела эквивалентно полю простого слоя фиктивных магнитных масс, распределенных на поверхности этого тела, причем в каждой точке поверхности плотность масс равна проекции намагниченности на внешнюю нормаль в данной точке. У многогранника каждая из граней имеет однородную плотность эквивалентного простого слоя, так как во всех точках этой грани внешние нормали параллельны друг другу. Таким образом, магнитные аномалии многогранника представляют собой сумму аномальных полей, создаваемых его гранями. Аномальное поле каждой из граней при этом может определяться как притяжение многоугольной пластинки с однородной поверхностной плотностью, равной проекции намагниченности на внешнюю нормаль к данной грани.

В соответствии с изложенным для расчета магнитного поля однородно намагниченного многогранника можно воспользоваться формулами, полученными в предыдущем параграфе для гравитационного поля горизонтального многоугольной пластинки. При этом для расчета поля каждой из граней необходимо вводить текущую систему координат, ось x_3 (ξ_3) которой направлена вдоль внутренней нормали к данной грани.

Переход от одной трехмерной системы координат к другой осуществляется с помощью матрицы перехода \mathbf{M} . Для i -ой грани координаты \mathbf{x} и ξ пересчитываются в координаты $\mathbf{x}^{(i)}$ и $\xi^{(i)}$ по формулам:

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{M}_i \mathbf{x}, \quad \xi^{(i)} = \mathbf{M}_i \xi. \quad (12.1)$$

Соответственно, обратный переход производится по формулам

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}_i^{-1} \mathbf{x}^{(i)}, \quad \xi = \mathbf{M}_i^{-1} \xi^{(i)}, \quad (12.2)$$

где \mathbf{M}_i^{-1} - обратная по отношению к \mathbf{M}_i матрица. Матрицы перехода являются ортогональными и обладают одним весьма важным свойством, упрощающим вычисления. Дело в том, что матрица, обратная к ортогональной, совпадает с

транспонированной к ней, поэтому в формулах (12.2) вместо M_i^{-1} можно подставить M_i^T :

$$x = M_i^T x^{(i)}, \quad \xi = M_i^T \xi^{(i)}. \quad (12.3)$$

Элементы матрицы перехода представляют собой направляющие косинусы углов между старыми и новыми осями координат. В рассматриваемом случае матрица перехода будет иметь следующий вид:

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos[x_1^{(i)}, x_1] & \cos[x_1^{(i)}, x_2] & \cos[x_1^{(i)}, x_3] \\ \cos[x_2^{(i)}, x_1] & \cos[x_2^{(i)}, x_2] & \cos[x_2^{(i)}, x_3] \\ \cos[x_3^{(i)}, x_1] & \cos[x_3^{(i)}, x_2] & \cos[x_3^{(i)}, x_3] \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Определитель этой матрицы равен единице.

В текущей системе координат для вычисления компонент вектора аномального магнитного поля необходимо знать проекцию вектора намагниченности на внешнюю нормаль к данной грани. Для этого также используется формула типа (12.1):

$$\vec{I}^{(i)} = M_i \vec{I}, \quad (12.5)$$

причем плотность эквивалентного простого слоя на этой грани в силу противоположной направленности оси $x_3^{(i)}$ и внешней нормали окажется равной $-I_3^{(i)}$. Тогда с учетом соотношения Пуассона (3.40) компоненты аномального поля в текущей системе координат будут вычисляться по следующим формулам, вытекающим из (11.22), (11.23) и (11.17):

$$X^{(i)} = -\frac{\mu_0 I_3^{(i)}}{4\pi} \sum_{k=1}^N c_k \ln \frac{R_{kH} + R_{kK} + L_k}{R_{kH} + R_{kK} - L_k}, \quad (12.6)$$

$$Y^{(i)} = -\frac{\mu_0 I_3^{(i)}}{4\pi} \sum_{k=1}^N d_k \ln \frac{R_{kH} + R_{kK} + L_k}{R_{kH} + R_{kK} - L_k}, \quad (12.7)$$

$$Z^{(i)} = \frac{\mu_0 I_3^{(i)}}{4\pi} \text{sign}(\xi_3 - x_3) \sum_{k=1}^N \text{arctg} \frac{(\xi_{k1} - x_{k1})(D_{2k} - D_{1k})}{D_{1k} D_{2k} + (\xi_{k1} - x_{k1})^2}. \quad (12.8)$$

Обозначения здесь соответствуют приведенным в (11.10). Для обратного перехода в исходную систему координат компоненты $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$ и $Z^{(i)}$ надо пересчитать в X , Y и Z по формуле типа (12.3). Обратим внимание на то, что данные формулы легко программируются на ЭВМ.

Формулы, описывающие гравитационные аномалии многогранника, получить несколько сложнее. Найдем вначале гравитационный потенциал однородного многогранника:

$$W(a) = \gamma\sigma \int_V \frac{dV}{L_{qa}}. \quad (12.9)$$

Для этого воспользуемся следующим соотношением:

$$\frac{1}{L_{qa}} = \frac{1}{2} \Delta^\xi L_{qa}, \quad (12.10)$$

которое легко проверить непосредственным вычислением. Значок ξ над оператором Лапласа означает, что дифференцирование проводится по координатам ξ (а не по x). Тогда

$$W(a) = \frac{\gamma\sigma}{2} \int_V \Delta^\xi L_{qa} dV \quad (12.11)$$

и, применяя формулу Грина, получим:

$$W(a) = \frac{\gamma\sigma}{2} \int_S \frac{\partial L_{qa}}{\partial n} dS. \quad (12.12)$$

Этот интеграл естественно представить в виде суммы интегралов по граням. Обозначив число граней как Q , перепишем (12.12) в следующем виде:

$$W(a) = \frac{\gamma\sigma}{2} \sum_{i=1}^Q \int_{S_i} \frac{\partial L_{qa}}{\partial n_i} dS. \quad (12.13)$$

Для вычисления интеграла по i -ой грани перейдем, как и в магнитной задаче, в текущую систему координат, ось x_3 (ξ_3) которой направлена вдоль внутренней нормали к этой грани. В такой системе

$$\frac{\partial L_{qa}}{\partial n_i} = \frac{\partial L_{qa}}{\partial \xi_3^{(i)}} = \frac{\xi_3^{(i)} - x_3^{(i)}}{L_{qa}} \quad (12.14)$$

и (12.13) примет вид:

$$W(a) = \frac{\gamma\sigma}{2} \sum_{i=1}^Q [\xi_3^{(i)} - x_3^{(i)}] \int_{S_i} \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (12.15)$$

В последней формуле интеграл аналогичен (11.1) - тому, который вычислялся в предыдущем параграфе для многоугольной пластинки. Его окончательный вид легко

получить из формулы (11.10), переписав ее во вспомогательной системе координат, связанной с i -ой гранью рассматриваемого многогранника. Сделать это предоставляем читателю.

Для получения компонент гравитационного поля надо продифференцировать выражение для потенциала многогранника. Как показал В.Н.Страхов, удобно применить для этого вспомогательное преобразование. Пусть необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int_V \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_k} p(\xi) dV. \quad (12.16)$$

Возьмем его по частям, применив к интегралу с произведением функций f и p - формулу Грина. Тогда (12.16) примет вид:

$$\int_V \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi_k} p(\xi) dV = - \int_V \frac{\partial p(\xi)}{\partial \xi_k} f(\xi) dV + \int_S f(\xi) p(\xi) \cos(n, \xi_k) dS. \quad (12.17)$$

Производная потенциала многогранника по координате x_k может быть, как было указано выше, представлена и в виде производной по ξ_k :

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_k} = \gamma \sigma \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) dV = - \gamma \sigma \int_V \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (12.18)$$

Применяя к (12.18) формулу (12.17) при $p=1$, получим:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_k} = - \gamma \sigma \int_S \cos(n, \xi_k) \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (12.19)$$

Далее, как и при вычислении потенциала, представим интеграл в виде суммы интегралов по граням и перейдем во вспомогательную систему координат, связанную с i -ой гранью. В результате, очевидно, получим:

$$\frac{\partial W(a)}{\partial x_k} = - \gamma \sigma \sum_{i=1}^Q \cos(\xi_3^{(i)}, \xi_k) \int_{S_i} \frac{dS}{L_{qa}}. \quad (12.20)$$

В этой формуле, как и в выражении для потенциала (12.15), присутствует интеграл, вычислявшийся ранее при выводе формулы (11.10).

Таким образом, используя (11.10), можно получить выражения для компонент гравитационного поля однородного многогранника. Общность получаемых выражений для различных элементов гравитационного и магнитного полей

многогранника делает выведенные формулы удобными для программирования на ЭВМ.

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОРАЗВЕДКИ ДЛЯ СИЛЬНОМАГНИТНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 13. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ

В § 4 первой главы было показано, что для сильномагнитных геологических объектов - таких, которые сложены горными породами и рудами с магнитной восприимчивостью, превышающей $634 \cdot 10^{-5}$ СИ, при решении прямой задачи магниторазведки необходим корректный учет эффекта размагничивания. Во второй и третьей главах настоящего пособия рассматривались однородно намагниченные модели, допустимые лишь при изучении слабомагнитных объектов. Сильномагнитные же тела, отличающиеся по форме от эллипсоидов, даже будучи однородными по магнитным свойствам, в однородном поле намагничиваются неоднородно, причем намагниченность в различных точках этих тел может различаться в $\mu=1+k$ раз.

В связи с этим основной проблемой при решении прямой задачи магниторазведки для сильномагнитных объектов является расчет намагниченности в них. Этот расчет проводится путем решения интегральных уравнений, описывающих распределение намагниченности по объему изучаемого тела. Для однородных по магнитным свойствам тел вместо распределения намагниченности можно искать плотности эквивалентных простых либо двойных слоев. С этой целью также выведены соответствующие интегральные уравнения [15]. Ниже рассматриваются интегральные уравнения для намагниченности, поскольку с их помощью можно решать прямую задачу магниторазведки как для однородных, так и для неоднородных по магнитным свойствам геологических объектов. Кроме того, эти уравнения дают возможность изучения намагничивания тел как в однородном геомагнитном поле, так и в неоднородных полях источников, применяемых в методах искусственного подмагничивания. Несмотря на то, что уравнения выводятся для изотропных тел, аналогичный подход может быть распространен и на

анизотропные по магнитной восприимчивости объекты, в том числе и на железистые кварциты, с которыми связана основная часть мировых запасов железа [4].

Пусть объект V , который в общем случае может состоять из нескольких тел, помещен в первичное поле $\vec{H}^{\text{прв}}$. В соответствии с принятой моделью намагничения (3.2) в произвольной точке a этого объекта намагниченность может быть вычислена по формуле:

$$\vec{I}(a) = \kappa(a) \vec{H}(a) + \vec{I}_n(a). \quad (13.1)$$

Напряженность магнитного поля здесь является векторной суммой первичного и вторичного (размагничивающего) полей. Учитывая это, (13.1) можно представить в следующем виде:

$$\vec{I}(a) = \kappa(a) [\vec{H}^{\text{прв}}(a) + \vec{H}^{\text{втр}}(a)] + \vec{I}_n(a). \quad (13.2)$$

Магнитная восприимчивость объекта κ , его естественная остаточная намагниченность \vec{I}_n , как и первичное поле полагаются здесь в общем случае неоднородными. Обозначим через \vec{I}_0 первичную намагниченность - ту, которая была бы у данного объекта без учета размагничивания:

$$\vec{I}_0(a) = \kappa(a) \vec{H}^{\text{прв}}(a) + \vec{I}_n(a), \quad (13.3)$$

тогда вместо (13.2) можно записать

$$\vec{I}(a) = \vec{I}_0(a) + \kappa(a) \vec{H}^{\text{втр}}(a). \quad (13.4)$$

Вторичное поле объекта определяется его намагниченностью и, как следует из (3.9) и (3.35), может быть представлено в виде интеграла по объему:

$$\vec{H}^{\text{втр}}(a) = \frac{1}{4\pi} \nabla^a \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (13.5)$$

Обратим внимание на то, что при $q \rightarrow a$ $L_{qa} \rightarrow 0$, и интеграл в этой точке имеет особенность, что запрещает менять местами дифференцирование и интегрирование. Подставляя (13.5) в (13.4), получим:

$$\vec{I}(a) = \vec{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \nabla^a \int_V \left(\vec{I}(q) \nabla^a \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (13.6)$$

Это соотношение представляет собой интегральное уравнение для намагниченности. Поскольку неизвестная функция \vec{I} в этом уравнении находится

как под знаком интеграла, так и отдельно в левой его части, а известная функция \vec{I}_0 выступает в качестве слагаемого, то данное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Интегральное уравнение (13.6) применялось для расчета магнитных полей И.И.Пеккером, P.V.Sharma, В.В.Соболевым и В.Т.Белоголовым и другими исследователями. Для численного решения данного уравнения предлагалось разбить изучаемый объект на совокупность малых тел, например, многогранников, каждый из которых в силу своей малости считается намагничивающимся однородно. Тогда интеграл в (13.6) можно заменить суммой, в результате чего интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Если общее число элементарных аппроксимирующих тел равно **M**, то для **k**-го тела в векторной форме

$$\vec{I}_k = \vec{I}_{0k} + \frac{\kappa_k}{4\pi} \sum_{j=1}^M \nabla \left(\vec{I}_j \nabla \frac{1}{L_{jk}} \right) V_j. \quad (13.7)$$

Данное уравнение, будучи расписано по компонентам, эквивалентно трем линейным алгебраическим уравнениям. Таким образом, при разбиении изучаемого объекта на **M** элементов, интегральное уравнение (13.6) сводится к системе **3M** линейных алгебраических уравнений с **3M** неизвестными. Легко подсчитать, что при аппроксимации объекта 100 элементами и отведении 4 байт на каждое из чисел в памяти ЭВМ, только для хранения матрицы этой системы в оперативной памяти требуется **4·300·300=360** килобайт. Реальные геологические объекты требуют при аппроксимации значительно больше аппроксимирующих элементов, что наталкивается на ограниченность технических возможностей современных ЭВМ.

Требования к объему памяти при решении интегрального уравнения (13.6) можно было бы сократить, если перейти к решению системы методом последовательных приближений и перевычислять элементы матрицы на каждой итерации. Однако, это значительно увеличивает время вычислений, а при очень больших магнитных восприимчивостях может из-за наличия упомянутой особенности в интеграле привести и к тому, что итерационный процесс станет расходящимся. Для преодоления указанных недостатков необходимо преобразовать уравнение (13.6).

Выделим для этого малый шар \mathbf{V}_a с центром в точке \mathbf{a} . Тогда уравнение (13.6) преобразуется к виду:

$$\vec{I}(a) = \vec{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \overset{a}{\nabla} \int_{\mathbf{V}_a} \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) dV + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \overset{a}{\nabla} \int_{\mathbf{V}-\mathbf{V}_a} \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (13.8)$$

Так как шар \mathbf{V}_a - мал, его можно считать намагниченным однородно. При этом, учитывая, что коэффициент размагничивания шара $\mathbf{N} = 1/3$, получим на основании (3.27):

$$\frac{1}{4\pi} \overset{a}{\nabla} \int_{\mathbf{V}_a} \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) dV = -\frac{1}{3} \vec{I}(a). \quad (13.9)$$

Подставим (13.9) в (13.8):

$$\vec{I}(a) = \vec{I}_0(a) - \frac{\kappa(a)}{3} \vec{I}(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \overset{a}{\nabla} \int_{\mathbf{V}-\mathbf{V}_a} \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) dV. \quad (13.10)$$

Приведя подобные члены, получим

$$\vec{I}(a) = \frac{1}{1 + \frac{\kappa(a)}{3}} \left[\vec{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \overset{a}{\nabla} \int_{\mathbf{V}-\mathbf{V}_a} \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) dV \right]. \quad (13.11)$$

Поскольку в результате выделения шара \mathbf{V}_a особенность (сингулярность) под интегралом ликвидирована, операции дифференцирования и интегрирования можно теперь поменять местами:

$$\vec{I}(a) = \frac{1}{1 + \frac{\kappa(a)}{3}} \left[\vec{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \int_{\mathbf{V}-\mathbf{V}_a} \overset{a}{\nabla} \left(\vec{I}(q) \overset{a}{\nabla} \frac{1}{L_{qa}} \right) dV \right]. \quad (13.12)$$

Выражение под интегралом здесь фактически является напряженностью поля шара с центром в точке \mathbf{q} . Градиент данного скалярного произведения векторов мы уже вычисляли в § 9. На основании формулы (9.11) можно представить полученное интегральное уравнение в следующем окончательном виде:

$$\vec{I}(a) = \frac{3}{3 + \kappa(a)} \left(\vec{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \int_{\mathbf{V}-\mathbf{V}_a} \mathbf{D}_3(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \vec{I}(q) dV \right), \quad (13.13)$$

где $\mathbf{D}_3(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ - матрица, определяемая по формуле (9.13).

Для двумерных объектов, принимая во внимание, что коэффициент размагничивания кругового цилиндра в направлении, перпендикулярном его оси, составляет $N=1/2$, можно получить аналогичное уравнение:

$$\vec{I}(a) = \frac{2}{2 + \kappa(a)} \left(\vec{I}_0(a) + \frac{\kappa(a)}{4\pi} \int_{S-S_a} D_2(q, a) \vec{I}(q) dS \right). \quad (13.14)$$

Здесь симметричная матрица второго порядка $D_2(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ характеризует поле в точке \mathbf{a} , создаваемое круговым цилиндром с осью, проходящей через точку \mathbf{q} , и выражается в виде:

$$D_2(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \frac{2}{L_{qa}^2} \left(\frac{2}{L_{qa}^2} T_2(\mathbf{q}, \mathbf{a}) - E \right). \quad (13.15)$$

где E - единичная матрица второго порядка, а $T_2(\mathbf{q}, \mathbf{a})$ - также симметричная матрица второго порядка, элементы которой t_{ij} вычисляются по формуле:

$$t_{ij} = [x_i(q) - x_i(a)][x_j(q) - x_j(a)], \quad i, j = 1, 2. \quad (13.16)$$

Интегральные уравнения (13.13) и (13.14) не содержат особенностей под интегралом и могут решаться методом последовательных приближений. При этом особое внимание следует обращать на соблюдение эквивалентности данных уравнений исходным (в трехмерном случае (13.6)), так как, вообще говоря, практически никакой геологический объект не представляет собой совокупности непересекающихся шаров (или круговых цилиндров).

§ 14. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Для расчета магнитных аномалий сильномагнитных геологических объектов необходимо иметь эффективный численный метод выведенных интегральных уравнений. С этой целью изучаемый объект надо аппроксимировать совокупностью одинаковых непересекающихся элементов достаточно малого размера, чтобы считать каждый из элементов намагничивающимся однородно как в первичном поле, так и в аномальных полях других элементов.

При аппроксимации объекта в силу специфики выведенных уравнений требуется применение изометричных элементов, заполняющих пространство без промежутков. В двумерном случае таковыми могут служить квадраты и правильные

шестиугольники, а в трехмерном - кубы и додекаэдры. Формулы, описывающие аномальные поля этих тел, как можно было убедиться выше, относительно сложны. Значительной экономии машинного времени при вычислениях можно добиться, если рассчитывать поля изометричных элементов по существенно более простым формулам для равновеликих шаров или (в двумерном случае) для круговых цилиндров. Однако, такой подход требует применения определенных приемов, дающих возможность сохранить эквивалентность решаемого интегрального уравнения исходному.

Если поля элементов вычислять по формулам для вписанных шаров или круговых цилиндров, то оптимальными для аппроксимации следует признать в трехмерном случае - додекаэдры, а в двумерном - шестиугольники. Именно для них, заполняющих пространство без промежутков, вписанные шары и круги создают плотнейшую упаковку. Для них отношение объема элемента к объему вписанного шара, или, соответственно, отношение площадей в двумерном случае - меньше, нежели для кубов и квадратов. Вместе с тем аппроксимация кубами или квадратами более технологична, поэтому ниже мы будем применять именно кубические и квадратные элементы.

Таблица 2.

Координаты			Аномалии куба			Аномалии шара		
x	y	z	ΔX	ΔY	ΔZ	ΔX	ΔY	ΔZ
0	0	2	0,00000	0,00000	1,69372	0,00000	0,00000	2,00000
0	0	4	0,00000	0,00000	0,24679	0,00000	0,00000	0,25000
0	0	6	0,00000	0,00000	0,07388	0,00000	0,00000	0,07407
0	2	0	0,00000	0,00000	-0,84686	0,00000	0,00000	-1,00000
0	2	2	0,00000	0,53939	0,17274	0,00000	0,53033	0,17678
0	2	4	0,00000	0,10679	0,12549	0,00000	0,10733	0,12522
0	4	0	0,00000	0,00000	-0,12549	0,00000	0,00000	-0,12500
0	4	2	0,00000	0,10679	-0,36479	0,00000	0,10733	-0,03578
0	4	4	0,00000	0,06639	0,02207	0,00000	0,06629	0,02210
2	0	0	0,00000	0,00000	-0,84686	0,00000	0,00000	-1,00000
2	0	2	0,53939	0,00000	0,17274	0,53033	0,00000	0,17678
2	0	4	0,10679	0,00000	0,12549	0,10733	0,00000	0,12522
2	2	0	0,00000	0,00000	-0,34549	0,00000	0,00000	-0,35355
2	2	2	0,19617	0,19617	0,00000	0,19245	0,19245	0,00000
2	2	4	0,06807	0,06807	0,06852	0,06804	0,06804	0,06804
4	2	0	0,00000	0,00000	-0,08901	0,00000	0,00000	-0,08944
4	2	2	0,06807	0,03384	-0,03426	0,06804	0,03402	-0,03402
4	2	4	0,04948	0,02469	0,01236	0,04938	0,02469	0,01234
4	4	4	0,02408	0,02408	0,00000	0,02406	0,02406	0,00000

Рассмотрим возможность вычисления полей кубических элементов по формулам для вписанного шара. Поместим центр куба с длиной ребра 2 м в начало координат. Объем куба, очевидно, составит 8 м. Если в аппроксимирующей конструкции кубы расположены вплотную друг к другу, то центр соседнего куба может оказаться не ближе, чем в 2 метрах от начала координат. Рассчитаем компоненты напряженности поля кубика, расположенного в начале координат, в центрах близрасположенных элементов, при вертикальной намагниченности 1 А/м. Результаты вычислений сведены в таблицу 2. Там же приведены результаты расчетов аналогичных компонент для шара с центром в начале координат, имеющего такой же объем.

Анализ таблицы показывает, что различия в полях, превышающие 2 %, наблюдаются только для кубиков, соприкасающихся сторонами. Уже для элементов, соприкасающихся ребрами, они незначительны. Таким образом, вычисление полей кубических элементов по формулам для вписанного шара с поправкой за различие их объемов возможно практически во всех случаях, кроме соседних элементов, соприкасающихся сторонами, когда надо, пользуясь сведениями таблицы 2, ввести соответствующие поправки. Если элементы располагаются не по кубической сетке, а с произвольными сдвигами, поправки вводятся, если расстояние между центрами элементов не превышает 1,5 длины их ребра.

В двумерном случае выводы аналогичны. Вычисление полей квадратных в сечении элементов может проводиться с приемлемой точностью по формулам для вписанного круга с поправкой за различие их площадей, если элементы не соприкасаются сторонами. Иначе необходимо вводить дополнительные поправки. При аппроксимации изучаемого объекта совокупностью кубических элементов обычно приходится решать вопрос о выборе их размеров. Очевидно, чем меньше размеры элементов, тем выше точность расчетов, но и больше затраты машинного времени на их проведение. Практически целесообразно выбирать размеры элемента равными примерно одной трети минимального расстояния от объекта до точек, где вычисляется аномальное поле. При больших размерах в аномалиях может резко проявляться влияние того, что намагниченность каждого из них считается однородной.

При аппроксимации следует соблюдать следующие основные принципы:

1) объемы объекта и аппроксимирующей его конструкции должны быть равными;

2) центры масс объекта и аппроксимирующей его конструкции должны совпадать;

3) аппроксимирующая конструкция должна сохранять угол падения, относительную вытянутость и элементы симметрии объекта.

Соблюдение этих принципов позволяет при сравнительно небольших затратах машинного времени добиться высокой относительной точности вычислений.

Итак, в результате аппроксимации объект заменяется совокупностью M одинаковых кубических элементов, имеющих объем V . Решение интегрального уравнения (13.13) сводится к решению системы $3M$ линейных алгебраических уравнений или M векторных уравнений. Для k -го элемента соответствующее векторное уравнение запишется в виде:

$$\vec{I}(a_k) = \frac{3}{3 + \kappa(a_k)} \left(\vec{I}_0(a_k) + \frac{\kappa(a_k)V}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_3(a_n, a_k) \vec{I}(a_n) \right). \quad (14.1)$$

Для двумерных объектов при площади поперечного сечения каждого из квадратных элементов, равной S , интегральное уравнение (13.14) сведется к системе $2M$ линейных алгебраических уравнений или M векторных уравнений. Для k -го элемента соответствующее векторное уравнение может быть представлено следующим образом:

$$\vec{I}(a_k) = \frac{2}{2 + \kappa(a_k)} \left(\vec{I}_0(a_k) + \frac{\kappa(a_k)S}{4\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_2(a_n, a_k) \vec{I}(a_n) \right). \quad (14.2)$$

Как было отмечено выше, решение систем прямыми методами - не экономично, поскольку требует большого объема оперативной памяти применяемой ЭВМ. Более эффективно применение метода последовательных приближений. При этом решение системы уравнений типа (14.1) или (14.2) ищется в виде ряда:

$$\vec{I}(a_k) = \vec{I}_1(a_k) + \vec{I}_2(a_k) + \dots + \vec{I}_m(a_k) + \dots, \quad (14.3)$$

причем в качестве начального приближения для трехмерных тел принимается

$$\vec{I}_1(a_k) = \frac{3\vec{I}_0(a_k)}{3 + \kappa(a_k)}, \quad (14.4)$$

а для двумерных -

$$\vec{I}_1(a_k) = \frac{2\vec{I}_0(a_k)}{2 + \kappa(a_k)}. \quad (14.5)$$

При расчете начального приближения, как следует из (13.3), учитывается неоднородность магнитных свойств изучаемого объекта, а для методов искусственного подмагничивания также неоднородность первичного намагничивающего поля.

Последующие члены ряда вычисляются по рекуррентным формулам, то есть m -ый член ряда для k -ого элемента рассчитывается по $(m-1)$ -ым членам ряда для всех элементов, исключая k -ый. Для трехмерных объектов, как следует из (14.1), рекуррентная формула имеет вид:

$$\vec{I}_m(a_k) = \frac{3\kappa(a_k)V}{4\pi[3 + \kappa(a_k)]} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_3(a_n, a_k) \vec{I}_{m-1}(a_n), \quad (14.6)$$

а для двумерных -

$$\vec{I}_m(a_k) = \frac{\kappa(a_k)S}{2\pi[2 + \kappa(a_k)]} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M D_2(a_n, a_k) \vec{I}_{m-1}(a_n). \quad (14.7)$$

На каждом этапе элементы матриц D_2 и D_3 перевычисляются по формулам для цилиндра и шара с учетом указанных поправок для соприкасающихся элементов. Обратим еще раз внимание на то, что данные матрицы - симметричны, а сумма их диагональных элементов равна нулю. В связи с этим для матрицы D_3 независимо вычисляются не 9, а только 5 элементов. Для матрицы D_2 рассчитываются независимо лишь 2 элемента. Вычисления по рекуррентным формулам прерываются на m -ом приближении - тогда, когда достигнута наперед заданная точность ε :

$$\max_k |\vec{I}_m(a_k)| < \varepsilon. \quad (14.8)$$

§ 15. ПРОЦЕДУРА УЧЕТА ПОПАРНОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ

Важное значение при численном решении интегральных уравнений для намагниченности имеет процедура учета попарного взаимовлияния элементов аппроксимирующей конструкции. Во-первых, при проведении расчетов на ЭВМ приходится обрывать итерационный процесс на m -ом приближении. Для учета

($m+1$)-го и последующих приближений может быть применена данная процедура. Во-вторых, попарное взаимовлияние может стать основой экспресс-методики учета размагничивания сильномагнитных объектов, если их магнитная восприимчивость не превышает 1 СИ. При этом экспресс-методика, несмотря на сравнительную простоту, оказывается гораздо более эффективной, нежели часто применяющийся прием учета размагничивания, заключающийся в учете всего одной итерации при решении исходного интегрального уравнения.

Пусть объект состоит всего из двух элементов, центры которых расположены в точках \mathbf{a}_k и \mathbf{a}_n . Обозначим для общности рассмотрения двумерных и трехмерных задач коэффициенты перед знаками сумм в формулах (14.6) и (14.7) через \mathbf{K} . Тогда система двух векторных уравнений для двух элементов может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}\vec{I}(a_k) &= \vec{I}_0(a_k) + K(a_k) D(a_n, a_k) \vec{I}(a_n), \\ \vec{I}(a_n) &= \vec{I}_0(a_n) + K(a_n) D(a_n, a_k) \vec{I}(a_k).\end{aligned}\quad (15.1)$$

Данная система легко решается, в результате чего получим:

$$\begin{aligned}\vec{I}(a_k) &= [E - K(a_k) K(a_n) D^2(a_n, a_k)]^{-1} [\vec{I}_0(a_k) + K(a_k) D(a_n, a_k) \vec{I}_0(a_n)], \\ \vec{I}(a_n) &= [E - K(a_k) K(a_n) D^2(a_n, a_k)]^{-1} [\vec{I}_0(a_n) + K(a_n) D(a_n, a_k) \vec{I}_0(a_k)],\end{aligned}\quad (15.2)$$

где показатель степени указывает на матрицу, обратную к той, которая в скобках.

Процедура учета попарного взаимовлияния состоит в суммировании поправок к исходным намагниченностям, полученным при взаимодействии каждого из элементов со всеми остальными. В качестве исходных могут быть приняты как \mathbf{I}_0 , так и \mathbf{I}_m , полученные после m -ого этапа итерационных вычислений. Вычислительную формулу для расчета вектора поправок при использовании в качестве исходных намагниченностей \mathbf{I}_m удобно представить в таком виде:

$$\Delta \vec{I}(a_k) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^M \{ [A(a_n, a_k) \vec{I}_m(a_k) + B(a_n, a_k) \vec{I}_m(a_n)] \}, \quad (15.3)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} - матрицы, элементы которых вычисляются по явным формулам. Чтобы упростить эти формулы, введем в трехмерном случае обозначения: пусть L - расстояние между точками \mathbf{a}_n и \mathbf{a}_k ,

$$Q(a_k) = \frac{3\kappa(a_k)V}{4\pi L^3 [3 + \kappa(a_k)]}, \quad (15.4)$$

$$Q(a_n) = \frac{3\kappa(a_n)V}{4\pi L^3 [3 + \kappa(a_n)]}, \quad (15.5)$$

$$F_1 = \frac{1}{1 - Q(a_k)Q(a_n)}, \quad (15.6)$$

$$F_2 = \frac{1}{1 - 4Q(a_k)Q(a_n)}. \quad (15.7)$$

Тогда

$$\mathbf{A}(a_n, a_k) = \mathbf{A}(a_k, a_n) = (F_2 - F_1) \mathbf{C}_3(a_n, a_k) + F_1 \mathbf{E}, \quad (15.8)$$

$$\mathbf{B}(a_n, a_k) = \mathbf{Q}(a_k) [(2F_2 + F_1) \mathbf{C}_3(a_n, a_k) - F_1 \mathbf{E}], \quad (15.9)$$

где элементы матрицы $\mathbf{C}_3(a_n, a_k)$ определяются соотношением

$$c_{ij} = \frac{1}{L^2} [x_i(a_n) - x_i(a_k)][x_j(a_n) - x_j(a_k)], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (15.10)$$

Если объект однороден, то $\mathbf{B}(a_n, a_k) = \mathbf{B}(a_k, a_n)$, что упрощает вычисления. Отметим также, что в случае элементов, соприкасающихся гранями, $\mathbf{Q}(a_k)$ должны вычисляться не по формулам для эквивалентного шара, а непосредственно по формулам для куба. Для простоты, пользуясь данными таблицы 2, можно записать:

$$Q(a_k) = \frac{0,2021729 \kappa(a_k)}{3 + \kappa(a_k)}. \quad (15.11)$$

В двумерном случае также несложно получить явные выражения для элементов матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} . Если обозначить

$$Q(a_k) = \frac{\kappa(a_k)S}{\pi L^2 [2 + \kappa(a_k)]}, \quad (15.12)$$

$$Q(a_n) = \frac{\kappa(a_n)S}{\pi L^2 [2 + \kappa(a_n)]}, \quad (15.13)$$

$$F = \frac{1}{1 - Q(a_k)Q(a_n)}, \quad (15.14)$$

то

$$\mathbf{A}(a_n, a_k) = \mathbf{A}(a_k, a_n) = \mathbf{F}\mathbf{E}, \quad (15.15)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_k) = \mathbf{FQ}(\mathbf{a}_k) [2\mathbf{C}_2(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_k) - \mathbf{E}], \quad (15.16)$$

где элементы матрицы $\mathbf{C}_2(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_k)$ вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \frac{1}{L^2} [x_i(\mathbf{a}_n) - x_i(\mathbf{a}_k)][x_j(\mathbf{a}_n) - x_j(\mathbf{a}_k)], \quad i, j = 1, 2. \quad (15.17)$$

Для соприкасающихся сторонами квадратных элементов, аналогично -

$$Q(\mathbf{a}_k) = \frac{0,2951674 \kappa(\mathbf{a}_k)}{2 + \kappa(\mathbf{a}_k)}. \quad (15.18)$$

Таким образом, процедура учета попарного взаимовлияния элементов с намагниченностями, полученными на m -ой итерации решения интегрального уравнения, дает возможность вычислять эффективную намагниченность элементов не по формуле (14.3), а в соответствии со следующим выражением:

$$\vec{I}(\mathbf{a}_k) = \vec{I}_1(\mathbf{a}_k) + \vec{I}_2(\mathbf{a}_k) + \dots + \vec{I}_m(\mathbf{a}_k) + \Delta\vec{I}(\mathbf{a}_k), \quad (15.19)$$

где $\Delta\vec{I}(\mathbf{a}_k)$ - поправка, определяемая соотношением (15.3). Применение процедуры учета попарного взаимовлияния значительно повышает экономичность алгоритма решения прямой задачи магниторастворения с учетом размагничивания, поскольку дает возможность сократить число итераций, требуемых для достижения заданной точности. В случае, когда магнитная восприимчивость тела не очень велика, рассматриваемая процедура может быть применена непосредственно после вычисления начального приближения. Это означает, что эффективная намагниченность каждого из элементов определяется не по формуле (15.19), а по более простой:

$$\vec{I}(\mathbf{a}_k) = \vec{I}_1(\mathbf{a}_k) + \Delta\vec{I}(\mathbf{a}_k), \quad (15.20)$$

то есть при полном отсутствии итерационных вычислений по рекуррентным соотношениям. Этот прием является сутью экспресс-методики учета размагничивания, показавшей высокую эффективность. Если магнитная восприимчивость объекта не превышает 1 СИ, то экспресс-методика позволяет определить его эффективную намагниченность с относительной погрешностью, не превышающей нескольких процентов от ее среднего для данного объекта значения [3]. Это значит, что по сравнению с упомянутым приемом учета всего одной итерации при решении интегрального уравнения, экспресс-методика при практически том же объеме вычислений дает гораздо большую точность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебном пособии рассмотрено решение прямой задачи гравirazведки и магниторазведки для основных моделей, применяемых при аппроксимации разнообразных геологических объектов. Умение решать такие задачи является фундаментальной основой подготовки геофизика к интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. На базе полученных знаний можно приступать к изучению особенностей обратных задач гравirazведки и магниторазведки. В большинстве методов интерпретации применяются рассмотренные формулы и алгоритмы. Так, последовательное упорядоченное решение прямых задач лежит в основе одного из ведущих методов интерпретации - метода подбора.

Важнейшую роль в современной геофизике играет физико-геологическое моделирование изучаемых объектов. С его помощью проверяют целесообразность применения того или иного геофизического метода в общем комплексе геолого-геофизических работ. С его же помощью оценивают результаты проведенных геологических исследований. Например, в результате разведки рудных месторождений их запасы геометризуются в недрах. Геологи-разведчики, применяя весь арсенал геологических, геофизических, геохимических и горных работ, определяют геометрию рудных тел и распределение в них полезных минералов. Качество проведенных работ можно проверить с помощью моделирования. Решая прямую задачу и сравнивая вычисленное аномальное поле с наблюдаемым, можно установить, насколько разведанный объект соответствует реальному. Если поля совпадают с достаточной точностью, то разведка проведена качественно. Значительные различия в полях указывают на возможные пропущенные рудные тела, особенно на флангах месторождения и на больших глубинах. Это побуждает к уточнению представлений о месторождении, к проведению дополнительных исследований. Роль гравirazведки и магниторазведки в моделировании особо велика в связи с относительной простотой вычисления этих полей для весьма сложных объектов.

Естественно, при ограниченном объеме учебного пособия за его рамками остались многие вопросы, связанные с решением прямых задач. Так, остались нерассмотренными модели многоугольников и многогранников с полиномиальным распределением плотности и намагниченности; модели, применяемые при решении

региональных и глобальных задач, то есть увязанные со сферичностью планет, и многое другое. Для изучения этих проблем читатель может обратиться к специальной литературе, в том числе к той, которая приведена в списке в конце данного пособия.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Аналитические и синтетические процедуры интерпретации.
2. Основные упрощения, применяемые при составлении моделей.
3. Модели интерпретируемых полей.
4. Потенциал силы тяжести трехмерных тел.
5. Компоненты гравитационного поля трехмерных тел.
6. Магнитные аномалии полупространства.
7. Скалярный магнитный потенциал.
8. Потенциал однородно намагниченного шара.
9. Потенциал трехмерного намагниченного объекта.
10. Потенциал двумерного намагниченного объекта.
11. Соотношение Пуассона между гравитационным и магнитным потенциалами.
12. Эффект размагничивания тел в собственном аномальном поле.
13. Особенности размагничивания эллипсоидов.
14. Применимость интегральных формул для намагниченных объектов.
15. Эквивалентные простые слои фиктивных магнитных масс.
16. Комплексные характеристики двумерных полей.
17. Соотношение Пуассона в комплексной форме.
18. Теорема вращения для магнитного поля.
19. Теоремы линейных преобразований двумерных полей.
20. Представление комплексных характеристик полей в виде интегралов по площади поперечного сечения.
21. Представление комплексных характеристик полей в виде интегралов типа Коши.
22. Аномальные поля эллиптических цилиндров.
23. Аномальные поля пластинки.
24. Аномальные поля многоугольных цилиндров.
25. Аномальные поля круговых многоугольных цилиндров.

26. Матрица Гессе вторых производных гравитационного потенциала.
27. Соотношение между магнитной индукцией и гравитационным потенциалом однородных трехмерных тел.
28. Магнитные аномалии шара.
29. Аномальные поля материального стержня.
30. Гравитационные аномалии многоугольной горизонтальной пластинки.
31. Аномальные поля однородного многогранника.
32. Интегральные уравнения для намагниченности сильномагнитных объектов.
33. Сведение решения интегрального уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений.
34. Итерационный метод решения интегрального уравнения для намагниченности.
35. Процедура учета попарного взаимовлияния при решении интегрального уравнения для намагниченности.
36. Экспресс-методика учета размагничивания.
37. Моделирование геологических объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М: Наука. 1987. 336 с.
2. Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных аномалий. М: МГРИ. 1982. 92 с.
3. Блох Ю.И. Учет размагничивания при решении прямой задачи магниторазведки для трехмерных изотропных объектов // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. № 5. с. 113-117.
4. Блох Ю.И. Решение прямой задачи магниторазведки для трехмерных анизотропных геологических объектов с учетом размагничивания // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. № 12. с. 49-55.
5. Голиздра Г.Я. Основные методы решения прямой задачи гравирозведки на ЭВМ. Обзор регион., разв. и промысл. геофизики. М: ВИЭМС. 1977. 98 с.
6. Гравирозведка. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 607 с.
7. Кобрунов А.И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред. Киев: УМК ВО. 1989. 100 с.

8. Кравцов Г.Г. Поле притяжения многогранников переменной плотности // Записки ЛГУ. 1978. т. 76. с. 8-17.
9. Кравцов Г.Г. Аналогии в аналитическом описании поля притяжения прямолинейного материального отрезка, многоугольной материальной пластинки и объемных масс многогранника // Записки ЛГУ. 1987. т. 113. с. 97-107.
10. Магниторазведка. Справочник геофизика. М: Недра. 1990. 470 с.
11. Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотько А.Н. Методика решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах. Киев: Наукова думка. 1986. 112 с.
12. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь: ПГУ. 1984. 72 с.
13. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 4. с. 45-67.
14. Страхов В.Н., Романюк Т.В., Фролова Н.К. Методы решения прямых задач гравиметрии, используемые при моделировании глобальных и региональных гравитационных аномалий // Новые методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. М: ИФЗ АН СССР. 1989. с. 118-235.
15. Цирульский А.В. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей. Л: ЛГИ. 1989. 96 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
Введение	3
Глава 1. Физико-математические основы решения прямых задач	3
§ 1. Интерпретация аномалий и прямые задачи	3
§ 2. Основы решения прямой задачи гравirazведки	8
§ 3. Основы решения прямой задачи магниторазведки	11
§ 4. Эффект размагничивания и применимость интегральных соотношений для решения прямой задачи магниторазведки	20
§ 5. Эквивалентные простые слои при решении прямой задачи магниторазведки	25
Глава 2. Решение прямых задач для двумерных моделей	28

§ 6. Комплексные характеристики двумерных гравитационных и магнитных полей	28
§ 7. Представление аномальных полей интегралами типа Коши.	33
§ 8. Аномальные поля типовых двумерных моделей.	37
Глава 3. Решение прямых задач для трехмерных моделей	43
§ 9. Гравитационные и магнитные аномалии трехмерных тел	43
§ 10. Аномальные поля однородного материального стержня	47
§ 11. Гравитационные аномалии многоугольной горизонтальной пластинки . .	49
§ 12. Аномальные поля произвольного многогранника	55
Глава 4. Решение прямой задачи магниторазведки для сильномагнитных геологических объектов.	59
§ 13. Интегральные уравнения для намагниченности.	59
§ 14. Численное решение интегральных уравнений для намагниченности . . .	63
§ 15. Процедура учета попарного взаимовлияния элементов	67
Заключение	71
Вопросы для повторения	72
Литература	73