

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Серго Орджоникидзе

(МГРИ)



А. Д. КАРИНСКИЙ

ПРАКТИКУМ ПО "ТЕОРИИ ПОЛЯ"

Москва, 2022 г.

© Каринский А. Д., 2022

УДК 550.83.01(0.75)

Каринский Александр Дмитриевич. Практикум по "Теории поля".

2022. – 104 с.

Рассмотрены примеры решения прямых задач для статических полей, стационарного электрического поля и магнитного поля постоянного электрического тока. Решению задач предшествуют необходимые пояснения. Ещё несколько примеров прямых задач теории статических полей и стационарного электрического поля приведены в учебном пособии [13].

В связи с произошедшим некоторое время назад во МГРИ "сокращением" курса "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике" (и с переименованием этого курса в "Теорию поля") сейчас нет возможности рассмотреть на практических занятиях со студентами бывшего Геофизического факультета МГРИ примеры решения многих прямых задач, в частности – задач теории переменного электромагнитного поля. Но студенты, желающие получить хотя бы элементы нормального высшего геофизического образования, могут найти такие примеры в главе седьмой части IV электронной версии учебника "Теория полей,..." [7], а также в [18]. Кроме того, примеры решения прямых задач теории распространения упругих колебаний есть в главе девятой части V электронной версии учебника "Теория полей,..." [8] и в учебном пособии [15].

Р е ц е н з е н т:

Новиков Пётр Вячеславович, кандидат технических наук, и. о. зав кафедрой Геофизики МГРИ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Занятие 1	4
ВВЕДЕНИЕ	4
Системы координат	5
Коэффициенты Ламэ	10
Задания	11
Пространственные производные в ортогональных системах координат	11
Симметрия поля	13
СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ	17
Основные понятия и формулы	17
Занятие 2	23
Поле точечной массы	23
Задание	25
Занятие 3	25
Пример решения обратной задачи	25
Занятие 4	29
Поле диполя	29
Задание	33
Занятие 5	34
Поле линейных масс	34
Поле отрезка прямой	34
Поле "прямой"	36
Занятие 6	37
Поле поверхностных масс	37
Поле на оси «круга»	38
Поле «плоскости»	41
Занятие 7	42
Поле "сферической поверхности"	42
Поле объёмных масс	45
Поле "шара"	46
Занятие 8	48
Задания	49
Поле пласта	49
Задания	51
СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ;	52
СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ	52
Пояснения	52
Основные уравнения. Прямая задача	52
Поле у особой поверхности	55
О теореме единственности	57
Этапы решения задачи	59
Занятие 9	60
Проводящий шар в однородном электростатическом поле	61
Занятие 10	65

Сферический "объект" в однородном первичном поле.....	65
Занятие 11.....	70
Цилиндрический "объект" в однородном первичном поле.....	70
Занятие 12.....	76
Шаровой и точечный токовый электрод в безграничной однородной среде.....	76
Поле точечного токового электрода в присутствии непроводящего полупространства.....	79
Занятие 13.....	83
Поле точечного токового электрода в присутствии плоской границы.....	83
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА... 88	
Занятие 14.....	88
Магнитное поле линейных токов.....	88
Магнитное поле прямого отрезка линейного тока.....	89
Магнитное поле в центре "квадратной петли".....	91
К векторному потенциалу магнитного поля тока.....	92
Занятие 15.....	93
Магнитное поле объёмных токов.....	93
Магнитное поле тока по неограниченному (по "высоте") круговому цилиндру.....	95
Магнитное поле тока в модели "коаксиальный кабель".....	96
Занятие 16.....	98
Магнитное поле тока эмиссии точечного электрода, расположенного на поверхности однородного проводящего полупространства.....	98
ЛИТЕРАТУРА.....	103

Занятие 1 ВВЕДЕНИЕ

Скалярную величину (скаляр) T характеризует число (его абсолютная величина и знак), а также размерность. Векторную величину (вектор) \vec{M} определяют абсолютная величина (модуль вектора) $M=|\vec{M}|$, размерность и направление, либо (в реальном для нас трёхмерном пространстве) три компоненты вектора в системе координат. При "геометрическом изображении" такой величины \vec{M} её удобно представить направленным отрезком (рис. 1).

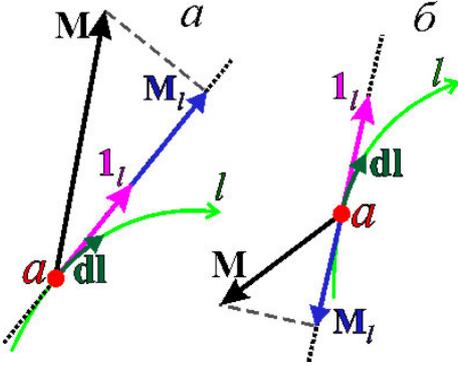


Рис. 1.

Векторная компонента \vec{M}_l вектора \vec{M} по направлению (линии) l и единичный вектор \vec{i}_l , касательный к l

Скаляр T или вектор \vec{M} образуют *поле* в области пространства V , если каждой точке a этой области соответствует некоторое значение T или \vec{M} .

Различают скалярную (M_l) и векторную (\vec{M}_l) компоненты вектора \vec{M} по направлению (по линии) l . Эти компоненты определяют выражения:

$$M_l = M \cdot \cos(\vec{M}, \vec{i}_l) = (\vec{M} \vec{i}_l), \quad \vec{M}_l = \vec{i}_l \cdot M_l, \quad (1)$$

где \vec{i}_l – безразмерный единичный вектор (орт), направленный по касательной к линии l , а $(\vec{M} \vec{i}_l)$ – скалярное произведение векторов \vec{M} и \vec{i}_l . Единичный вектор \vec{i}_M по направлению вектора \vec{M} равен отношению \vec{M}/M . В соответствии с (1) компоненту \vec{M}_l вектора \vec{M} можно рассматривать, как проекцию вектора \vec{M} на орт \vec{i}_l . Скалярная компонента M_l положительна если угол (\vec{M}, \vec{i}_l) – острый (рис. 1, а) или равен нулю. Компонента M_l отрицательна, если угол (\vec{M}, \vec{i}_l) – тупой (рис. 1, б) или равен π (рад). Если угол $(\vec{M}, \vec{i}_l) = \pi/2$ (рад), то компонента $M_l = 0$, а если этот угол равен нулю, то компонента M_l равна модулю M вектора \vec{M} .

При заданном направлении линии l можно полагать направленным также каждый элемент dl этой линии. Такому направленному элементарному отрезку dl линии l соответствует вектор \vec{dl} , бесконечно малый по абсолютной величине, равной длине dl (рис. 1).

Непрерывность поля и её нарушение. Скалярное поле T – непрерывно в точке a , если бесконечно малому перемещению точки a по любому направлению соответствует бесконечно малое изменение величины T . Векторное поле \vec{M} непрерывно в точке a , если в этой точке непрерывна компонента M_l по любой (гладкой) линии l . В противном случае поле (T или \vec{M}) терпит разрыв в точке a и эта точка называется особой (a_{oc} , q_{oc}). Такие

точки могут образовывать особые линии l_{oc} или особые поверхности S_{oc} поля T или \vec{M} .

Системы координат

Положение точки a в пространстве можно определить следующим образом.

1) Радиус - вектором \vec{L}_{Oa} , направленным в точку a из некоторой фиксированной точки O (рис. 2). Абсолютная величина радиус - вектора $|\vec{L}_{Oa}|=L_{Oa}$ равна расстоянию между точками O и a .

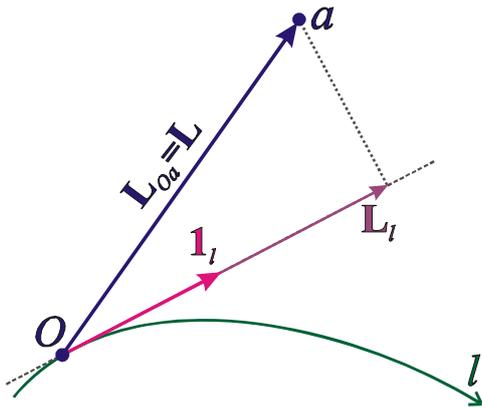


Рис. 2.

Радиус - вектор \vec{L}_{Oa}

2) Тремя числами: ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координатами точки a в выбранной системе координат. В этом случае положение точки является функцией её координат: $a=a(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Решение прямых задач (определение поля различных его источников) и расчёты полей удобно проводить в системах координат. Для определения положения точек наблюдения a и полей $T(a), \vec{M}(a)$ в этих точках в (реальном для нас) трёхмерном

пространстве мы пользуемся системами координат с тремя координатами: ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Пусть в такой системе координат начинает увеличиваться координата ξ_1 , а координаты ξ_2, ξ_3 остаются неизменными. Тогда точка a будет перемещаться по координатной линии l_1 . Аналогичным образом при увеличении координат ξ_2 , либо ξ_3 и при фиксированных значениях других координат точка a будет перемещаться по координатной линии l_2 , либо по координатной линии l_3 соответственно (рис. 3, а).

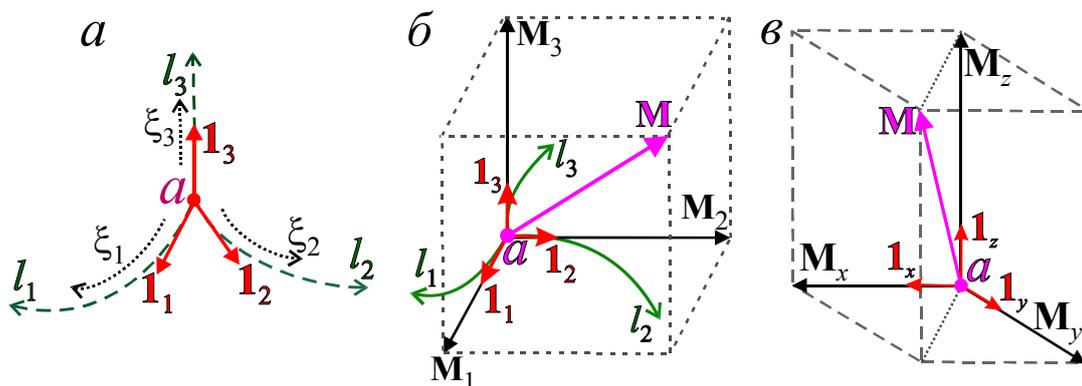


Рис. 3.

Системы координат

В дальнейшем будем пользоваться тремя системами правых ортогональных координат: декартовой, цилиндрической и сферической. Термин «правые» означает то, что (при определенной последовательности трёх координат) направления l_1, l_2, l_3 образуют правую тройку (рис. 3). Если первое

из этих направлений поворачивать на наименьший угол в сторону второго, то перемещение правого винта покажет третье направление. В ортогональных системах координат в любой точке направленные по касательным к координатным линиям l_1, l_2, l_3 орты $\vec{\mathbf{i}}_1, \vec{\mathbf{i}}_2, \vec{\mathbf{i}}_3$ взаимно ортогональны (рис. 3, б).

Координатные поверхности S_1, S_2, S_3 – это, соответственно, поверхности $\xi_1 = \text{const}, \xi_2 = \text{const}, \xi_3 = \text{const}$. На координатной поверхности S_1 лежат координатные линии l_2, l_3 и т. д. Бесконечно малый участок координатной поверхности, ограниченный двумя парами расположенных на бесконечно малых расстояниях dl координатных линий, называют координатным элементом координатной поверхности или координатной площадкой. Такой элемент dS_k координатной поверхности S_k ограничивают пары координатных линий l_i и l_j ($i, j, k = 1, 2, 3$). Например, границами координатной площадки dS_3 являются пары координатных линий l_1, l_2 . По нормали n к такой площадке направлен орт $\vec{\mathbf{i}}_3$. Площади координатных площадок: $dS_1 = dl_2 \cdot dl_3, dS_2 = dl_3 \cdot dl_1, dS_3 = dl_1 \cdot dl_2$.

В ортогональных системах координатный элемент объёма dV – прямоугольный параллелепипед с рёбрами dl_1, dl_2, dl_3 . Объём координатного элемента объёма $dV = dl_1 \cdot dl_2 \cdot dl_3$.

Для определения скалярного поля T в системе координат надо выразить поле как функцию координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 : $T = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В частных случаях при соответствующем выборе системы координат поле T зависит не от трёх координат, а от двух или от одной координаты.

На рис. 3, б видно, что в ортогональных координатах вектор $\vec{\mathbf{M}}$ равен сумме трёх векторных компонент $\vec{\mathbf{M}}_1, \vec{\mathbf{M}}_2, \vec{\mathbf{M}}_3$. То есть для того, чтобы определить векторное поле $\vec{\mathbf{M}}$ в ортогональных координатах, надо представить вектор $\vec{\mathbf{M}}$ в виде суммы:

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_1 + \vec{\mathbf{M}}_2 + \vec{\mathbf{M}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \cdot M_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 \cdot M_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 \cdot M_3, \quad (2)$$

где, в соответствии с выражениями (1), $\vec{\mathbf{M}}_i = \vec{\mathbf{i}}_i \cdot M_i$ ($i = 1, 2, 3$), M_i – скалярные компоненты, а $\vec{\mathbf{M}}_i$ – векторные компоненты вектора $\vec{\mathbf{M}}$.

По скалярным компонентам векторного поля $\vec{\mathbf{M}}$ в ортогональных координатах можно, например, определить абсолютную величину $M = |\vec{\mathbf{M}}|$ вектора $\vec{\mathbf{M}}$:

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}.$$

При решении прямых задач теории векторного поля скалярные компоненты $M_{1,2,3}$ надо определить как функции координат $\xi_{1,2,3}$: $M_1 = M_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), M_2 = M_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), M_3 = M_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Некоторые из компонент поля $\vec{\mathbf{M}}$ могут быть равны нулю, а ненулевые компоненты $\vec{\mathbf{M}}$ могут зависеть не от трёх координат, а от двух или от одной координаты. В соответствии с выражениями (1), (2), если скалярная компонента M_i вектора $\vec{\mathbf{M}}$ положительна, то векторная компонента $\vec{\mathbf{M}}_i$ направлена как вектор $\vec{\mathbf{i}}_i$. Если компонента M_i отрицательна, то направления векторов $\vec{\mathbf{M}}_i$ и $\vec{\mathbf{i}}_i$ противоположны (см. рис. 1, а, б).

Декартову систему координат (рис. 4, а)

образуют три взаимно ортогональные оси (направленные прямые) X, Y, Z пересекающиеся в точке O – начале координат. Координатам x, y, z точки a соответствуют проекции этой точки на оси координат X, Y, Z . Пределы изменения и размерности (единицы измерения, в этом случае – м (метры)) декартовых координат: $-\infty < x \text{ (м)} < \infty, -\infty < y \text{ (м)} < \infty, -\infty < z \text{ (м)} < \infty$. Вектор \vec{M} (в общем случае) равен сумме трёх векторных компонент: $\vec{M} = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = \vec{1}_x \cdot M_x + \vec{1}_y \cdot M_y + \vec{1}_z \cdot M_z$ (рис. 3, в).

Координатные линии l_x, l_y, l_z – прямые, параллельные соответствующим осям X, Y, Z . Орты $\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$ всюду направлены по линиям l_x, l_y, l_z и, соответственно, в любой точке параллельны осям X, Y, Z .

Координатные поверхности S_x, S_y, S_z – плоскости $x = \text{const}, y = \text{const}, z = \text{const}$.

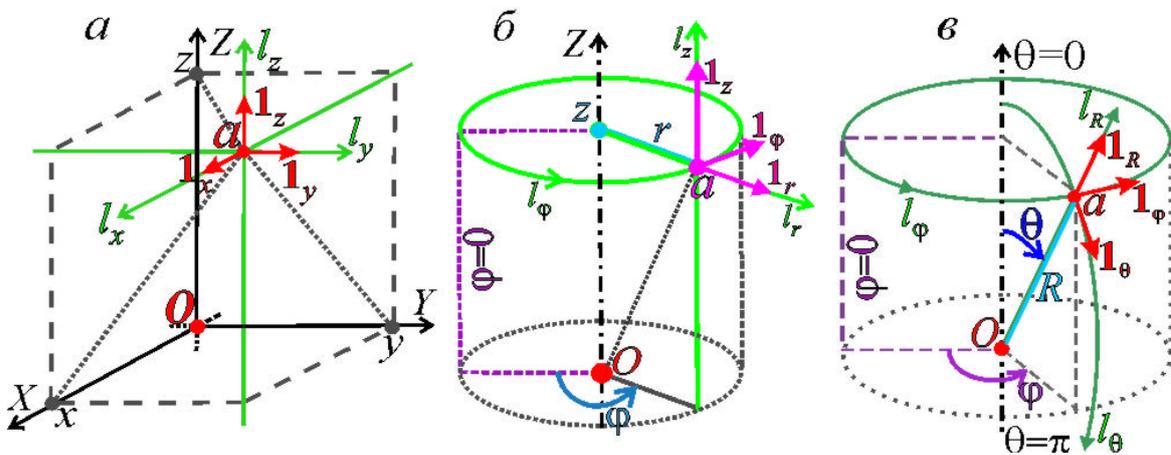


Рис. 4.

Декартова (а), цилиндрическая (б) и сферическая (в) системы координат

Приведенные ниже в этом разделе выражения могут помочь студентам РФ или ЗРФ МГРИ при выполнении ими некоторых вариантов курсовых проектов по "Теории поля".

Допустим, что скалярное поле $T(a)$ определено нами в декартовых координатах x', y, z' с осями X', Y, Z' , то есть получено выражение $T = T(x', y, z')$. А теперь нам надо получить выражение $T = T(x, y, z)$ в "новой" системе координат x, y, z с осями X, Y, Z . Причём эти две системы координат имеют общие ось Y и начало O . Рассмотрим подробнее случай, когда оси X, Z

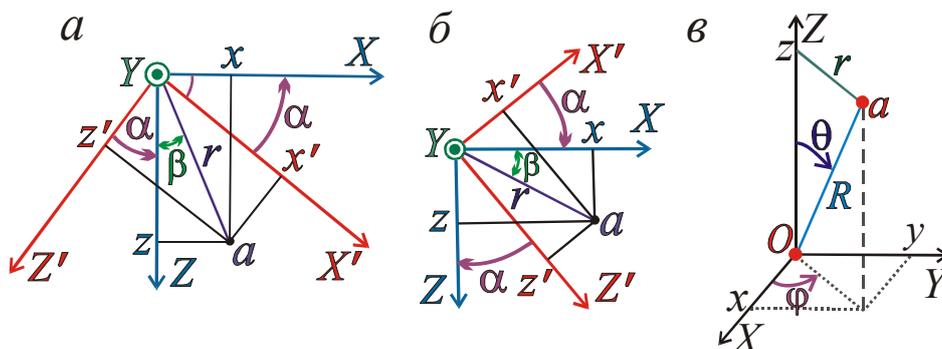


Рис. 5.

К преобразованию скалярного поля T при повороте двух осей декартовых координат (а, б). «Совмещённая» система координат (в)

"получены" путём поворота осей X', Z' на угол α по часовой стрелке, если смотреть по направлению оси Y . Иными словами, направление оси Y и направление поворота осей образуют правовинтовую систему. Обозначим буквой r кратчайшее расстояние от оси Y до точки наблюдения a .

Как видно на рис. 5, а, при указанных выше условиях

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \sin \beta, & z &= r \cdot \cos \beta, \\x' &= r \cdot \sin (\alpha + \beta) = r \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta), \\z' &= r \cdot \cos (\alpha + \beta) = r \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta).\end{aligned}$$

Из этих равенств не сложно получить выражения

$$x' = x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha, \quad z' = z \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha,$$

пользуясь которыми можем выразить координаты x', z' через x, z и угол α .

Задание. На рис. 5, б показаны оси X, Y, Z, X', Z' и координаты x, z, x', z' . В этом случае направление оси Y и направление поворота осей образуют левовинтовую систему. Надо выразить координаты x', z' через x, z и α .

Ответ: $x' = x \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha, \quad z' = z \cdot \cos \alpha + x \cdot \sin \alpha.$

Цилиндрическая система координат (рис. 4, б).

Координаты в этой системе: $\xi_1 = r, \xi_2 = \varphi, \xi_3 = z$. Чтобы ввести эту систему координат, надо определить: положение в пространстве оси Z , начало координат O на этой оси и начало отсчета координаты φ ($\varphi = 0$) – полуплоскости, ограниченной осью Z . Координату z точки a (как и в декартовых координатах) определяет проекция точки a на ось Z ; координата r – расстояние от точки a до оси Z ; координата φ угол между ограниченной осью Z полуплоскостью, проходящей через точку a , и полуплоскостью $\varphi = 0$. В правой системе координат направления отсчета координаты φ и оси Z образуют правовинтовую систему. Координата r – неотрицательна ($r \geq 0$) и равна нулю на оси Z . Пределы изменения и размерности цилиндрических координат: $0 \leq r(\text{м}) < \infty, -\infty < \varphi(\text{рад}) < \infty, -\infty < z(\text{м}) < \infty.$

Иногда полагают, что в цилиндрической (или в сферической) системе координата φ меняется, например, в пределах от нуля до 2π радиан. Очевидно, что при $-\infty < \varphi < \infty$ поле будет *периодической функцией* координаты φ (с периодом 2π), что часто оказывается удобнее.

Координатные поверхности: $r = \text{const}$ – круговые цилиндрические поверхности с осью Z ; $\varphi = \text{const}$ – полуплоскости, ограниченные осью Z ; $z = \text{const}$ – плоскости, ортогональные оси Z . Координатные линии: l_r – лучи, исходящие из точек на оси Z и ортогональные этой оси; l_φ – окружности с осью Z ; l_z – прямые, параллельные оси Z . Орт $\vec{1}_z$ всюду параллелен оси Z , а направления ортов $\vec{1}_r$ и $\vec{1}_\varphi$ зависят от координаты φ . В плоскости $z = \text{const}$ цилиндрические координаты r и φ идентичны соответствующим полярным координатам на плоскости.

Сферическая система координат (рис. 4, в).

Координаты в этой системе: $\xi_1 = R, \xi_2 = \theta, \xi_3 = \varphi$. Чтобы ввести эту систему координат, надо определить положение в пространстве и направление полярной оси (по этому направлению при $R > 0$ полярный угол $\theta = 0$), выбрать начало

координат O на этой оси и начало отсчета координаты φ – полуплоскости $\varphi=0$, ограниченной полярной осью. Координата R точки a равна расстоянию L_{Oa} от начала координат O до точки a ; координата θ – (полярный) угол между радиус-вектором \vec{L}_{Oa} и направлением полярной оси; (азимутальная) координата φ – угол между ограниченной полярной осью полуплоскостью, проходящей через точку a , и полуплоскостью $\varphi=0$. В правой системе координат направления отсчета координаты φ и полярной оси образуют правовинтовую систему. Координаты R (м) и θ (рад) – неотрицательны. Пределы изменения этих координат: $0 \leq R < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, а пределы изменения координаты φ (рад): $-\infty < \varphi < \infty$.

Координатные поверхности: $R=\text{const}$ – сферические поверхности с центром в начале координат O ; $\theta=\text{const}$ – круговые конические поверхности с вершинами в точке O , осью которых является полярная ось; $\varphi=\text{const}$ – полуплоскости, ограниченные полярной осью. Координатные линии: l_R – лучи, исходящие из начала координат O ; l_θ – полуокружности с центром в точке O , "опирающиеся" на полярную ось; l_φ – окружности, осью которых является полярная ось. Направления ортов \vec{I}_R и \vec{I}_θ зависят от координат θ и φ , а направление орта \vec{I}_φ – от координаты φ .

Иногда бывает удобно применить «совмещённую» систему координат, включающую системы x, y, z ; r, φ, z ; R, θ, φ или две из них. В этом случае обычно предполагают, что системы имеют общее начало O , полярную ось, совпадающую с осью Z , и начало отсчета координаты φ в полуплоскости $y=0, x>0$ (рис. 5, в). В таком случае справедливы равенства:

$$x = r \cdot \cos \varphi = R \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi = R \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \quad z = R \cdot \cos \theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R \cdot \sin \theta, \quad \text{tg } \varphi = y / x,$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg\left(\sqrt{x^2 + y^2} / z\right) = \arctg(r/z).$$

Понятно, что координаты в одной системе – взаимно независимы. Но при применении «совмещённой» системы координат это не так. Например, производная

$$\frac{\partial}{\partial x} T(r, \varphi, z) = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r} T(r, \varphi, z), \quad \text{где } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x}.$$

В выбранной системе с координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 скалярное поле T будет определено, если будет известна (найдена, например, нами) зависимость $T=T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. В соответствии с (2) векторное поле

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = \vec{I}_1 \cdot M_1 + \vec{I}_2 \cdot M_2 + \vec{I}_3 \cdot M_3$$

будет определено в системе координат, если будут найдены зависимости его компонент от координат:

$$M_1 = M_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad M_2 = M_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad M_3 = M_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Коэффициенты Ламэ

Коэффициенты Ламэ h_i ($i = 1, 2, 3$) определяют связь между приращением координаты $d\xi_i$ и перемещением dl_i вдоль координатной линии l_i , которое совершает при этом точка (рис. 6, а):

$$h_i = dl_i / d\xi_i; \quad dl_i = h_i \cdot d\xi_i. \quad (3)$$

Определим коэффициенты Ламэ для декартовых, цилиндрических и сферических координат. В этих системах координат существенно различается два типа координатных линий.

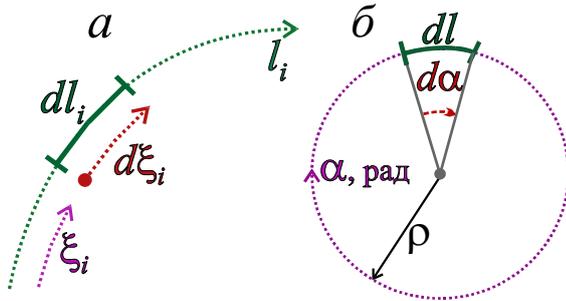


Рис. 6.

К определению коэффициентов Ламэ

1. Линии l_x, l_y, l_z, l_r, l_R – прямые или лучи. Координаты x, y, z, r, R определяют в единицах длины (метрах). Очевидно, что коэффициенты Ламэ для этих координат равны единице, так как путь, проходимый точкой при приращении (увеличении) какой-либо из этих координат, равен величине этого приращения.

2. Линии l_φ в цилиндрической системе координат и линии l_θ, l_φ в сферической системе координат – окружности или полуокружности (см. рис. 4, б, в). Координаты θ и φ определяют в угловых единицах (радианах). Рассмотрим, как связан путь dl проходимый точкой по дуге окружности радиуса ρ , с приращением $d\alpha$ угловой координаты α (рис. 6, б). По определению центральный угол (в радианах) равен отношению длины (ограниченной двумя радиусами) дуги окружности к радиусу этой окружности. Следовательно, $d\alpha = dl/\rho$ или

$$\rho = dl/d\alpha$$

При сравнении этого выражения с определением коэффициента Ламэ (3) видно, что в случае, если координата угловая, а координатная линия – окружность (или полуокружность), коэффициент Ламэ равен радиусу этой окружности. Тогда в цилиндрических координатах $h_\varphi = r$, а в сферических координатах: $h_\theta = R$, $h_\varphi = R \cdot \sin \theta$ (см. рис. 4, б, в).

Итак, в декартовых, цилиндрических и сферических координатах коэффициенты Ламэ h_i определяют следующие выражения:

$\xi_{1,2,3} = x, y, z$	$\xi_{1,2,3} = r, \varphi, z$	$\xi_{1,2,3} = R, \theta, \varphi$
$h_1 = h_x = 1$	$h_1 = h_r = 1$	$h_1 = h_R = 1$
$h_2 = h_y = 1$	$h_2 = h_\varphi = r$	$h_2 = h_\theta = R$
$h_3 = h_z = 1$	$h_3 = h_z = 1$	$h_3 = h_\varphi = R \cdot \sin \theta$

Задания

1). Полагая, что применена показанная на рис. 5, в "совмещённая" система координат, выразить в декартовых координатах x, y, z следующие скалярные поля T , заданные в цилиндрических, либо в сферических координатах.

$$a). T = \frac{C}{\sqrt{r^2 + z^2}}; \quad б). T = \frac{C \cdot \cos \varphi}{r}; \quad в). T = \frac{C}{R}; \quad г). T = \frac{C \cdot \cos \theta}{R^2}, \text{ где } C - \text{ (не}$$

зависящая от координат) константа.

2). Прочитать следующие разделы вплоть до раздела "Занятие 2" и подготовить вопросы преподавателю.

Пространственные производные в ортогональных системах координат

Приведём выражения для пространственных производных $\text{grad } T$, $\text{div } \vec{M}$, $\text{rot } \vec{M}$, $\text{div grad } T = \nabla^2 T$. Подробнее см. [1] - [4].

Пространственные производные определяют характер изменения поля в окрестности данной точки пространства. Первая пространственная производная скалярного поля T – градиент, а первые пространственные производные векторного поля \vec{M} – дивергенция и ротор.

Градиент скалярного поля T ($\text{grad } T$) – вектор, имеющий направление наиболее резкого (интенсивного) возрастания скаляра T в окрестности данной точки и абсолютную величину, равную производной T по этому направлению. Понятно, что вектор $(-\text{grad } T)$ имеет направление наиболее резкого убывания (падения) скаляра T .

Проекция градиента скаляра T на направление l (скалярная компонента вектора $\text{grad } T$ по направлению l):

$$\text{grad}_l T = \frac{\partial T}{\partial l} = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi},$$

где в соответствии с (2) ξ – координата, отсчитываемая по направлению l а, h_ξ – коэффициент Ламэ. Умножая скалярные компоненты $\text{grad } T$ на соответствующие орты $\vec{1}_i$ и суммируя векторные компоненты $\text{grad } T$ по трём взаимно ортогональным направлениям, получаем:

$$\text{grad } T = \frac{\vec{1}_1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \frac{\vec{1}_2}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + \frac{\vec{1}_3}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3}. \quad (3,a)$$

Правую часть равенства (3,a) можно представить, как произведение символического вектора

$$\nabla = \frac{\vec{1}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\vec{1}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\vec{1}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3},$$

называемого «набла», на скаляр T :

$$\text{grad } T = \nabla T.$$

Дивергенция векторного поля \vec{M} ($\text{div } \vec{M}$) в точке a – предел отношения потока вектора \vec{M} через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую

область пространства V , к объёму V этой области при стремлении этого объёма к нулю и стягивании поверхности $S[V]$ к точке a :

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_{S[V]} (\vec{\mathbf{M}} \cdot \vec{dS})}{V}.$$

Следовательно, $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}}(a)$ – скалярное поле, знак которого – тот же, что и знак потока вектора $\vec{\mathbf{M}}$ через предельно малую замкнутую поверхность, окружающую точку a . Если в точке a начинаются или оканчиваются векторные линии l_M поля $\vec{\mathbf{M}}$, то в этой точке соответственно $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} > 0$ или $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} < 0$. Те места (области пространства, точки и т. д.), где $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} \neq 0$, $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} > 0$ и $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} < 0$ называют соответственно источниками, истоками и стоками поля $\vec{\mathbf{M}}$.

Применяя приведенную выше формулу к области V в виде координатного элемента объема $dV = h_1 d\xi_1 \cdot h_2 d\xi_2 \cdot h_3 d\xi_3$, можно получить для $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}}$ выражение (см. [1], стр. 24):

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}} = (\nabla \vec{\mathbf{M}}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (h_2 h_3 M_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 h_1 M_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 M_3) \right], \quad (3,6)$$

которым можно воспользоваться при расчётах $\operatorname{div} \vec{\mathbf{M}}$ в системах координат.

Ротор векторного поля $\vec{\mathbf{M}}$ ($\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}}$) – вектор, скалярную компоненту которого по направлению n определяет выражение

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}}_n = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{l[S]} (\vec{\mathbf{M}} \cdot \vec{dl})}{S}$$

где n – нормаль к S , а поверхность S ограничена контуром $l[S]$, направление обхода, по которому образует правовинтовую систему с направлением нормали n . При $S \rightarrow 0$ замкнутый контур $l[S]$ стягивается к точке a – центру площадки S .

Применяя это выражение к поверхностям S в виде координатных площадок dS_i , можем получить выражения для скалярных компонент $\operatorname{rot}_i \vec{\mathbf{M}}$ ($i = 1, 2, 3$), которыми можем воспользоваться при расчетах $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}}$ в системах координат (см. [1], стр. 20). При этом, например,

$$\operatorname{rot}_1 \vec{\mathbf{M}} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 M_3) - \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_2 M_2) \right].$$

Аналогичный вид имеют выражения для скалярных компонент $\operatorname{rot}_2 \vec{\mathbf{M}}$ и $\operatorname{rot}_3 \vec{\mathbf{M}}$ вектора $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}}$. Так как в ортогональных координатах $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{i}}_1 \operatorname{rot}_1 \vec{\mathbf{M}} + \vec{\mathbf{i}}_2 \operatorname{rot}_2 \vec{\mathbf{M}} + \vec{\mathbf{i}}_3 \operatorname{rot}_3 \vec{\mathbf{M}}$ получаем:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}} = [\nabla \vec{\mathbf{M}}] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \vec{\mathbf{i}}_1 h_1 \left[\frac{\partial (h_3 M_3)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial (h_2 M_2)}{\partial \xi_3} \right] - \right.$$

$$-\vec{\mathbf{i}}_2 h_2 \left[\frac{\partial(h_3 M_3)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(h_1 M_1)}{\partial \xi_3} \right] + \vec{\mathbf{i}}_3 h_3 \left[\frac{\partial(h_2 M_2)}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(h_1 M_1)}{\partial \xi_2} \right] \}. \quad (3, \text{в})$$

Отметим, что при $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ и $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$ поле $\vec{\mathbf{M}}$ называют потенциальным, а при $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$ и $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ – чисто-вихревым или соленоидальным. В случае потенциального поля производная $\text{div } \vec{\mathbf{M}}$ определяет характер изменения поля $\vec{\mathbf{M}}$ по направлению $\vec{\mathbf{M}}$. Если же поле $\vec{\mathbf{M}}$ – чисто вихревое, то производная $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$ зависит от изменений поля $\vec{\mathbf{M}}$ в направлениях, ортогональных направлению $\vec{\mathbf{M}}$. Заметим, что при $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ и $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ поле $\vec{\mathbf{M}}$ иногда называют «лапласовым».

Лапласиан $\nabla^2 T$ скалярного поля T – вторая производная поля T : $\nabla^2 T = (\nabla \nabla T) = \text{div grad } T$. Из выражений (3,а), (3,б) следует, что в ортогональной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3} \right) \right]. \quad (3, \text{г})$$

Для другой второй производной поля T справедливо тождественное равенство:

$$\text{rot grad } T \equiv 0. \quad (3, \text{д})$$

Симметрия поля

Если возбудители поля симметрично расположены относительно плоскости, прямой или точки, то порождаемое этими возбудителями поле будет иметь соответствующую симметрию. Симметричные поля имеют определённые свойства, которые упрощают их расчёты. Рассмотрим виды симметрии поля, и некоторые свойства симметричных полей.

Зеркальная симметрия – симметрия относительно плоскости.

Пусть q' и q'' – две любые точки, симметричные относительно плоскости Π . Скалярное поле T чётно симметрично относительно плоскости Π , если

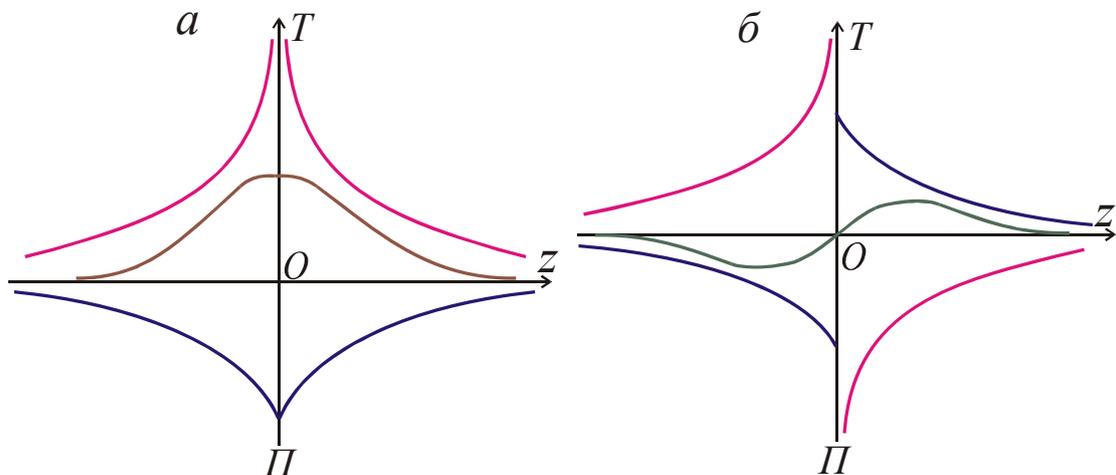


Рис. 7.

Возможные зависимости поля T от z при чётной (а) и нечётной (б) симметрии поля T относительно плоскости $z=0$

$T(q'')=T(q')$ и нечётно симметрично относительно плоскости Π , если $T(q'')=-T(q')$. Если плоскость $z=0$ (декартовых или цилиндрических координат) совпадает с плоскостью симметрии Π , то при чётной симметрии поля T имеем: $T(z)=T(-z)$, т. е. T – чётная функция координаты z (рис. 7, а), а при нечётной симметрии поля T : $T(z)=-T(-z)$ то есть $T(z)$ – нечётная функция координаты z (рис. 7, б). На рис. 7, а видно, что при чётной симметрии поле T на плоскости Π либо непрерывно, либо принимает бесконечно большие значения. На плоскости Π нечётной симметрии (см. рис. 7, б) поле T либо равно нулю, либо терпит разрыв (конечный или бесконечный), равный удвоенному значению T при $z \rightarrow 0$, $z > 0$.

Пусть Π – плоскость симметрии с нормалью $n \parallel Z$ и касательными к Π направлениями τ (направлениями ортов \vec{i}_x, \vec{i}_y , либо $\vec{i}_r, \vec{i}_\varphi$), а q', q'' – точки симметричные относительно этой плоскости. Тогда векторное поле \vec{M} чётно симметрично относительно Π при $M_\tau(q')=M_\tau(q'')$, $M_n(q')=-M_n(q'')$ (рис. 8, а) и нечётно симметрично относительно Π при $M_\tau(q')=-M_\tau(q'')$, $M_n(q')=M_n(q'')$ (рис. 8, б). На этом рисунке $X \parallel \tau$, $Z \parallel n$, $M_\tau=M_x$, $M_n=M_z$.

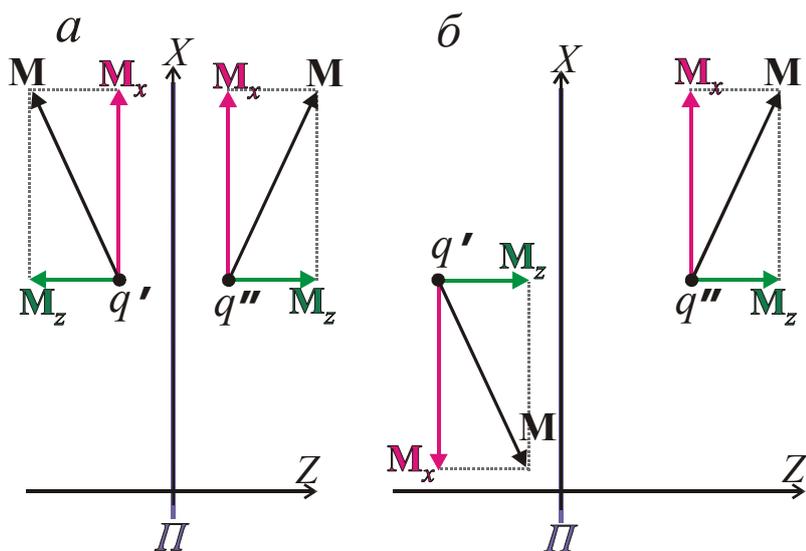


Рис. 8.

Зеркальная симметрия векторного поля \vec{M}

при нечётной симметрии меняются на плоскости Π так же, как нечётно симметричное поле T (см. рис. 7, б).

Цилиндрическая симметрия – симметрия относительно оси. Прямую L называют осью чётной или нечётной цилиндрической симметрии поля, если любая плоскость S , проходящая через прямую L , является плоскостью соответственно чётной или нечётной симметрии.

У имеющего цилиндрическую симметрию скалярного поля T значения T одинаковы в пределах окружности с осью L . Поле T в этом случае чётно симметрично относительно любой плоскости проходящей через L .

зеркальной симметрии поля T на плоскости симметрии Π остается справедливым и для соответствующих скалярных компонент векторного поля. Компоненты M_τ при чётной симметрии и M_n при нечётной симметрии меняются на плоскости Π так же, как чётно симметричное поле T (см. рис. 7, а), а компоненты M_n при чётной симметрии и M_τ

Определению нечётной цилиндрической симметрии скалярного поля формально удовлетворяет только поле T , всюду равное нулю.

Примеры цилиндрически-симметричных векторных полей представлены на рис. 9, а, б. Векторы \vec{M} на этих рисунках изображены в нескольких точках окружностей (координатных линий l_φ) с осью Z по оси симметрии L . При чётной цилиндрической симметрии (рис. 9, а) векторы \vec{M} ориентированы ортогонально таким окружностям и в пределах окружности одинаковы по абсолютной величине и составляют одинаковые углы с осью Z . При нечётной цилиндрической симметрии (рис. 9, б) векторы \vec{M} направлены по касательной к окружностям l_φ , в пределах окружности одинаковы по абсолютной величине и направлены как орты $\vec{1}_\varphi$, либо как $-\vec{1}_\varphi$.

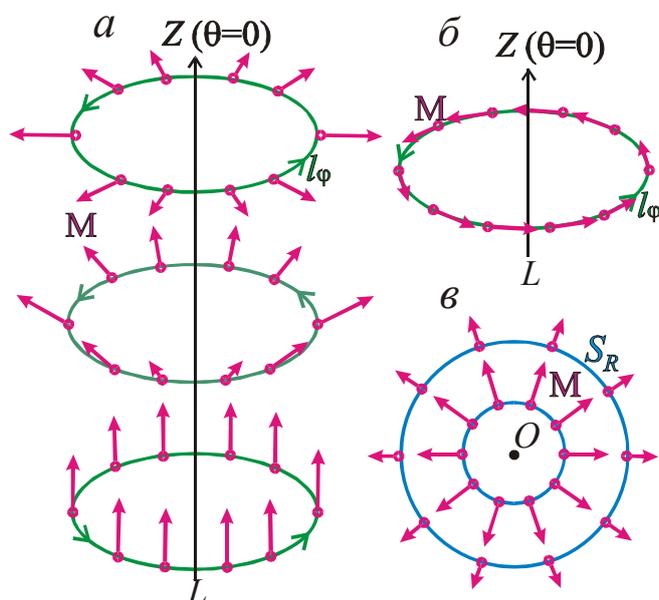


Рис. 9.

Чётная цилиндрическая (а), нечётная цилиндрическая (б) и сферическая (в) симметрии векторного поля \vec{M}

Сферическая симметрия – симметрия относительно точки (центра симметрии). Точка O – центр симметрии, если любая проходящая через точку O плоскость является плоскостью зеркальной симметрии.

Значения сферически симметричного скалярного поля T одинаковы во всех точках произвольно выбранной сферической поверхности S_R с центром в точке O .

При сферической симметрии векторного поля векторы \vec{M} нормальны к такой поверхности S_R , одинаковы по абсолютной величине в пределах поверхности S_R и направлены либо наружу относительно области V (в форме шара), ограниченной поверхностью S_R , как орты $\vec{1}_R$ (рис. 9, в), либо в область V , как $-\vec{1}_R$. Векторы \vec{M} имеют чётную зеркальную симметрию относительно любой плоскости, проходящей через точку O .

Определению нечётной сферической симметрии формально удовлетворяют лишь поля: $T=0$, $\vec{M}=0$. Поэтому обычно, говоря о сферически симметричных полях T , \vec{M} , подразумевают их чётную симметрию относительно любой плоскости, проходящей через центр симметрии O .

Определение симметричных полей в системах координат.

Выбор системы координат при расчётах поля проводится с учётом симметрии поля. Оптимальный выбор системы координат позволяет добиться того, что некоторые компоненты поля \vec{M} равны нулю, а поле T или ненулевые

компоненты поля \vec{M} зависят не от трёх, а от двух или от одной координаты. Это обстоятельство делает возможным при решении прямых задач получить аналитические выражения для поля или упрощает численный расчёт поля.

Охарактеризуем некоторые особенности цилиндрически-симметричных полей в совмещённой системе координат (см. рис. 5, в) с осью Z (и полярной осью), совпадающей с осью симметрии, и сферически-симметричных полей в сферических координатах с началом O в центре симметрии.

1. Цилиндрически-симметричное скалярное поле T в совмещённой $(r, \varphi, z$ и $R, \theta, \varphi)$ системе координат не зависит от координаты φ :

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \text{ то есть } T = T(r, z) \text{ или } T = T(R, \theta). \quad (4)$$

На оси Z цилиндрических координат (или на полярной оси сферических координат) поле T непрерывно или принимает бесконечно большие значения.

2. При чётной цилиндрической симметрии поля \vec{M} составляющая $M_\varphi = 0$, а компоненты M_r и M_z или M_R и M_θ не зависят от координаты φ :

$$\vec{M} = \vec{1}_r \cdot M_r + \vec{1}_z \cdot M_z, \quad M_r = M_r(r, z), \quad M_z = M_z(r, z). \quad (5)$$

или

$$\vec{M} = \vec{1}_R \cdot M_R + \vec{1}_\theta \cdot M_\theta, \quad M_R = M_R(R, \theta), \quad M_\theta = M_\theta(R, \theta). \quad (6)$$

На оси симметрии компонента M_z непрерывна или принимает неограниченные значения, а компонента M_r равна нулю, либо поле \vec{M} терпит разрыв на этой оси.

3. При нечётной цилиндрической симметрии поля \vec{M} все его компоненты, кроме M_φ , равны нулю, а производная $\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} = 0$:

$$\vec{M} = \vec{1}_\varphi \cdot M_\varphi(r, z) \text{ или } \vec{M} = \vec{1}_\varphi \cdot M_\varphi(R, \theta). \quad (7)$$

4. Сферически-симметричное поле T в сферических координатах зависит только от координаты R , то есть $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0,$

$$T = T(R). \quad (8)$$

В начале координат O поле T непрерывно, либо обращается в бесконечность.

5. У сферически симметричного векторного поля \vec{M}

$$M_\theta = M_\varphi = 0, \quad \frac{\partial M_R}{\partial \theta} = \frac{\partial M_R}{\partial \varphi} = 0, \text{ то есть}$$

$$\vec{M} = \vec{1}_R \cdot M_R(R). \quad (9)$$

В начале координат O поле $\vec{M} = 0$ или принимает бесконечно большие значения.

6. Как уже было отмечено, определению понятия "нечётная сферическая симметрия" формально удовлетворяет только векторное поле \vec{M} всюду равное нулю.

СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Статическим полем в вакууме называют не меняющееся со временем (постоянное) поле, создаваемое неподвижными источниками в отсутствии среды – таких тел (объектов), которые "сами по себе" могут поля не создавать, но оказывают влияние на поле. Эти источники поля: гравитационные массы, либо электрические заряды в отсутствии проводников или диэлектриков, либо физически фиктивные магнитные массы (магнитные полюса) в отсутствии магнетиков. Теория электростатического и магнитостатического полей в вакууме является основой для изучения этих полей в присутствии проводников, диэлектриков, магнетиков. Далее, говоря "массы" будем подразумевать, что это либо гравитационные массы, либо электрические заряды, либо (физически фиктивные) магнитные массы. В этом разделе приведены примеры расчёта статического поля, создаваемого заданными массами.

Основные понятия и формулы

Объёмные и точечные массы. Применяя "макроскопический" подход, будем отвлекаться от атомарно-молекулярного строения вещества и полагать, что физически реальной является объёмная масса m_V , заполняющую область пространства V . Характеристикой такой массы является объёмная плотность – скалярное поле $\delta(q)$. Если dm – (элементарная) масса в бесконечно малом элементе объёма dV с центром в точке q , то

$$\delta(q) = \frac{dm}{dV}, \text{ а масса } dm = \delta \cdot dV.$$

Отсюда следует, что объёмную массу m_V в области пространства V определяет выражение:

$$m_V = \int_V dm = \int_V \delta dV.$$

В случае однородной массы (в области V плотность $\delta = \text{const}$)

$$m_V = \int_V \delta dV = \delta \cdot \int_V dV = \delta \cdot V,$$

где V – объём этой области.

Наряду с объёмными массами будем рассматривать массы *необъёмные*, в частности точечные массы. Заменяя реальную объёмную массу необъёмной массой, получаем возможность не рассматривать те характеристики объёмной массы, которые в данном случае не существенны, и упростить расчёт поля. При расстоянии от массы m , много большем её линейных размеров, силы \vec{F} , с которыми эта масса будет взаимодействовать с другими массами (см. ниже), определяют только положение центра тяжести q массы m и величина m . В связи с тем, что при указанном условии такие характеристики массы, как её форма, размеры и плотность δ не оказывают влияния на силу \vec{F} , можем (при расчёте \vec{F}) заменить эту массу точечной массой m , расположенной в точке q . Объём

точечной массы $V \rightarrow 0$, а её плотность $\delta \rightarrow \infty$ как $\frac{1}{V}$, то есть как $\frac{1}{h^3}$, где h – линейные размеры массы.

Массы. Закон Кулона – Ньютона. Напряжённость поля. Согласно закону Кулона – Ньютона, если m_1, m_2 – точечные массы (одинаковой физической природы), находящиеся в точках "1" и "2" соответственно, то силу \vec{F}_{12} , действующую со стороны массы m_1 на массу m_2 (рис. 10), определяет выражение:

$$\vec{F}_{12} = v \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{L_{12}^2} \cdot \vec{l}_{L_{12}} = v \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{\vec{L}_{12}}{L_{12}^3}, \quad (10)$$

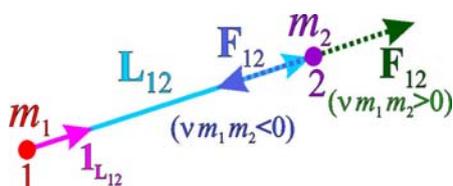


Рис. 10.

К закону

Кулона – Ньютона

где \vec{L}_{12} – радиус-вектор, направленный из точки "1" в точку "2"; L_{12} – модуль этого вектора, равный расстоянию между точками "1" и "2", v – коэффициент, зависящий от физической природы масс и применяемой системы физических единиц.

В международной системе физических единиц (СИ) коэффициент v имеет следующие значения: $v = -\gamma$ если m_1, m_2 – гравитационные массы; $v = 1/(4\pi \cdot \epsilon_0)$, если m_1, m_2 – электрические заряды. Единица (физически фиктивной) "магнитной массы" в СИ не определена. Но если ввести понятие "магнитной массы", следуя [1] (стр. 80), то для таких масс в выражении (10) надо положить $v = \mu_0/(4\pi)$. Здесь γ, ϵ_0 и μ_0 – соответственно гравитационная, электрическая и магнитная постоянные:

$$\gamma \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}, \quad \epsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Заменяя точки "1", "2" точками q, a , а массы m_1, m_2 массами m_q, m_a , из (10) получаем

$$\vec{F}_{qa} = v \cdot m_q \cdot m_a \cdot \frac{\vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}. \quad (11)$$

Напряжённость гравитационного ($\vec{\Gamma}$) или электрического (\vec{E}) поля, создаваемого массой m_q в точке a – это отношение $\vec{F}_{qa}/m_a = v \cdot \vec{f}(a)$, где поле

$$\vec{f}(a) = m_q \cdot \frac{\vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}. \quad (12)$$

Напряжённость магнитного поля $\vec{H} = v \cdot \vec{f}/\mu_0$. Таким образом, напряжённости гравитационного, электростатического и магнитостатического полей пропорциональны полю \vec{f} , которое в точке (наблюдения) a определяет выражение (12), если поле создаёт точечная масса m_q , расположенная в точке q . Далее в этом разделе будем рассматривать поле \vec{f} и называть \vec{f}

«напряжённостью статического поля». Для перехода от поля \vec{f} к напряжённостям конкретных по физической природе полей (гравитационного, электрического или магнитного) надо умножить вектор \vec{f} на соответствующий коэффициент:

$$\vec{\Gamma} = -\gamma \cdot \vec{f}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{f}, \quad \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \vec{f}. \quad (13)$$

Так как для гравитационного поля этот коэффициент ($-\gamma$) отрицателен вектор $\vec{\Gamma}$ антипараллелен вектору \vec{f} . Это обусловлено тем, что гравитационные массы притягиваются, а имеющие одинаковый знак электрические заряды (либо одноименные магнитные полюса) отталкиваются.

В системах координат нам нужно определить компоненты векторного поля. Согласно (1) по направлению (линии) l скалярная компонента $f_l = f \cdot \cos(\vec{f}, \vec{1}_l)$, где f – модуль вектора \vec{f} , а $\vec{1}_l$ – единичный вектор касательный к линии l (рис. 11, а). Поэтому в соответствии с (12) компоненту по направлению l поля \vec{f} точечной массы определяет выражение:

$$f_l(a) = |m| \cdot \cos(\vec{f}, \vec{1}_l) / L_{qa}^2,$$

где $|m|$ – абсолютная величина m . Так как в соответствии с (12) при $m > 0$ векторы \vec{L}_{qa} и \vec{f} направлены одинаково, а при $m < 0$ эти векторы имеют

противоположные направления $\cos(\vec{f}, \vec{1}_l) = \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l) \cdot \frac{m}{|m|}$ (см. рис. 11, а).

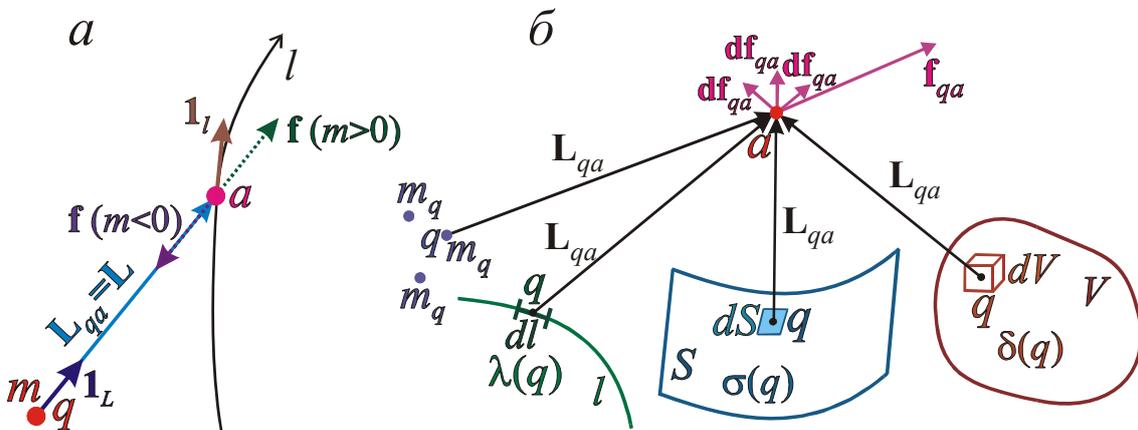


Рис. 11.

К выражению (14) для компоненты f_l поля \vec{f} точечной массы (а) и выражению (16) для слагаемых поля \vec{f} , создаваемых разными массами – объёмными и необъёмными (б)

Следовательно, скалярная компонента $f_l(a) = |m| \cdot \frac{m}{|m|} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l) / L_{qa}^2$, то

есть

$$f_l(a) = m \cdot \frac{\cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_l)}{L_{qa}^2}. \quad (14)$$

Точечная масса конечна по величине и занимает бесконечно малый объём. Поле $\vec{\mathbf{d}}\mathbf{f}(a)$, создаваемое в точке наблюдения a расположенной в точке q элементарной массой dm , бесконечно малой по величине и занимаемому ею объёму, и скалярную компоненту $df_l(a)$ этого поля определяют формулы, аналогичные выражениям (12), (14) для точечной массы:

$$\vec{\mathbf{d}}\mathbf{f}(a) = dm \cdot \frac{\vec{\mathbf{L}}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_l(a) = dm \cdot \frac{\cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_l)}{L_{qa}^2}. \quad (15)$$

Физически реальную объёмную массу, занимающую области пространства V , характеризует объёмная плотность δ . В этом случае элементарная масса $dm = \delta \cdot dV$. Но, помимо точечной массы m , бывает удобно воспользоваться представлениями о других необъёмных массах. Это – занимающие поверхности S "поверхностные массы" (в виде простого слоя) с поверхностной плотностью σ и лежащие на линиях l "линейные массы" с линейной плотностью λ . В этих случаях элементарные массы определяют выражения: $dm = \sigma \cdot dS$, $dm = \lambda \cdot dl$.

Принцип суперпозиции. Закон Кулона – Ньютона (10) и следующие из него выражения (12) – (15) справедливы для точечных или элементарных масс. Этот закон можно представить в более общем виде на основе принципа суперпозиции, согласно которому сила, действующая со стороны заданной совокупности масс на данную (например, пробную точечную) массу m_a , равна векторной сумме сил, действующих со стороны каждой массы этой совокупности на массу m_a (рис. 11, б). Это позволяет определять поле $\vec{\mathbf{f}}(a)$ совокупности масс (точечных масс m_q и элементарных масс $dm_q = \delta_q \cdot dV$, $\sigma_q \cdot dS$, $\lambda_q \cdot dl$) суммированием полей. Тогда в соответствии с (12) и (15)₁

$$\vec{\mathbf{f}}(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^3} \vec{\mathbf{L}}_{qa} + \int_V \frac{\delta_q}{L_{qa}^3} \vec{\mathbf{L}}_{qa} dV + \int_S \frac{\sigma_q}{L_{qa}^3} \vec{\mathbf{L}}_{qa} dS + \int_l \frac{\lambda_q}{L_{qa}^3} \vec{\mathbf{L}}_{qa} dl. \quad (16)$$

Согласно (14), (15)₂ скалярная компонента поля $\vec{\mathbf{f}}(a)$ по направлению l

$$f_l(a) = \left. \begin{aligned} & \sum \frac{m_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_l) + \int_V \frac{\delta_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_l) dV + \\ & + \int_S \frac{\sigma_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_l) dS + \int_l \frac{\lambda_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_l) dl. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Уравнения поля. Уравнения поля $\vec{\mathbf{f}}$ (а также некоторые физические законы) могут быть записаны в дифференциальной или в интегральной форме. Входящие в уравнение, записанное в дифференциальной форме, величины относятся к окрестности одной и той же точке пространства. При интегральной форме записи уравнения входящие в него величины относятся к разным точкам пространства.

Система уравнений статического поля \vec{f} является следствием закона сохранения энергии и закона Кулона – Ньютона. В дифференциальной форме система уравнений поля \vec{f} :

$$\text{I. } \text{rot } \vec{f} = 0 \text{ или } [\nabla \vec{f}] = 0, \quad (18)$$

$$\text{II. } \text{div } \vec{f} = 4\pi \cdot \delta \text{ или } (\nabla \vec{f}) = 4\pi \cdot \delta, \quad (19)$$

где ∇ – оператор Гамильтона (набла), а $\delta = dm/dV$ – объёмная плотность масс (зарядов).

Эти же уравнения в интегральной форме следующие. Циркуляция поля \vec{f} по любой замкнутой линии (контуру) l

$$\text{I. } \oint_l (\vec{f} \, d\vec{l}) = 0, \quad (20)$$

Поток вектора \vec{f} через замкнутую поверхность $S[V]$, ограничивающую область пространства V :

$$\text{II. } \oint_{S[V]} (\vec{f} \, d\vec{S}) = 4\pi \cdot m_V, \quad (21)$$

где m_V – масса в области V . Равенство (21) называют *законом* (или иногда уравнением) *Гаусса*.

Согласно (18), (20) поле \vec{f} – потенциальное, векторные линии l_f поля \vec{f} не могут быть замкнутыми. Они начинаются там, где $\delta > 0$, а оканчиваются в тех местах, в которых плотность масс (зарядов) $\delta < 0$. Единственные возбудители (источники) поля \vec{f} – массы (заряды). Там, где таких источников нет ($\delta = 0$), пространственная производная $\text{div } \vec{f} = 0$.

Потенциал U поля \vec{f} . Уравнения поля (18), (20), определяющие его безвихревой (потенциальный) характер, позволяют выразить векторное поле \vec{f} через скалярное поле – потенциал U поля \vec{f} :

$$\vec{f} = -\text{grad } U = -\nabla U. \quad (22)$$

Из (22) следует, что вектор \vec{f} всюду направлен в сторону наиболее резкого уменьшения (падения) потенциала U . Векторы \vec{f} (и векторные линии l_f) ортогональны эквипотенциальным поверхностям $U = \text{const}$.

В соответствии с (22) и определением понятия "градиент скалярного поля" (см. [1], стр. 14, 15) скалярную компоненту f_i напряжённости поля \vec{f} по координатному направлению l_i определяет выражение

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial l_i} = -\frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad (23)$$

где h_i – коэффициент Ламэ для координаты ξ_i .

Заменяя в уравнении (19) \vec{f} на $-\text{grad } U$ и принимая во внимание, что вторая пространственная производная скалярного поля U : $\text{div grad } U = (\nabla \nabla U) = \nabla^2 U$, получаем для потенциала U поля \vec{f} уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 U = -4\pi \delta. \quad (24)$$

Вне масс – источников статического поля \vec{f} , то есть там, где $\delta=0$, потенциал U статического поля \vec{f} удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = 0. \quad (25)$$

Решения уравнения Лапласа называют гармоническими функциями. Следовательно, согласно (24), (25) в тех областях пространства, где нет источников статического поля (масс, зарядов), потенциал U – гармоническая функция.

Можно показать ([1], стр. 94), что разность потенциалов U в точках “1” и “2” равна напряжению \mathcal{E}_{12} поля \vec{f} между этими точками. То есть

$$U_1 - U_2 = \mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{f} \, d\vec{l}). \quad (26)$$

Напряжённостью поля \vec{f} потенциал U определяется с точностью до постоянного слагаемого C так как $\text{grad}(U+C) = \text{grad} U = -\vec{f}$. Для однозначного определения потенциала U по полю \vec{f} надо задать (определить) значение потенциала $U(\phi)$ в некоторой фиксированной точке ϕ . Тогда потенциал $U(a)$ в произвольной точке a в соответствии с (26) можно определить по формуле:

$$U(a) = \int_a^\phi (\vec{f} \, d\vec{l}) + U(\phi). \quad (27)$$

Согласно (27) потенциал U в точке a равен сумме напряжения $\mathcal{E}_{a\phi}$ поля \vec{f} на пути $l_{a\phi}$ (от точки a до точки ϕ) и потенциала $U(\phi)$ в точке ϕ .

Напряжение потенциального поля \vec{f} не зависит от формы линии (пути) $l_{a\phi}$. Его полностью определяет поле \vec{f} и положение точек a и ϕ . Часто точку ϕ выбирают на бесконечности и полагают потенциал в этой точке равным нулю ($U(\infty)=0$). В этом случае из (27) получаем:

$$U(a) = \int_a^\infty (\vec{f} \, d\vec{l}) + 0. \quad (27')$$

Однако, как будет показано ниже (см., например, задачи 8, 10), выбор нулевого потенциала на бесконечности не всегда возможен.

Можно доказать, что для потенциалов U и dU соответственно полей \vec{f} точечной массы m и $d\vec{f}$ элементарной массы dm , определяемых равенствами (12), (15)₁, справедливы следующие выражения:

$$U(a) = \frac{m}{L_{qa}} + C, \quad dU(a) = \frac{dm}{L_{qa}} + C, \quad (28)$$

где $C = \text{const}$. Сделаем это при решении задачи 3.

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал поля совокупности точечных и элементарных масс можно определить, суммируя величины U и dU , определяемые выражениями (28):

$$U(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}} + \int_V \frac{\delta \, dV}{L_{qa}} + \int_S \frac{\sigma \, dS}{L_{qa}} + \int_l \frac{\lambda \, dl}{L_{qa}} + C. \quad (29)$$

Если выбрать нулевое значение потенциала $U(a)$ на бесконечно-большом расстоянии L_{qa} от точки a до точек q (то есть $U(a)=0$ при $L_{qa} \rightarrow \infty$), то в (28), (29) слагаемое $C=0$.

Отметим, что если поле $\delta(q)$ плотности масс – источников поля $\vec{f}(a)$ – симметрично, то симметричными являются и поле $\vec{f}(a)$, а также его потенциал $U(a)$. При этом поля $\vec{f}(a)$, $U(a)$ имеют симметрию того же вида, что и поле $\delta(q)$.

Занятие 2

Поле точечной массы

"Номера" задач будут отличаться от тех, которые были в учебном пособии [13] и в его электронной версии. Это связано со следующим. После сокращения в 2014-ом году (в два раза) занятий студентов - геофизиков МГРИ (группы РФ) по курсу "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике" и переименовании названия этого курса в избыточно более общее название "Теория поля", пришлось соответственно сократить и число рассматриваемых на практических занятиях задач.

Задача 1. Определим поле \vec{f} точечной массы m , расположенной в начале O сферической системы координат.

Решение. Так как точечная масса m находится в начале координат O , то в равенстве (14) $\vec{L}_{qa} = \vec{L}_{Oa}$.

Из выражения (14) $f_l(a) = m \cdot \frac{\cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l)}{L_{qa}^2}$ для компоненты поля \vec{f} точечной

массы получаем:

$$f_R = \frac{m}{L_{Oa}^2} \cos(\vec{L}_{Oa}, \vec{1}_R) = \frac{m}{R^2} \quad (30)$$

так как в рассматриваемом случае $L_{Oa}=R$, угол $(\vec{L}_{Oa}, \vec{1}_R)=0$ и $\cos(\vec{L}_{Oa}, \vec{1}_R)=1$ (см. [рис. 4, в](#)). Из (14) следует, что две другие компоненты поля \vec{f} в сферических координатах равны нулю ($f_\theta=f_\varphi=0$), так как углы $(\vec{L}_{Oa}, \vec{1}_\theta)$ и $(\vec{L}_{Oa}, \vec{1}_\varphi)$ равны $\pi/2$, косинусы этих углов равны нулю. Таким образом,

$$\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R, \quad f_R = \frac{m}{R^2} \quad \text{или} \quad \vec{f} = \vec{1}_R \cdot \frac{m}{R^2}. \quad (31)$$

Простота выражения (31) для поля \vec{f} точечной m массы (находящейся в точке O) обусловлена тем, что это поле сферически симметричное и центр его симметрии совпадает с началом O сферических координат. Тогда согласно (9) $\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R(R)$.

При $m>0$ имеем $f_R>0$, то есть векторные линии l_f поля \vec{f} – лучи выходящие из начала координат O (в которое помещена точечная масса m). При $m<0$ компонента $f_R<0$, то есть векторные линии l_f поля \vec{f} "сходятся" в точку O .

Задача 2. Определить поле \vec{f} точечной массы, помещенной в начало O цилиндрической системы координат ([рис. 4, б](#), [рис. 12, а](#)).

Решение. Обозначим $L_{Oa}=L$, а угол $\angle(\vec{L}, \vec{1}_z)=\alpha$ (см. **рис. 12, а**). Из выражения (14) $f_l(a) = m \cdot \frac{\cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l)}{L_{qa}^2}$ получаем для компонент поля \vec{f} точечной массы, расположенной в начале O цилиндрической системы координат:

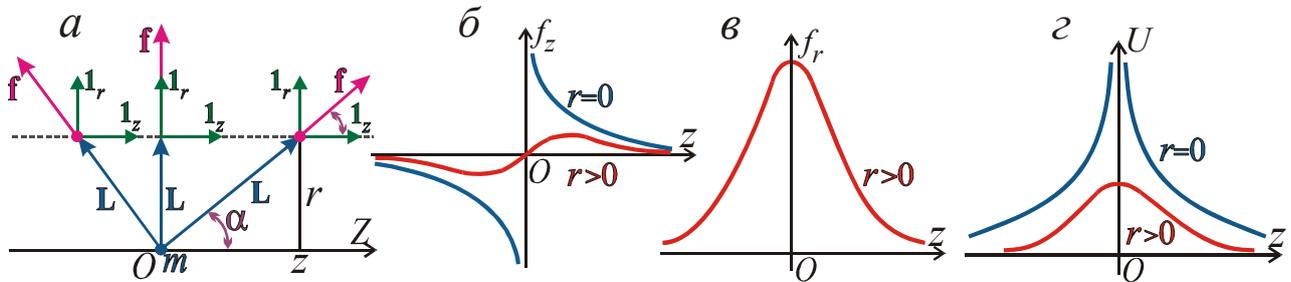


Рис. 12.

Зависимости компонент поля \vec{f} и потенциала U поля \vec{f} от координаты z при расположении точечной массы (заряда) $m>0$ в начале O цилиндрических координат

$$f_r = \frac{m}{L^2} \cdot \cos(\vec{L}, \vec{1}_r) = \frac{m}{L^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{m}{L^2} \cdot \sin \alpha, \quad f_\phi = \frac{m}{L^2} \cos(\vec{L}, \vec{1}_\phi) = 0,$$

$$f_z = \frac{m}{L^2} \cdot \cos(\vec{L}, \vec{1}_z) = \frac{m}{L^2} \cdot \cos \alpha,$$

Принимая во внимание, что $\sin \alpha = r/L$, $\cos \alpha = z/L$, $L = \sqrt{r^2 + z^2}$, получаем:

$$\vec{f} = \vec{1}_r \cdot f_r + \vec{1}_z \cdot f_z, \quad f_r = \frac{m \cdot r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad f_z = \frac{m \cdot z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (32)$$

Пусть ось Z направлена горизонтально и точка наблюдения перемещается по параллельной оси Z прямой (по "профилю") проходящей на высоте $r=r_0>0$ над точечной массой. Для этого случая на **рис. 12, б, в** красным цветом показаны зависимости определяемых выражениями (32)_{3,2} компонент f_z и f_r от координаты z при $m>0$. Можем полагать, что графики $f_r(z)$ и $f_z(z)$ – это зависимости вертикальной компоненты f_r и горизонтальной (по направлению профиля) компоненты f_z поля \vec{f} точечной массы m .

На **рис. 12, б, в** видно, что если $m>0$, то при любом положении точки a имеем: $f_r>0$. При $z>0$ компонента $f_z>0$, так как угол между направлением вектора \vec{f} и координатным направлением l_z (орта $\vec{1}_z$) острый. При $z<0$ компонента $f_z<0$, так как этот угол $\angle(\vec{L}, \vec{1}_z)>\pi/2$, а при $z=0$ компонента $f_z=0$, так как $\angle(\vec{L}, \vec{1}_z)=\pi/2$ (см. **рис. 12, а**). Если $z \rightarrow \pm\infty$, то $f_r \rightarrow 0$, $f_z \rightarrow 0$.

Синим цветом на **рис. 12, б** показана зависимость $f_z(z)$ для случая, когда точка наблюдения a перемещается по оси Z ($r=0$), проходящей через точечную массу m . При $|z| \rightarrow 0$ (и $L_{Oa} \rightarrow 0$) имеем $f \rightarrow \infty$.

Задача 3. Надо определить потенциал U поля \vec{f} точечной массы m , помещённой в начало цилиндрической системы координат (рис. 12, а), на основе равенства (28)₁ и перейти к компонентам поля \vec{f} , пользуясь формулой (23) $f_i = -\frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_i}$.

Решение. Если выберем потенциал $U=0$ при $L_{Oa} \rightarrow \infty$, то, как следует из выражения (28)₁, $U = m/L_{Oa}$. Тогда в показанной на рис. 12, а системе координат

$$U = \frac{m}{\sqrt{r^2 + z^2}} = m \cdot (r^2 + z^2)^{-1/2}.$$

Так как коэффициенты Ламэ $h_r=h_z=1$, $h_\varphi=r$ из (23) и последнего выражения для потенциала U получаем:

$$f_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -m \cdot (-1/2) \cdot (r^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2 \cdot r, \quad f_\varphi = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0,$$

$$f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -m \cdot (-1/2) \cdot (r^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2 \cdot z.$$

То есть

$$f_r = \frac{m \cdot r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad f_\varphi = 0, \quad f_z = \frac{m \cdot z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

или

$$\vec{f} = \vec{1}_r \cdot \frac{m \cdot r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} + \vec{1}_z \cdot \frac{m \cdot z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = (\vec{1}_r \cdot r + \vec{1}_z \cdot z) \cdot \frac{m}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, для компонент поля \vec{f} получены те же формулы, что и при решении этой задачи другим способом (задача 2). Это подтверждает справедливость выражения (28)₁ для потенциала U поля \vec{f} точечной массы. Отметим также, что равенство нулю компоненты f_φ поля \vec{f} формально следует из того, что потенциал U не зависит от координаты φ . Для случая, когда $m>0$, графики $U(z)$ при $r=r_0>0$ (красный цвет) и при $r=0$ (синий цвет) приведены на рис. 12, з. При $z \rightarrow \pm\infty$ потенциал $U \rightarrow 0$, а при $r \rightarrow 0$ и $z \rightarrow 0$ потенциал $U \rightarrow \infty$ как $m/L_{Oa} = m \cdot (r^2 + z^2)^{-1/2}$.

Задание

Полагая, что декартовы координаты точечной массы m : x_0, y_0, z_0 , на основе выражений (28)₁, (23) определить потенциал U и компоненты f_x, f_y, f_z поля \vec{f} в произвольной точке с координатами x, y, z .

Занятие 3

Пример решения обратной задачи

Задача 4. Решить обратную задачу. Определить расстояние от горизонтального прямолинейного профиля, проходящего над точечной массой

m , до этой массы ("глубину" r_0 этой массы), а также величину m , полагая, что на этом профиле известны значения: А) проекции вектора напряжённости статического поля \vec{f} на направление профиля, Б) вертикальной компоненты \vec{f} .

Решение. Пусть начало цилиндрической системы координат совмещено с массой m , а ось Z направлена параллельно профилю (см. рис. 12, а, на котором координата $r=r_0$). Тогда в случаях А), Б) можем полагать заданными показанные на рис. 12, б, в графики компонент f_z и f_r соответственно. Применим для решения обратной задачи способ характерных точек.

Если $r=r_0$, то согласно (32)

$$f_r = \frac{m \cdot r_0}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}, \quad f_z = \frac{m \cdot z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (33)$$

На основе выражений (33) попробуем выразить искомые величины r_0 и m через абсциссы и ординаты характерных точек графиков функций $f_z(z), f_r(z)$.

А). Функция $f_z(z)$ – нечётная (рис. 13, а). Характерными точками на графике $f_z(z)$ являются максимум и минимум. Обозначим абсциссы и ординаты этих экстремумов соответственно $\pm z_0$ и $\pm f_z^0$. При $z = \pm z_0$ производная $\partial f_z / \partial z = 0$. Согласно (33)₁ производная

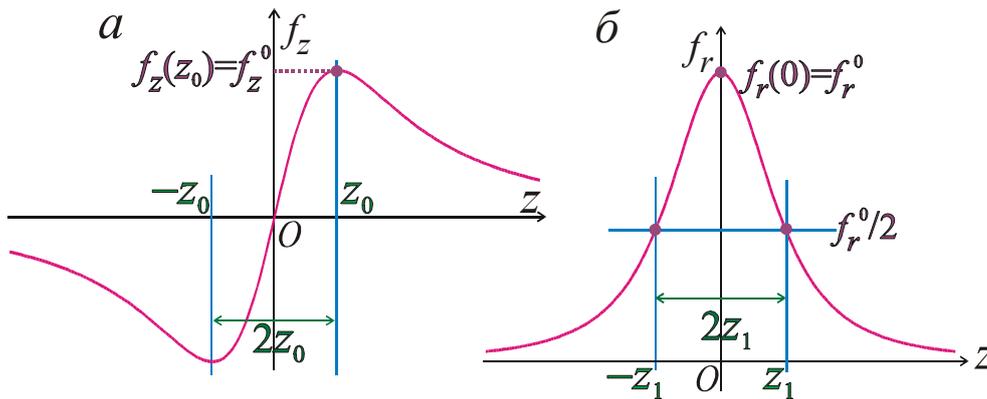


Рис. 13.

К решению обратной задачи

$$\frac{\partial f_z}{\partial z} = m \cdot \frac{r_0^2 - 2z^2}{(r_0^2 + z^2)^{5/2}},$$

откуда следует, что производная $\partial f_z / \partial z = 0$ при $r_0^2 = 2z_0^2$, то есть при

$$r_0 = z_0 \sqrt{2} = \frac{(2z_0)}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot (2z_0), \quad (34)$$

где расстояние между экстремумами $2z_0$ – «ширина аномалии». Таким образом, между расстоянием $2z_0$ вдоль профиля от минимума до максимума на графике $f_z(z)$ и расстоянием r_0 от профиля до точечной массы существует прямая пропорциональная зависимость.

Получим теперь выражение для m . При $z=z_0$ максимальное значение компоненты $f_z = f_z^0$. Согласно (33)₂ и полученному выше выражению (34) для r_0 величина $f_z^0 = \frac{m \cdot z_0}{(r_0^2 + z_0^2)^{3/2}} = \frac{m}{3^{3/2} \cdot z_0^2}$, откуда следует, что

$$m = 3^{3/2} \cdot z_0^2 \cdot f_z^0 \approx 5.2 \cdot z_0^2 \cdot f_z^0. \quad (35)$$

В соответствии с (34) для того, чтобы найти глубину r_0 , достаточно знать расстояние $2z_0$ – «ширину аномалии». Согласно (35) для определения m нужны данные, как о ширине, так и об амплитуде аномалии.

Б). При любых значениях m и r_0 функция $f_r(z)$ имеет максимум, при $z=0$ (рис. 13, б). То есть абсцисса максимума функции $f_r(z)$ в данном случае не связана с глубиной до точечной массы, а показывает проекцию точечной массы на профиль наблюдения. Обозначим максимальное значение (при $z=0$) $f_r(0) = f_r^0$. Согласно (33)₁

$$f_r^0 = m/r_0^2 \quad \text{или} \quad m = r_0^2 \cdot f_r^0. \quad (36)$$

Обозначим $\pm z_1$ те значения аргумента z , при которых $f_r(z) = f_r^0/2$. Расстояние $2z_1$ можем назвать шириной аномалии f_r на уровне половины максимума (половины амплитуды аномалии) (рис. 13, б). Напомним, что значения z_1 и f_r^0 можно полагать известными при решении обратной задачи. Из выражения (33)₁ для компоненты f_r следует, что

$$\frac{f_r^0}{2} = \frac{m \cdot r_0}{(r_0^2 + z_1^2)^{3/2}} \quad (37)$$

Задание. Получить решение системы уравнений (36), (37) для r и m .

Решение. Из (37) следует, что $f_r^0 = \frac{2 \cdot m \cdot r_0}{(r_0^2 + z_1^2)^{3/2}}$. Приравнивая правые части

этого выражения и выражения (36)₁ для f_r^0 , получаем: $\frac{2 \cdot m \cdot r_0}{(r_0^2 + z_1^2)^{3/2}} = \frac{m}{r_0^2}$ или

$2 \cdot r_0^3 = (r_0^2 + z_1^2)^{3/2}$. Возводя левую и правую части этого равенства в степень $2/3$, получаем уравнение $2^{2/3} \cdot r_0^2 = r_0^2 + z_1^2$, из которого не сложно получить выражение для r_0 , а затем, пользуясь (36)₂, определить m . **Дальше – самостоятельно.**

Ответы:

$$r_0 = \frac{z_1}{\sqrt{2^{2/3} - 1}} \approx 0.652 \cdot (2z_1), \quad m = \frac{f_r^0 \cdot z_1^2}{2^{2/3} - 1} \approx 1.7 \cdot f_r^0 \cdot z_1^2. \quad (38)$$

Таким образом, для компоненты f_r (как и для компоненты f_z) ширина аномалии пропорциональна глубине r_0 точечной массы m . Глубина r_0 может быть определена по абсциссам, а масса m – по абсциссам и ординатам характерных точек на графике $f_r(z)$.

Выводы. Ширина аномалии ($2z_0$) на графике $f_z(z)$ пропорциональна глубине r_0 точечной массы (рис. 14. а). Компонента f_r поля \vec{f} тем медленнее убывает с увеличением $|z|$ (рис. 14. б), чем больше значение r_0 . Если, например,

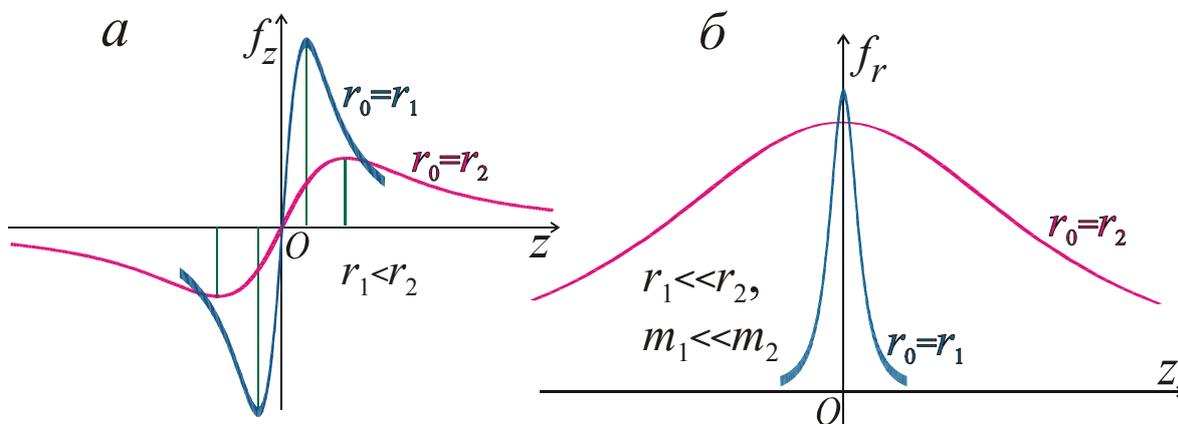


Рис. 14.

Графики зависимостей компонент f_z (а) и f_r (б) от координаты z точки наблюдения при разных "глубинах" r_0

в одном случае поле создаёт масса m_1 , расположенная на глубине r_1 , а в другом – масса m_2 , находящаяся на глубине r_2 , то при $m_1 \ll m_2$ и $r_1 \ll r_2$ (см. рис. 14. б) максимальные значения компоненты f_r в обоих случаях могут быть близки по величине, но компонента f_r поля массы m_2 значительно медленнее убывает с увеличением $|z|$, чем компонента f_r поля массы m_1 .

Выводы о связи абсцисс и ординат характерных точек на графиках компонент поля \vec{f} с параметрами источника поля в виде точечной массы m , разумеется, справедливы и для статических полей $\vec{H} = \vec{f}/4\pi$, $\vec{E} = \vec{f}/4\pi \cdot \epsilon_0$, $\vec{\Gamma} = -\gamma \cdot \vec{f}$.

Выше для наглядного изображения тех или иных особенностей поля точечного источника мы пользовались графиками компонент поля \vec{f} или его

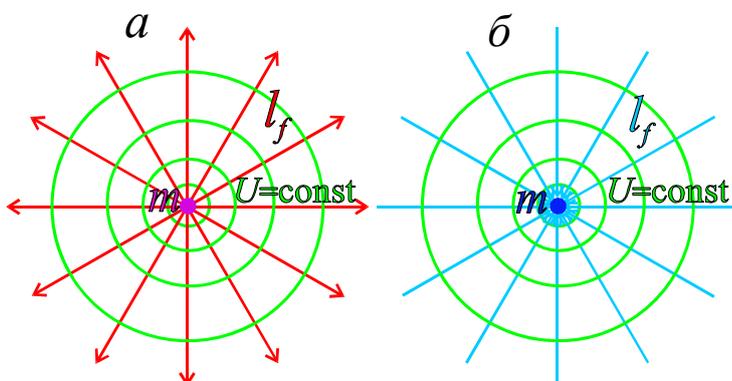


Рис. 15.

Векторные линии l_f и эквипотенциальные линии $U=\text{const}$ в плоскости, проходящей через точечную массу $m > 0$ (а) и $m < 0$ (б)

потенциала U . Иногда для такого изображения бывает удобнее воспользоваться векторными линиями l_f , по касательным к которым направлены векторы \vec{f} , или эквипотенциальными поверхностями $U=\text{const}$. Сечение поверхностей $U=\text{const}$ другой поверхностью, например, плоскостью рисунка, даёт эквипотенциальные линии.

Поле точечной массы m (в

отсутствии других источников поля) – сферически симметричное. Векторные линии l_f – лучи, которые при $m>0$ начинаются в точке, где расположена эта масса, а при $m<0$ оканчиваются в этой точке (рис. 15). Эквипотенциальные поверхности $U=\text{const}$ – сферические. Их сечение плоскостью (эквипотенциальные линии на плоскости) – окружности с общим центром.

Занятие 4 Поле диполя

Диполем может быть совокупность двух точечных масс (зарядов): $m>0$ и $-m<0$, имеющих противоположный знак и одинаковых по абсолютной величине при условии, что расстояние L_{12} между этими массами много меньше, чем расстояния от них до точки наблюдения a (рис. 16). На этом рисунке точки 1, 2, в которых расположены $-m$ и m – полюса диполя, прямая l , на которой лежат эти полюса – ось диполя, O – центр диполя. Плоскость, проходящая через центр O диполя и ортогональная оси l – экваториальная плоскость. Диполь, как источник поля, характеризует его момент $\vec{p} = m \cdot \vec{L}_{12} = \vec{1}_l \cdot m \cdot L_{12}$, где $\vec{1}_l = \vec{L}_{12}/L_{12}$ – единичный вектор, а \vec{L}_{12} – радиус-вектор с началом в массе (заряде) $-m$ и концом в массе m . Модуль момента диполя $p = m \cdot L_{12}$.

Получим выражение для потенциала $U(a)$ поля \vec{f} диполя, пользуясь тем, что расстояние $L = L_{Oa} \gg L_{12}$ (см. рис. 16).

При $L \gg L_{12}$ можем полагать, что отрезки L_{1a} , L_{2a} (практически) параллельны отрезку L_{Oa} , а также пренебречь кривизной показанной на рис. 16

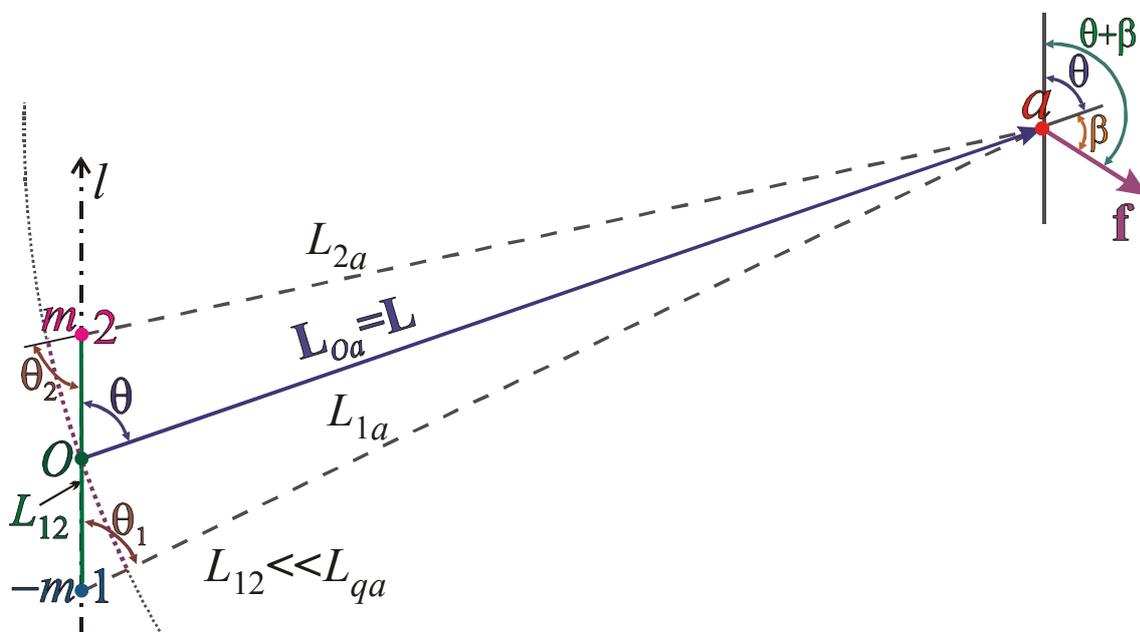


Рис. 16.
Диполь

пунктирной линией дуги окружности с радиусом L и с центром в точке наблюдения a . Тогда из (29) ($U(a) = \sum m_q / L_{qa}$) получаем:

$$\begin{aligned} U(a) &= \frac{m}{L_{2a}} + \frac{-m}{L_{1a}} \approx \frac{m}{L - (L_{12}/2) \cdot \cos \theta_2} - \frac{m}{L + (L_{12}/2) \cdot \cos \theta_1} \approx \\ &\approx m \cdot \left[\frac{1}{L - (L_{12}/2) \cdot \cos \theta} - \frac{1}{L + (L_{12}/2) \cdot \cos \theta} \right] = \\ &= \frac{L + (L_{12}/2) \cdot \cos \theta - L + (L_{12}/2) \cdot \cos \theta}{L^2 - (L_{12}/2)^2 \cdot \cos^2 \theta} = \\ &= \frac{m \cdot L_{12} \cdot \cos \theta}{L^2 - (L_{12}/2)^2 \cdot \cos^2 \theta} \approx \frac{m \cdot L_{12} \cdot \cos \theta}{L^2} \end{aligned}$$

так как при $L \gg L_{12}$ имеем $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$ и $L^2 \gg \gg (L_{12}/2)^2 \cdot \cos^2 \theta$. Итак, потенциал U поля \vec{f} диполя определяет выражение:

$$U(a) = \frac{p \cdot \cos \theta}{L^2}, \quad \text{где } p = m \cdot L_{12}. \quad (39)$$

Согласно (39) поле диполя зависит только от момента \vec{p} диполя (абсолютной величины p , направления \vec{p} и положения центра O диполя). Поэтому в теории понятию "диполь" обычно придают следующий (предельный) смысл. Полагают, что при конечной величине p длина диполя $L_{12} \rightarrow 0$, а $m \rightarrow \infty$. В этом случае центр O диполя представляет собой (одну) особую точку: при $L = L_{oa} \rightarrow 0$ потенциал $U(a) \rightarrow \infty$ как $\frac{p \cdot \cos \theta}{L^2}$.

Задача 5. На основе выражений (39), (23) определить потенциал U и компоненты поля \vec{f} диполя, центр которого помещен в начало O сферической системы координат (R, θ, φ) , а момент \vec{p} направлен по полярной оси (см. рис. 4, в, рис. 16, а).

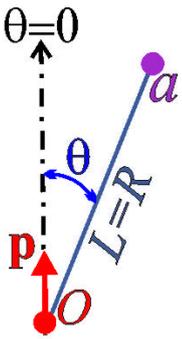


Рис. 16, а.
К задаче 5

Решение. Очевидно, что здесь для того, чтобы получить выражение для потенциала U , достаточно в равенстве (39) заменить расстояние L на координату R точки наблюдения a :

$$U = \frac{p \cdot \cos \theta}{R^2}. \quad (40)$$

В соответствии с (23) для скалярных компонент поля \vec{f} диполя в сферических координатах получаем (проделайте вычисления самостоятельно):

$$f_R = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{2p \cdot \cos \theta}{R^3}, \quad f_\theta = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{p \cdot \sin \theta}{R^3}, \quad f_\varphi = -\frac{1}{R \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \quad (41)$$

Заметим, что если бы при определении компоненты f_θ мы "забыли" про коэффициент Ламе R для координаты θ , то компоненты f_R, f_θ имели бы разные размерности. И это, конечно, должно было послужить свидетельством того, что при вычислениях была допущена ошибка.

Из (41) следует, что вектор \vec{f} , его абсолютную величину f и направление определяют формулы

$$\left. \begin{aligned} \vec{f} &= \frac{P}{R^3} (\vec{1}_R \cdot 2 \cdot \cos\theta + \vec{1}_\theta \cdot \sin\theta), & f &= \frac{P}{R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2\theta}, \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{f_\theta}{f_R} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\theta, & \operatorname{tg}(\beta + \theta) &= \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{3 \cdot \operatorname{tg}\theta}{2 - \operatorname{tg}^2\theta}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где β – угол отклонения вектора \vec{f} от исходящего из центра O диполя луча, на котором находится точка a , а $\beta + \theta$ – угол отклонения вектора \vec{f} от луча $\theta = 0$ (см. рис. 16), т. е. соответственно от направления радиус-вектора \vec{L}_{12} и от направления момента \vec{p} диполя.

Таким образом, в отличие от абсолютной величины f поля \vec{f} точечной массы m , абсолютная величина f поля \vec{f} диполя убывает с расстоянием L от него, как $1/L^3$, а потенциал этого поля – как $1/L^2$. Т. е. поле диполя убывает с удалением от источника быстрее, чем поле точечной массы (см. выражения (31), (29)). Кроме того, напряжённость и потенциал поля диполя зависят от угла отклонения радиус-вектора \vec{L}_{Oa} от направления момента \vec{p} диполя.

На рис. 17 показаны векторные линии l_f поля \vec{f} диполя. Эти линии l_f начинаются на положительном полюсе m диполя и оканчиваются на отрицательном полюсе $-m$.

Из выражений (42) следует, что при $\operatorname{tg}\theta = 0$, т. е. на оси l диполя, при $\theta = 0^\circ$ или $\theta = 180^\circ$, направления векторов \vec{f} – такие же, как направление момента \vec{p} диполя ($\vec{f} \parallel \vec{p}$). Если $\operatorname{tg}\theta = 2^{1/2}$ и $\operatorname{tg}^2\theta = 2$, то $\operatorname{tg}(\beta + \theta) \rightarrow \infty$, $\beta + \theta = 90^\circ$, векторы \vec{f} и \vec{p} – взаимно ортогональны.

Значению $\operatorname{tg}\theta = 2^{1/2}$ соответствуют углы $\theta \approx 55^\circ$ и $\theta \approx 125^\circ$; при этих углах θ и любых расстояниях $L = R$ до центра диполя векторы \vec{f} и \vec{p} взаимно

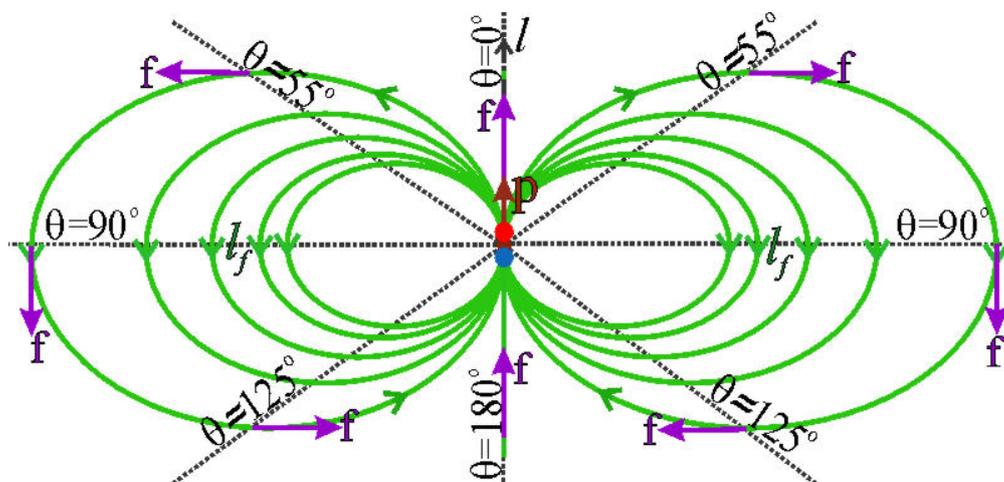


Рис. 17.

Векторные линии l_f и направления векторов \vec{f} поля диполя ортогональны – $\vec{f} \perp \vec{p}$ (см. рис. 17). При $\theta = 90^\circ$, в экваториальной плоскости

диполя, компоненты $f_R=0$, $f_\theta=p/R^3 > 0$. Это означает, что в этой плоскости направления \vec{f} совпадают с направлениями ортов $\vec{1}_\theta$ (см. рис. 4, в), т. е. векторы \vec{f} и \vec{p} имеют противоположные направления ($\vec{f} \uparrow \vec{p}$).

Задача 6. На основе выражений (39), (23) определить потенциал U поля \vec{f} диполя, центр которого помещён в начало O цилиндрической системы координат (r, φ, z) , а момент \vec{p} направлен по оси Z (рис. 4, б, рис. 17, а).

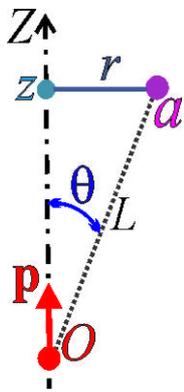


Рис. 17, а.

Решение. В этом случае расстояние от центра O диполя (от начала координат) до точки наблюдения a $L = \sqrt{r^2 + z^2} = (r^2 + z^2)^{1/2}$, а $\cos \theta = z/L$. Поэтому из (39) следует, что потенциал

$$U = \frac{p \cdot z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = p \cdot z \cdot (r^2 + z^2)^{-3/2}. \quad (43)$$

В соответствии с выражением (23) ($f_i = -\frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_i}$) для

К задаче 6 скалярных компонент поля \vec{f} диполя в цилиндрических координатах из (43) получаем (проделайте вычисления самостоятельно):

$$f_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3 \cdot p \cdot z \cdot r}{(r^2 + z^2)^{5/2}}, \quad f_\varphi = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0, \quad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{p \cdot (2z^2 - r^2)}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (44)$$

Поля \vec{f} и U имеют чётную цилиндрическую симметрию относительно оси диполя Z и нечётную зеркальную симметрию относительно плоскости $z=0$ – экваториальной плоскости диполя, проходящей через центр диполя O и ортогональной его моменту \vec{p} .

На рис. 18, а, б, в, г приведены графики вертикальной и горизонтальной компонент поля \vec{f} диполя на горизонтальных профилях при горизонтальном (рис. а, б) и вертикальном (вверх) (рис. в, г) направлении момента диполя \vec{p} . Показаны также векторные линии l_f и направления векторов \vec{f} в нескольких точках на этих профилях.

В первом случае, когда момент \vec{p} направлен по горизонтальной оси Z , а точка наблюдения перемещается по горизонтальной прямой на высоте r_0 над диполем (рис. 18, а, б), из выражений (44) получаем для горизонтальной и вертикальной компонент поля \vec{f} следующие выражения:

$$f_z = \frac{p \cdot (2z^2 - r_0^2)}{(r_0^2 + z^2)^{5/2}}, \quad f_r = \frac{3 \cdot p \cdot r_0 \cdot z}{(r_0^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Над центром диполя (при $z=0$) вектор \vec{f} направлен горизонтально и антипараллелен орту $\vec{1}_z$ (и оси Z). При этом вертикальная компонента f_r равна нулю, а значение горизонтальной компоненты f_z – минимально (максимально по абсолютной величине). С ростом $|z|$ абсолютная величина $|f_r|$ сначала

$|z| = r_0/\sqrt{2}$ компонента $f_z=0$, так как вектор \vec{f} направлен вертикально. Если величина $|z| > r_0/\sqrt{2}$, то $f_z > 0$. При $|z| \rightarrow \infty$: $f_r \rightarrow 0$, $f_z \rightarrow 0$.

Во втором случае, при вертикальном направлении момента диполя \vec{p} (см. рис. 18, в, з) зависимости от координаты x ($x=r$ при $x>0$ и $x=-r$ при $x<0$) вертикальной f_z и горизонтальной $f_x = f_r \cdot x/|x|$ компонент поля диполя

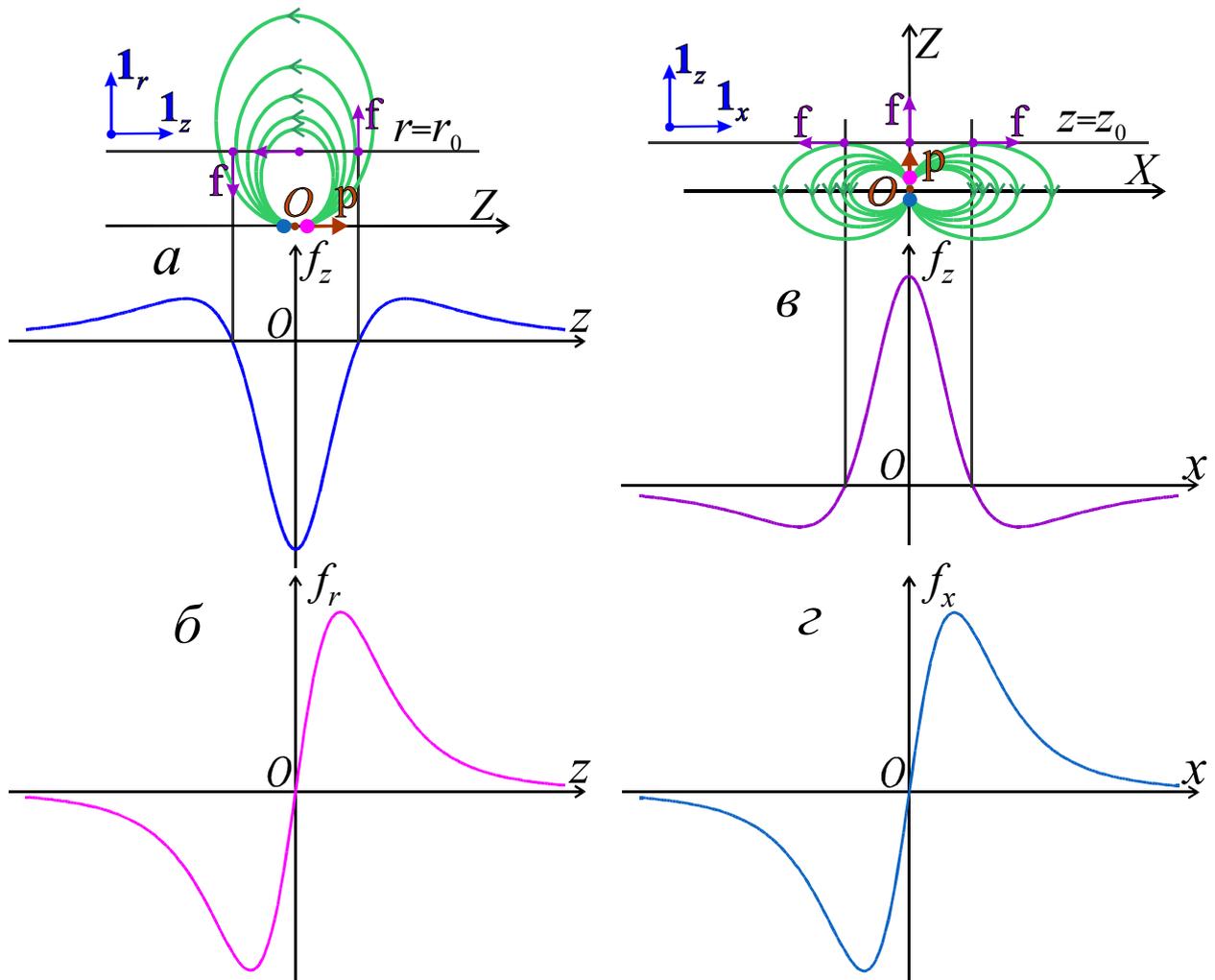


Рис. 18.

Графики горизонтальной (а) и вертикальной (б) компонент поля \vec{f} диполя при горизонтальном направлении момента \vec{p} . Графики вертикальной (в) и горизонтальной (з) компонент поля \vec{f} диполя при вертикальном направлении момента \vec{p}

выглядят иначе. Особенности этих графиков будут вполне понятны, если сопоставить направления векторов \vec{f} и ортов $\vec{1}_x$, $\vec{1}_z$ на этих рисунках.

Задание

Полагая, что центр диполя с моментом $\vec{p} = \vec{1}_z \cdot p$ расположен в начале O декартовых координат x, y, z , определить потенциал U и, пользуясь формулой (23), получить выражения для компонент f_x, f_y, f_z поля \vec{f} диполя в произвольной точке с координатами x, y, z .

Занятие 5

Поле линейных масс

Для "линейно вытянутой" массы (рис. 19) удобно бывает ввести понятие линейной плотности λ , а также (при расчёте поля) заменить её линейной массой. Понятие линейной массы вводят (мысленно) уменьшая поперечное сечение ΔS и соответственно увеличивая объёмную плотность δ так, чтобы линейная плотность $\lambda = dm/dl$ (см. рис. 19) и положение линии l остались неизменными. То есть при $\Delta S \rightarrow 0$ и $\delta = \lambda/\Delta S \rightarrow \infty$ линейная плотность λ – конечная величина.

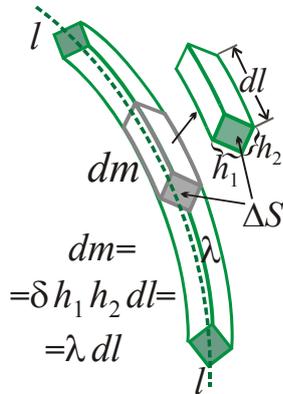


Рис. 19.

К определению понятия "линейная масса"

При таком подходе, т. е. при $\Delta S \rightarrow 0$, получаем линейную массу с конечной линейной плотностью $\lambda = dm/dl = \Delta S \cdot \delta$. Масса элементарного отрезка dl линейной массы: $dm = \lambda \cdot dl$.

На достаточно большом расстоянии от такой массы создаваемое ею поле \vec{f} зависит от положения линии l и распределения λ вдоль этой линии. То есть при этом условии площадь (и форма) сечения ΔS и объёмная плотность δ сами по себе не существенны. Тогда поле физически реальной линейно вытянутой объёмной массы можно заменить проще вычисляемым полем необъёмной линейной массы.

Из (15) – (17) следует, что поле $d\vec{f}$ элемента dl линейной массы, скалярные компоненты df_i поля $d\vec{f}$ и компоненты f_i поля \vec{f} линейной массы по направлению l_i в точке наблюдения a определяют выражения:

$$d\vec{f}(a) = \frac{\lambda \cdot dl \cdot \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_i(a) = \frac{\lambda \cdot dl}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{l}_i), \quad f_i(a) = \int_l df_i. \quad (45)$$

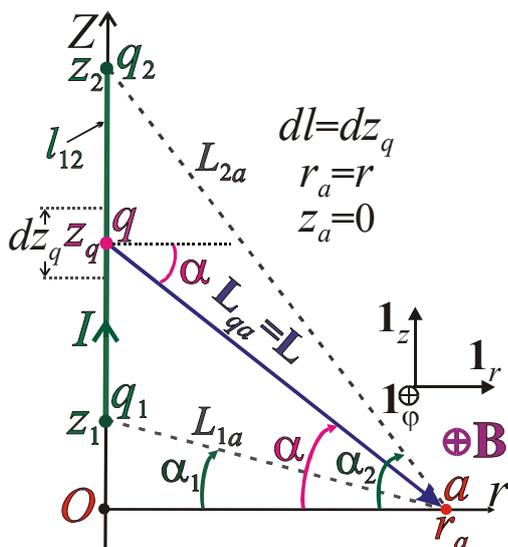


Рис. 20.

К полю отрезка прямой

В (45)₃, конечно, интегрирование – по (точкам q) линии l , на которой расположена линейная масса при неизменном положении точки наблюдения a .

Поле отрезка прямой

Задача 7. Источник статического поля \vec{f} – однородная линейная масса в виде отрезка l_{12} прямой, т. е. в пределах этого отрезка линейная плотность $\lambda = \text{const}$. Определим поле \vec{f} такой массы.

Решение. Отрезок l_{12} и его поле \vec{f} симметричны относительно прямой, на которой лежит этот отрезок. Введём цилиндрическую систему координат так, чтобы отрезок лежал на оси Z (рис. 20).

Выбор полуплоскости $\varphi=0$ (см. [рис. 4, б](#)) – произволен. Начало координат выберем так, чтобы плоскость $z=0$ проходила через точку наблюдения a . Тогда $r_a=r$, $z_a=0$. Координаты концов отрезка: $r=0$, $z=z_1$ и $r=0$, $z=z_2$. Произвольная точка q отрезка l_{12} имеет координаты: $r_q=0$, $z_q=z$, $z_1 \leq z \leq z_2$.

Согласно (5) для цилиндрически симметричного поля \vec{f} (с чётной симметрией относительно оси Z) справедливо выражение:

$$\vec{f} = \vec{1}_r \cdot f_r + \vec{1}_z \cdot f_z.$$

Выражения для f_r и f_z получим (пользуясь (45)₃) путем суммирования компонент df_r и df_z полей $d\vec{f}$, создаваемых всеми элементами $dl=dz$ отрезка $z_1 z_2$. Как видно на [рис. 20](#), в соответствии с (45)₂

$$df_r = \frac{\lambda dz}{L^2} \cos \alpha, \quad df_z = \frac{\lambda dz}{L^2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\frac{\lambda dz}{L^2} \sin \alpha,$$

где $L = |\vec{L}_{qa}|$, α – угол $(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_r)$. Так как при интегрировании координата точки наблюдения $r=\text{const}$, а

$$\cos \alpha = \frac{r}{L}, \quad L = \frac{r}{\cos \alpha}, \quad \text{tg } \alpha = \frac{z}{r}, \quad z = r \cdot \text{tg } \alpha, \quad \frac{dz}{d\alpha} = \frac{r}{\cos^2 \alpha}, \quad dz = \frac{r \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

для компонент df_r, df_z получаем

$$df_r = \frac{\lambda}{r} \cos \alpha d\alpha, \quad df_z = -\frac{\lambda}{r} \sin \alpha d\alpha.$$

Тогда

$$f_r = \frac{\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1),$$

$$f_z = -\frac{\lambda}{r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{r} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1).$$

Теперь, чтобы выразить компоненты f_r, f_z в цилиндрических координатах, следует вспомнить о том, что (см. [рис. 20](#))

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{r}{(r^2 + z_{1,2}^2)^{1/2}}, \quad \sin \alpha_{1,2} = \frac{z_{1,2}}{(r^2 + z_{1,2}^2)^{1/2}}.$$

Задание. На основе выражения (29) для потенциала U поля \vec{f} линейных масс:

$U(a) = \int_l \frac{\lambda dl}{L_{qa}}$ определить потенциал U показанного на [рис. 20](#) отрезка прямой и

определить компоненты f_r, f_φ, f_z поля \vec{f} пользуясь равенством (23):

$$f_i = -\frac{1}{h_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial \xi_i}.$$

Частный случай. Если проекция точки наблюдения a на ось Z лежит посередине отрезка l_{12} , то $-\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0 > 0$ или $-z_1 = z_2 = z_0 > 0$. Тогда из полученных выше выражений получаем:

$$\vec{f} = \vec{1}_r \cdot f_r, \quad f_r = \frac{2\lambda}{r} \cdot \sin \alpha_0 = \frac{2\lambda}{r} \cdot \frac{z_0}{(r^2 + z_0^2)^{1/2}}. \quad (46)$$

Поле "прямой"

В следующей задаче, а также в задачах 10, 14, будем определять поле масс, неограниченных по одному или двум направлениям. Поле таких масс обычно проще вычислить, чем поле масс конечных размеров, и в некоторых случаях полями масс, имеющих неограниченную протяжённость, бывает удобно заменить поля соответствующих более реальных масс при достаточно большой протяжённости последних. Например, выражение (47) очевидно, справедливо не только при $z_0 \rightarrow \infty$, но и при $z_0 \gg r$ (см. ниже).

Задача 8. Условия те же, что в задаче 7, но однородная линейная масса в виде отрезка прямой имеет неограниченную длину, то есть источник статического поля \vec{f} – бесконечно длинная однородная прямолинейная масса («прямая»). Определим поле \vec{f} и потенциал U поля такой массы.

Решение. Полагая в выражении (46) $z_0 \rightarrow \infty$, ($\alpha_0 \rightarrow \pi/2$), получаем

$$\vec{f} = \vec{1}_r \cdot f_r, \quad f_r = \frac{2\lambda}{r}. \quad (47)$$

Согласно (47) векторные линии l_f поля \vec{f} при $\lambda > 0$ совпадают с координатными линиями l_r (см. рис. 4, б), т. е. линии l_f – лучи, выходящие из точек оси Z и ортогональные этой оси.

При любых r , в том числе при $r \rightarrow \infty$, абсолютная величина f поля \vec{f} убывает с удалением от источника поля медленнее, чем $1/r^2$, где r – расстояние от источника поля до точки наблюдения. Такое поле называют нерегулярным на бесконечности. Потенциальная энергия таких полей – бесконечно велика. Поэтому, как убедимся ниже, (для того, чтобы можно было пользоваться таким понятием, как разность потенциалов) нулевой потенциал нерегулярного на бесконечности поля следует выбирать на конечном расстоянии от источника поля.

Определим потенциал поля "прямой". Векторные линии l_f ортогональны эквипотенциальным поверхностям $U = \text{const}$. Из выражения (47) следует, что поверхности $U = \text{const}$ – цилиндрические ($r = \text{const}$) с осью Z (рис. 21, а), то есть $U = U(r)$.

Воспользуемся выражением (27). На рис. 21, а показаны соединенные произвольной линией l точки a и ϕ , лежащие на эквипотенциальных поверхностях $r = r_a = \text{const}$ и $r_\phi = \text{const}$ с потенциалами $U(r_a) = U(r)$ и $U(r_\phi)$ соответственно. В соответствии с (27), (47) потенциал цилиндрической поверхности с радиусом r

$$U(a) = U(r) = \int_a^\phi (\vec{f} \cdot d\vec{l}) + U(r_\phi) = \int_{r_a}^{r_\phi} f_r dr + U(r_\phi), \quad (48)$$

где принято во внимание, что при $\vec{f} = \vec{f}_r = \vec{1}_r \cdot f_r$ имеем: $(\vec{f} d\vec{l}) = f_r \cdot (\vec{1}_r d\vec{l}) = f_r \cdot dr$, так как скалярное произведение $(\vec{1}_r d\vec{l}) = dr$ (см. рис. 21, а). Таким образом, согласно (47), (48)

$$U(r) = 2\lambda \cdot \int_r^{r_\phi} \frac{1}{r} dr + U(r_\phi) = 2\lambda \cdot (\ln r_\phi - \ln r) + U(r_\phi) = 2\lambda \cdot \ln \frac{r_\phi}{r} + U(r_\phi). \quad (49)$$

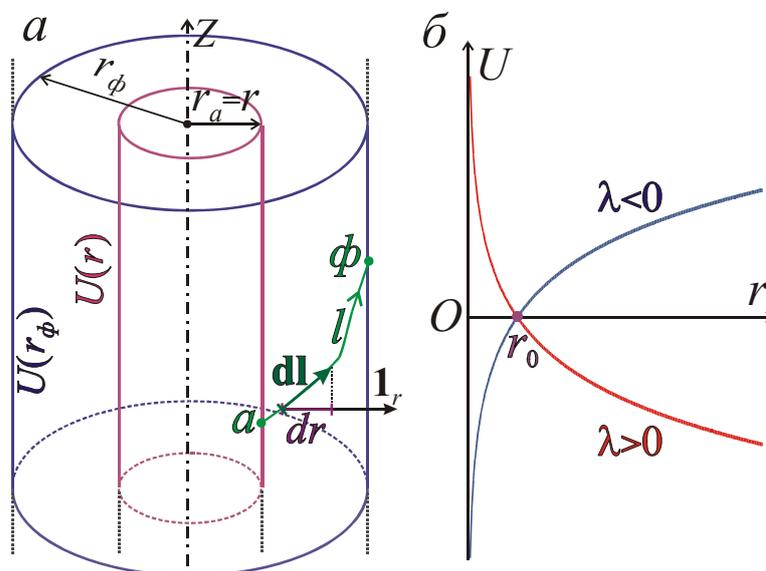


Рис. 21.

К потенциалу U поля "прямой"

Если выберем потенциал $U=0$ при $r \rightarrow \infty$ (то есть $U(r_\phi)=0$ при $r_\phi \rightarrow \infty$), то получим $U \rightarrow \infty$ при любых конечных значениях $r_a=r$. Выберем поэтому $U=0$ при $r=r_0$, где r_0 – не равное нулю конечное расстояние от точки наблюдения до неограниченной однородной прямолинейной массы. Тогда

$$U = 2\lambda \cdot \ln \frac{r_0}{r} = -2\lambda \cdot \ln \frac{r}{r_0}. \quad (50)$$

Графики функции $U(r)$ при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ приведены на рис. 21, б. При сделанном выборе нулевого потенциала на конечном расстоянии r_0 от источника поля и при $\lambda > 0$, имеем: $U \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$ и $U \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Вне однородной линейной массы в виде «прямой», при $r \neq 0$, потенциал U ограничен на любом конечном расстоянии r от этой «прямой». При таком выборе можем пользоваться таким понятием, как "разность потенциалов". Определяемый выражением (50) потенциал U называют логарифмическим потенциалом.

Занятие 6

Поле поверхностных масс

При рассмотрении поля масс "пластообразной" формы, то есть масс, толщина (мощность) которых много меньше других их размеров, бывает удобно ввести понятие поверхностной плотности σ (рис. 22):

$$dm = \delta dV = \delta h dS = \sigma dS, \quad \sigma = \delta h = dm/dS,$$

$$dm = \delta h dS = \sigma dS$$

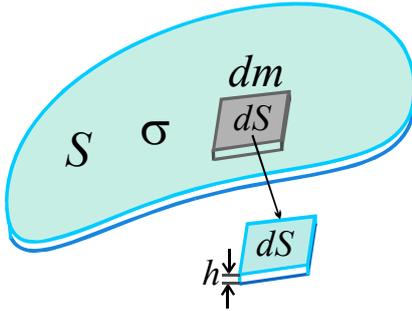


Рис. 22.

К полю поверхностной массы в виде простого слоя

поверхностной плотностью σ , лежащей на поверхности S и называемой "простой слой".

Понятие такой поверхностной массы вводят, полагая, что $h \rightarrow 0$, $\delta = \sigma/h \rightarrow \infty$, но при этом поверхностная плотность σ – конечная величина, такая же, как у физически реальной объёмной массы в виде достаточно тонкого слоя с мощностью h . Элементарную поверхностную массу dm , лежащую на площадке dS , определяет выражение: $dm = \sigma \cdot dS$.

Тогда, согласно (15) $(d\vec{f}(a) = dm \cdot \vec{L}_{qa} / L_{qa}^3$,

$df_l(a) = dm \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l) / L_{qa}^2$) поле $d\vec{f}(a)$ элементарной поверхностной массы dm с «центром» в точке q , скалярную компоненту $df_l(a)$ поля $d\vec{f}(a)$ по направлению l , а также компоненту $f_l(a)$ по направлению l поля \vec{f} поверхностной массы, лежащей на поверхности S , в точке наблюдения a определяют выражения:

$$d\vec{f}(a) = \frac{\sigma dS \cdot \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_l(a) = \frac{\sigma dS}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l), \quad f_l(a) = \int_S df_l(a). \quad (51)$$

В последнем выражении при интегрировании точка q "пробегаёт" поверхность S , а положение точки a остаётся неизменным.

В соответствии с (29), (51) потенциал $U(a)$ поля $\vec{f}(a)$ поверхностной массы с плотностью $\sigma(q)$, лежащей на поверхности S (при ограниченных размерах S), определяют выражение

$$U(a) = \int_S dU(a) = \int_S \frac{dm(q)}{L_{qa}} = \int_S \frac{\sigma(q)}{L_{qa}} dS. \quad (52)$$

Поле на оси «круга»

Задача 9. Пусть однородная ($\sigma = \text{const}$) поверхностная масса имеет форму круга с радиусом $r_{\text{кр}}$. Определим поле \vec{f} в точке a на оси симметрии такой массы (на оси «круга»).

Решение. Поле \vec{f} симметрично относительно оси круга. Введём систему цилиндрических координат r, φ, z , совместив ось Z с осью «круга», а начало

координат O – с центром «круга». Выбор полуплоскости $\varphi=0$ – произволен. На **рис. 23, а, б, в** показаны три проекции «круга» и система координат.

На **рис. 23, а** видим, что при $\sigma=\text{const}$ и $\sigma>0$ на оси Z круга поле \vec{f} направлено по этой оси. Показаны пары одинаковых элементарных площадок dS симметричных относительно центра O «круга». При $\sigma=\text{const}$ массы dm на этих площадках одинаковы и на оси Z сумма полей $d\vec{f}$ этих масс при $\sigma>0$ направлена по оси Z (см. **рис. 23,а**), а при $\sigma<0$ – в противоположную сторону. Но и весь «круг» мы можем мысленно "разбить" на пары таких симметричных относительно точки O бесконечно-малых площадок dS и каждая пара масс dm на этих площадках dS будет "вносить вклад" только в z – компоненту поля \vec{f} на оси Z . Следовательно,

$$\text{на оси } Z \text{ (при } r=0), \quad \vec{f} = \vec{1}_z \cdot f_z. \quad (53)$$

Теперь для применения формул (51), (52) нам нужно оптимальным образом "разбить" «круг» на элементарные площадки dS . Сделаем это при

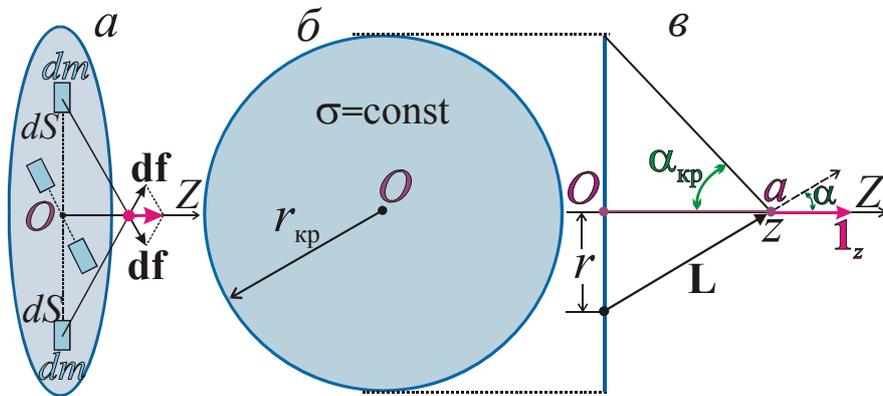


Рис. 23.

К полю на оси "круга"

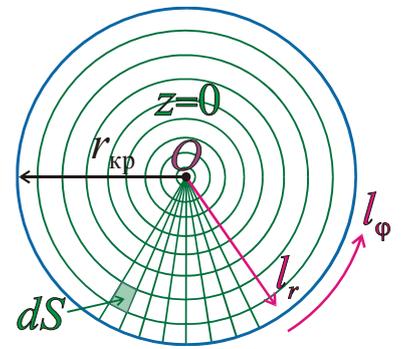


Рис. 24.

К расчёту поля на оси "круга"

помощи отрезков координатных линий l_r (радиусов «круга») и координатных линий l_φ (окружностей с центром в точке O). "Разобьём" «круг» на множество элементарных координатных площадок $dS = dl_r \cdot dl_\varphi = dr \cdot r \cdot d\varphi = r \cdot dr \cdot d\varphi$, где r – коэффициент Ламэ для координаты φ (см. (3) и **рис. 24**).

При интегрировании пределы изменения координат в источнике поля: $0 \leq r \leq r_{\text{кр}}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, а координата z точки наблюдения a имеет произвольное фиксированное значение. Элементарную поверхностную массу dm на координатной площадке dS определяет выражение: $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$. Следовательно, в соответствии с (23) и вторым равенством в (51), на оси Z «круга» для компоненты df_z поля массы dm имеем

$$df_z(z) = \frac{\sigma \cdot dS}{L^2} \cos(\vec{L}, \vec{1}_z) = \frac{\sigma \cdot dS}{L^2} \cos \alpha = \frac{\sigma \cdot z \cdot dS}{L^3} = \frac{\sigma \cdot z \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

так как $\cos \alpha = z/L$ (см. **рис. 23, в**), а $L = (r^2 + z^2)^{1/2}$.

Тогда согласно третьему равенству в (51) компоненту f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ «круга» на его оси Z можем определить следующим образом:

$$f_z(z) = \int_S df_z(z) = \sigma \cdot z \cdot \int_0^{r_{\text{кр}}} \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr d\varphi = \pi \cdot \sigma \cdot z \cdot \int_0^{r_{\text{кр}}} (r^2 + z^2)^{-3/2} 2r dr.$$

Примем во внимание, что производная $\frac{dr^2}{dr} = 2r$ и, следовательно, $2r \cdot dr = dr^2$. Так как координата z точки наблюдения a не меняется при интегрировании по источнику поля – простому слою на поверхности S круга, то $2r \cdot dr = dr^2 = d(r^2 + \text{const}) = d(r^2 + z^2)$, то есть

$$\int_0^{r_{\text{кр}}} (r^2 + z^2)^{-3/2} 2r dr = \int_0^{r_{\text{кр}}} (r^2 + z^2)^{-3/2} d(r^2 + z^2) = 2 \cdot \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(r_{\text{кр}}^2 + z^2)^{1/2}} \right],$$

где принято во внимание, что $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$, а арифметический квадратный корень $\sqrt{z^2} = |z|$. Следовательно, на оси Z для ненулевой компоненты f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ «круга» получаем выражение:

$$f_z = 2\pi \cdot \sigma \cdot z \cdot \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2}} \right) = 2\pi \cdot \sigma \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2}} \right) = 2\pi \cdot \sigma \cdot \frac{z}{|z|} \cdot (1 - \cos \alpha_{\text{кр}}). \quad (54)$$

где $\alpha_{\text{кр}}$ – плоский угол, под которым из точки наблюдения a на оси Z виден радиус круга $r_{\text{кр}}$ (см. [рис. 23, в](#)).

График функции $f_z(z)$ при $\sigma > 0$ приведен на [рис. 25, а](#). Независимо от величины $r_{\text{кр}}$ разрыв нормальной к поверхностной массе с поверхностной плотностью σ компоненты f_z поля $\vec{\mathbf{f}}$ равен $4\pi\sigma$. Таким же, в частности, этот разрыв будет и при сколь угодно малой величине $r_{\text{кр}}$.

Получим выражение для потенциала U , определяемого выражениями (53), (54), поля $\vec{\mathbf{f}}$ на оси Z «круга» (потенциала U на оси однородного простого слоя в форме круга).

Согласно второму равенству в (28) при $C=0$ потенциал dU поля $d\vec{\mathbf{f}}$ элементарной массы $dm = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi$ (см. [рис. 24](#)) на оси Z «круга» определяет выражение:

$$dU(z) = \frac{dm}{L} = \frac{\sigma \cdot dS}{L} = \frac{\sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi}{(r^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Тогда, в соответствии с (52), при $\sigma = \text{const}$

$$U(z) = \int_0^{r_{\text{кр}}} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = \pi \cdot \sigma \cdot \int_0^{r_{\text{кр}}} \frac{d(r^2 + z^2)}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = 2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \left(\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2} - |z| \right). \quad (55)$$

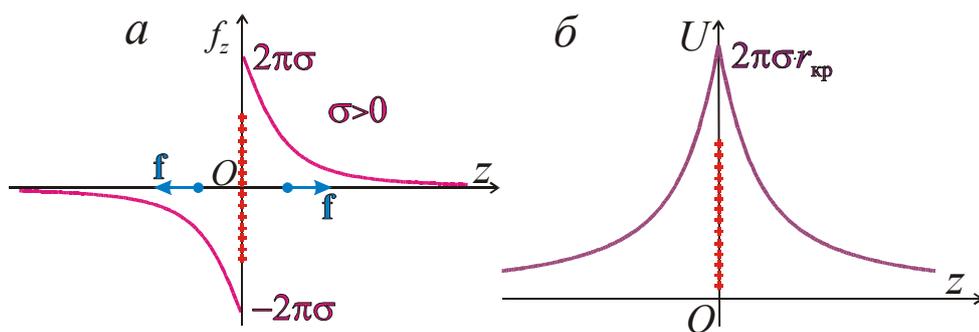


Рис. 25.

К полю однородной поверхностной массы (заряда) в форме круга. Зависимости компоненты f_z (а) и U (б) от координаты z

Определяемая выражением (55) зависимость $U(z)$ на оси Z круга (при $\sigma > 0$) показана на рис. 25, б. Как видно на этом рисунке, $U(z)$ – чётная непрерывная

функция координаты z . В частности, функция $U(z)$ непрерывна при $z \rightarrow 0$ (на простом слое). Выражение (55) может служить одним из примеров, показывающих, что на поверхностной массе в виде простого слоя с плотностью σ потенциал U поля \vec{f} непрерывен.

Выражение (54) для компоненты f_z можем получить из (55) дифференцированием. Действительно, согласно (23) $f_z = -\partial U / \partial z$, то есть

$$f_z = -2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2} - |z| \right) =$$

$$= -2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|} \right) = 2\pi \cdot \sigma \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{r_{\text{кр}}^2 + z^2}} \right)$$

так как производная $\partial|z|/\partial z = z/|z|$.

Поле «плоскости»

Задача 10. Определить поле неограниченной плоской однородной поверхностной массы («плоскости») с поверхностной плотностью $\sigma = \text{const}$.

Решение. Такую поверхностную массу можем рассматривать как однородную массу в виде круга бесконечно большого радиуса. Выбрав ту же систему координат, что и при решении задачи 9, и положив $r_{\text{кр}} \rightarrow \infty$ ($\alpha_{\text{кр}} \rightarrow \pi/2$), из выражений (53), (54) получаем:

$$\vec{f} = \vec{1}_z \cdot f_z, \quad f_z = 2\pi \cdot \sigma \cdot \frac{z}{|z|}. \quad (56)$$

Отметим, что хотя выражение (56) для поля плоскости и получено из формул (54), (55), определяющих поле \vec{f} на оси симметрии Z круга, оно справедливо для произвольной точки пространства, так как любая прямая, ортогональная однородной неограниченной плоской массе, будет осью симметрии этой массы и её поля. Векторные линии l_f поля \vec{f} – лучи, выходящие (при $\sigma > 0$) из точек плоскости и ей ортогональные. График функции $f_z(z)$ приведен на рис. 26, а. В соответствии с (56) поле лежащей на плоскости однородной поверхностной массы с плотностью σ («плоскости») не убывает с

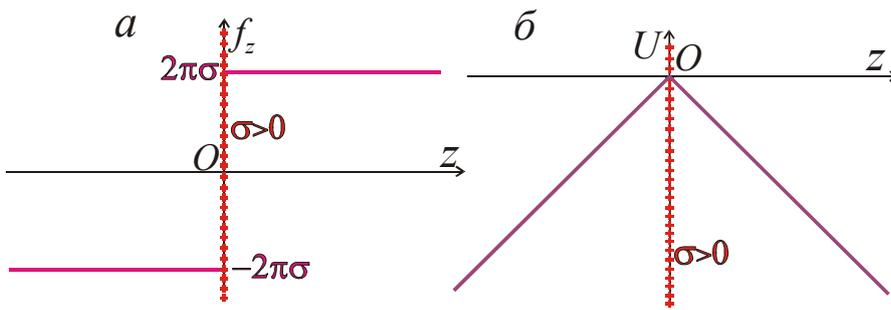


Рис. 26.

К полю "плоскости". Зависимости компоненты f_z (а) и потенциала U (б) от координаты z

удалением от этой массы. Это обусловлено тем, что у векторных линий l_f такого поля \vec{f} нет "геометрического расхождения".

Определим потенциал поля такой массы. Согласно (22)

векторы \vec{f} направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям, то есть в соответствии с (56) эквипотенциальные поверхности – плоскости $z=\text{const}$ и $U=U(z)$. Так как при $\vec{f} = \vec{1}_z \cdot f_z$ скалярное произведение $(\vec{f} \, d\vec{l}) = f_z \cdot (\vec{1}_z \, d\vec{l}) = f_z \cdot dz$, из выражения (27) получаем:

$$U(z) = \int_z^{z_\phi} f_z \, dz + U(z_\phi). \quad (57)$$

Определяемое выражением (56) поле \vec{f} нерегулярно на бесконечности. Поэтому, чтобы потенциал U имел ограниченные значения на конечных расстояниях от источника поля, выберем $U=0$ при $z=0$ (то есть $z_\phi=0$, $U(z_\phi)=0$). Примем во внимание, что производная $d|z|/dz = z/|z|$, а неопределённый интеграл $\int (z/|z|) dz = |z| + \text{const}$. Тогда

$$U(z) = 2\pi \cdot \sigma \cdot \int_z^0 \frac{|z|}{z} dz = -2\pi \cdot \sigma \cdot |z| \quad (58)$$

или $U = -2\pi \cdot \sigma \cdot z$ при $z > 0$, $U = 2\pi \cdot \sigma \cdot z$ при $z < 0$.

График функции $U(z)$ при $\sigma > 0$ показан на рис. 26, б. Согласно (58) на поверхностной массе с плотностью σ потенциал непрерывен. То, что при $z=0$ функция $U(z)$ – не дифференцируема согласуется с тем, что нормальная к поверхностной массе компонента $f_z = -dU/dz$ терпит разрыв на этой массе (см. рис. 26, а). Заметим, что потенциал U однородного поля \vec{f} линейно убывает по направлению этого поля (см. рис. 26, а, б).

Занятие 7

Поле "сферической поверхности"

Задача 11. Однородная поверхностная масса в виде простого слоя ($\sigma = \text{const}$), лежащая на замкнутой поверхности S_0 , имеет форму сферы с радиусом R_0 . Определим поле \vec{f} такой массы и его потенциал U во внутренней (V_i) и внешней (V_e) областях (рис. 27).

Реальным примером такого источника может быть следующее. Если на проводник в форме шара "поместить" свободный электрический заряд (электроны или

ионы одного знака), то (в отсутствии других зарядов) под действием кулоновых сил в случае статического поля эти заряды будут равномерно распределены в микроскопически тонком слое у поверхности проводника. При "макроскопическом" подходе такой слой зарядов можно заменить однородным поверхностным зарядом с плотностью σ .

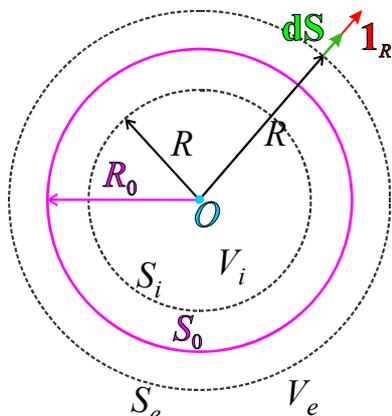


Рис. 27.

К полю "сферической поверхности"

Решение. Источник поля и его поле \vec{f} – сферически симметричны. В сферической системе координат R, θ, φ с началом O в центре сферической поверхности S_0 согласно (9)

$$\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R, \quad f_R = f_R(R). \quad (59)$$

Представим себе две сферические поверхности с радиусами R : S_i ($R < R_0$) и S_e ($R > R_0$) с общим центром в начале координат O (см. рис. 27). Учтём, что ориентированные площадки $d\vec{S}$ каждой такой сферической поверхности S направлены как орты $\vec{1}_R$ на всей поверхности, т. е. $d\vec{S} = \vec{1}_R \cdot dS$. В таком случае скалярное произведение

$$(\vec{f} \cdot d\vec{S}) = f \cdot dS \cdot \cos(\vec{f}, d\vec{S}) = f \cdot \cos(\vec{f}, \vec{1}_R) \cdot dS = f_R \cdot dS,$$

следовательно, поток вектора \vec{f} через сферическую поверхность S с радиусом R :

$$\oint_S (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = \oint_S f_R dS = f_R \cdot \oint_S dS = f_R \cdot 4\pi R^2,$$

так как на поверхности S координата $R = \text{const}$ и согласно (59) скалярная компонента f_R одинакова во всех точках такой поверхности. Тогда закон Гаусса

$$(21) \left(\oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = 4\pi \cdot m_V \right) \text{ принимает вид } 4\pi \cdot R^2 \cdot f_R = 4\pi \cdot m_V \text{ или}$$

$$f_R = \frac{m_V}{R^2}, \quad (60)$$

где m_V – масса в области V , ограниченной сферической поверхностью с радиусом R . Отметим, что равенство (60) справедливо для любого сферически-симметричного поля \vec{f} , удовлетворяющего условию (59).

Применяя уравнение (60) к поверхностям S_i и S_e (см. рис. 27) и учитывая, что для этих поверхностей масса m_V соответственно равна 0 и $m_0 = 4\pi \cdot R_0^2 \cdot \sigma$, для областей V_i и V_e получаем:

$$f_R^i = 0, \quad f_R^e = \frac{m_0}{R^2} = \frac{4\pi \cdot R_0^2 \cdot \sigma}{R^2}. \quad (61)$$

График функции $f_R(R)$ приведен на рис. 28, а. Согласно (61) компонента f_R поля \vec{f} , нормальная к поверхностной массе, терпит на этой массе разрыв, равный $4\pi\sigma$, см. рис. 28, а, а также рис. 25, а, рис. 26, а. На рис. 28, б приведены зависимости $f_R(R)$ для двух "сферических поверхностей" с радиусами $R_0 = R_1$, $R_0 = R_2$ и с одинаковой поверхностной плотностью σ .

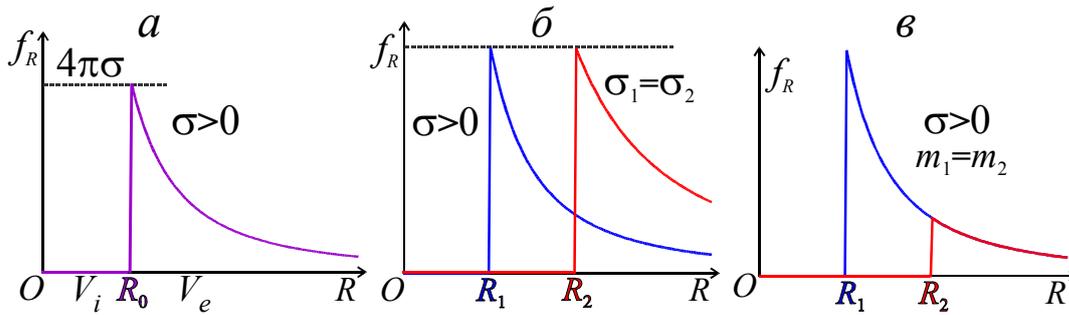


Рис. 28.

Зависимости компоненты f_R поля \vec{f} "сферической поверхности" от R

На рис. 28, в, сопоставлены зависимости $f_R(R)$ для случая, когда две "сферические поверхности" имеют разные радиусы и плотности σ , но массы (заряды) их одинаковы, т. е. $m_1 = m_2$ или $\sigma_1 \cdot R_1^2 = \sigma_2 \cdot R_2^2$. В соответствии с (61) в не имеющей внешней границы области пространства, при $R > R_2$, поля \vec{f} масс m_1 , m_2 полностью совпадают. Согласно (31), (61) эти поля нельзя отличить от поля точечной массы m . Этот рисунок может служить простейшей иллюстрацией неоднозначности решения обратных задач в геофизике. В обширных областях пространства поля, создаваемые разными источниками, могут быть одинаковыми.

Найдём потенциал U поля \vec{f} «сферической поверхности» (однородного простого слоя на поверхности сферы с радиусом R_0), определяемого выражениями (59), (61). Согласно (59), (22) потенциал U сферически симметричного поля \vec{f} – функция координаты R : $U = U(R)$. Выполняя преобразования, аналогичные тем, которые были проведены при выводе выражения (48), из (27) для поля $\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R(R)$ получаем:

$$U(R) = \int_R^{R_\phi} f_R dR + U(R_\phi). \quad (62)$$

Согласно (61) подынтегральную функцию f_R в (62) в областях пространства V_i и V_e определяют разные выражения. Определим сначала потенциал U_e в области V_e . Полагая, что $U_e = 0$ при $R \rightarrow \infty$ (т. е. $R_\phi \rightarrow \infty$, $U(R_\phi) = 0$), из (62), (61)₂ получаем:

$$U_e = \int_R^\infty f_R^e dR + 0 = \frac{m_0}{R} = \frac{4\pi \cdot R_0^2 \cdot \sigma}{R}. \quad (63)$$

Из (63) следует, что при $R = R_0$ потенциал $U(R_0) = 4\pi \cdot \sigma \cdot R_0$. Учтём, что потенциал U на поверхностной массе с плотностью σ (на простом слое) непрерывен (см. рис. 25, б, рис. 26, б), т. е. $U_i(R_0) = U_e(R_0) = U(R_0)$, где $U(R_0)$ – потенциал на простом слое. Из (61)₁, полагая в (62) $R_\phi = R_0$, $U_\phi = U(R_0)$, для потенциала U в области V_i получаем:

$$U_i = \int_R^{R_0} f_R^i dR + U(R_0) = 0 + U(R_0) = 4\pi \cdot \sigma \cdot R_0. \quad (64)$$

Согласно (64) при $\vec{f}_i=0$ область V_i – эквипотенциальна, то есть потенциал U_i одинаков во всех точках области пространства V_i (не зависит от положения точки наблюдения a в этой области). Это вполне понятно, так как в соответствии с (22), (61)₁ $\text{grad } U_i = -\vec{f}_i = 0$.

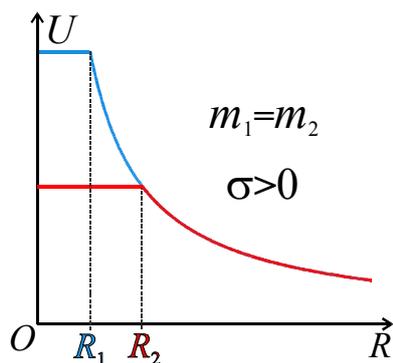


Рис. 29.

К потенциалу U поля
"сферической
поверхности"

На рис. 29 показаны графики функции $U(R)$ при двух радиусах R_1, R_2 поверхности S_0 и одинаковых по величине поверхностных массах (зарядах), то есть при $m_1=m_2=m_0$. Согласно (63) при любом радиусе однородной поверхностной массы m_0 в форме сферы потенциал U поля \vec{f} снаружи этой сферы (в области V_e) зависит только от величины m_0 и расстояния R от центра O сферы. В соответствии с (28)₁ он неотличим от потенциала U поля \vec{f} , какое создавала бы

точечная масса m_0 , расположенная в точке O .

Поле объёмных масс

Как уже было отмечено, если мы не изучаем влияние на различные поля отдельных атомов или молекул, а рассматриваем поле его "макроскопических" источников, то физически реальной «массой», как источника статического поля, является масса объёмная. Такую массу характеризует объёмная плотность $\delta=dm/dV$. Соответственно, элементарную объёмную массу dm в элементе объёма dV определяет выражение: $dm=\delta \cdot dV$.

Согласно (16), (17) в точке наблюдения a поле $d\vec{f}$ элементарной объёмной массы dm (с центром в точке q), скалярную компоненту df_l этого поля и компоненту f_l поля \vec{f} объёмной массы, находящейся в области V , определяют выражения:

$$d\vec{f}(a) = \frac{\delta \cdot dV \cdot \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3}, \quad df_l(a) = \frac{\delta \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_l)}{L_{qa}^2} dV, \quad f_l(a) = \int_V df_l,$$

где $\delta=\delta(q)$, а при интегрировании точка q «пробегает» область V . В частности, в декартовых координатах x, y, z для скалярной компоненты f_x поля \vec{f} такой объёмной массы имеем:

$$f_x(a) = \int_V \frac{\delta(q) \cdot (x_a - x_q)}{\left[(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2 \right]^{3/2}} dx_q dy_q dz_q.$$

Если объёмная масса имеет простую (симметричную) форму, то компоненты её поля \vec{f} бывает проще вычислить не на основе приведенного выше выражения для f_l , а пользуясь уравнениями (19) или (21). Определим поле \vec{f} некоторых таких симметричных однородных объёмных масс.

Поле "шара"

Задача 12. Источник статического поля \vec{f} – однородная объёмная масса в форме шара с радиусом $R_{\text{ш}}$ (рис. 30, а). Внутри шара (область V_i) объёмная

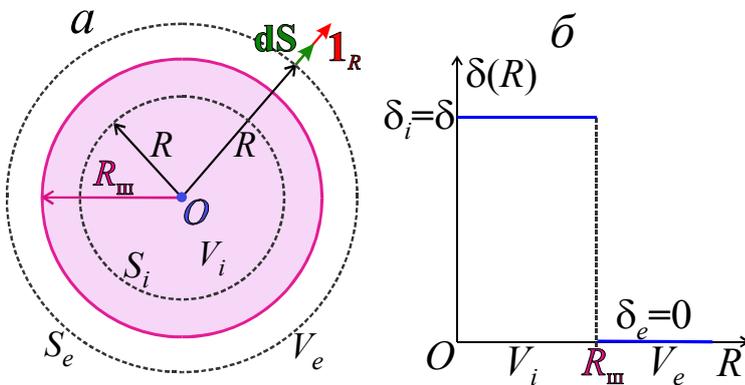


Рис. 30.

К полю "шара"

плотность $\delta_i = \delta = \text{const}$; вне шара (область V_e) $\delta_e = 0$. На основе закона Гаусса (21) и следующего из него выражения (60) для сферически симметричного поля определим поле \vec{f} , а затем потенциал U поля \vec{f} в областях V_i и V_e .

Решение.

Поместим начало сферических координат O в центр шара

(см. рис. 30, а). Тогда объёмная плотность $\delta = \delta(R)$ (рис. 30, б). Однородная масса в форме шара и её поле \vec{f} сферически симметричны относительно точки O , следовательно, для такого источника поля \vec{f} справедливы равенства (59), то есть поле

$$\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R, \quad f_R = f_R(R). \quad (65)$$

В этой задаче получим её решение тем же способом, который был применён при решении задачи 11.

Воспользуемся полученным для сферически симметричного поля следствием из закона Гаусса, т.е. равенством (60), согласно которому в сферических координатах R, θ, φ для единственной ненулевой компоненты f_R такого поля \vec{f} справедливо выражение:

$$f_R = \frac{m_V}{R^2},$$

где m_V – масса в области V , ограниченной сферической поверхностью с радиусом R . Применяя равенство (60) к показанным на рис. 30, а сферическим поверхностям S_i и S_e (радиусы R которых соответственно меньше и больше $R_{\text{ш}}$) и учитывая, что массы m_V , в областях V , ограниченных этими поверхностями, соответственно равны $(4/3) \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \delta$ и $(4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta$, получаем:

$$f_R^i = (4/3) \cdot \pi \cdot \delta \cdot R, \quad f_R^e = \frac{(4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta}{R^2} = \frac{m_{\text{ш}}}{R^2}, \quad (66)$$

где f_R^i и f_R^e – R -компонента поля \vec{f} в областях V_i и V_e соответственно, а $m_{\text{ш}} = (4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta$ – масса однородного шара с плотностью δ и с радиусом $R_{\text{ш}}$.

Выражения (65), (66) определяют поле \vec{f} , создаваемое однородной объёмной массой в форме шара. График функции $f_R(R)$ при $\delta > 0$ приведен на рис. 31, а. Согласно (66) поле \vec{f} равно нулю в начале координат O – центре

симметрии объёмной массы в виде однородного шара, и непрерывно в этой массе и на её границе. Величина $|f_R|$ имеет максимум при $R=R_{\text{ш}}$ (на поверхности шара).

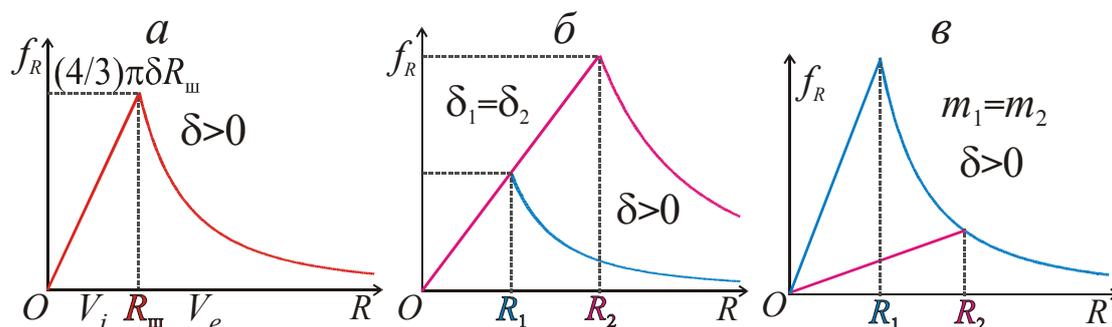


Рис. 31.

Зависимости компоненты f_R поля \vec{f} "шара" от R

Как следует из (66), компоненту f_R^i полностью определяют значения δ и R , а компоненту f_R^e – значения $m_{\text{ш}}$ и R . Это иллюстрируют **рис. 31, б, в**, где показаны зависимости $f_R(R)$ при двух значениях $R_{\text{ш}}$ ($R_{\text{ш}}=R_1$ и $R_{\text{ш}}=R_2$). Графики на **рис. 31, б** соответствуют случаю, когда массы в форме шара разного радиуса имеют одинаковую плотность δ , а кривые на **рис. 31, в** – случаю, когда массы $m_{\text{ш}}$ таких шаров одинаковы (а их плотности δ , соответственно, имеют разные значения).

На **рис. 31, в** видно, что при $m_{\text{ш}}=\text{const}$ в области V_e , внешней для обеих масс, поля масс (одинаковых по величине $m_{\text{ш}}$, но разных по радиусу $R_{\text{ш}}$) совпадают. Следовательно, в этой области нельзя отличить одно из этих полей от другого. При сравнении выражений (66)₂ для f_R^e и (31) видим, что поле, создаваемое массой $m_{\text{ш}}$ в форме шара с центром в точке O , вне этой массы совпадает с полем точечной массы $m=m_{\text{ш}}$ расположенной в точке O .

Определим потенциал поля шара. При выполнении условия (65) можем воспользоваться выражением (62). Выбирая $U=0$ при $R \rightarrow \infty$ и принимая во внимание, что $\int R^n dR = \frac{R^{n+1}}{n+1} + C$, из (62), (66), получаем для потенциала U_e в области V_e :

$$U_e = \int_R^\infty f_R^e dR + 0 = \frac{m_{\text{ш}}}{R} = \frac{(4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta}{R}. \quad (67)$$

На поверхности шара (при $R=R_{\text{ш}}$) имеем $U(R_{\text{ш}}) = (4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^2 \cdot \delta$. При учёте того, что потенциал U статического поля \vec{f} непрерывен в объёмной массе и на поверхности такой массы, для потенциала U_i внутри шара ($R < R_{\text{ш}}$) из (62), (66)₁ получаем

$$U_i = \int_R^{R_{\text{ш}}} f_R^i dR + U(R_{\text{ш}}) = 2\pi \cdot \delta \cdot R_{\text{ш}}^2 - \frac{2}{3} \pi \cdot \delta \cdot R^2. \quad (68)$$

Задание. Самостоятельно получить выражения (67), (68) для U_e и U_i .

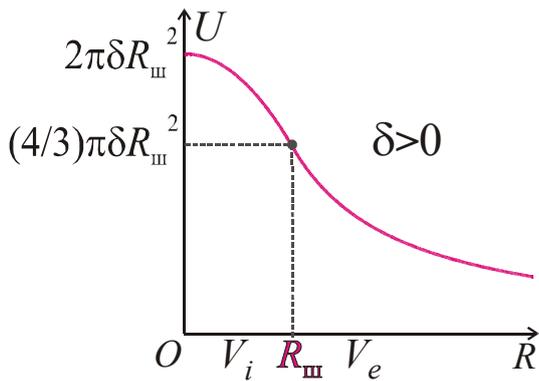


Рис. 32.

К потенциалу U поля "шара"

Зависимость $U(R)$ при $\delta > 0$ показана на **рис. 32**. Согласно выражениям (67), (68), значение $|U|$ максимально в центре шара. Из этих выражений следует также, что $[U(0) - U(R_{\text{ш}})] = (1/2) \cdot [U(R_{\text{ш}}) - U(\infty)]$. То есть (в отсутствие других источников поля \vec{f}) при любых значениях $R_{\text{ш}}$ и δ разность потенциалов ΔU между центром однородного шара и его поверхностью равна половине разности потенциалов ΔU между поверхностью шара и бесконечно удалёнными от него точками.

Занятие 8

Задача 13. Условия – те же, что в задаче 12. Источник статического поля \vec{f} – однородная объёмная масса в форме шара с радиусом $R_{\text{ш}}$ и объёмной плотностью δ (см. **рис. 30**). Определим сферически симметричное поле такой массы, пользуясь уравнением поля \vec{f} в дифференциальной форме (19): $\text{div } \vec{f} = 4\pi \cdot \delta$.

Решение. В соответствии с (3,б) в сферических координатах в общем случае

$$\text{div } \vec{f} = \frac{1}{R^2 \cdot \sin \theta} \cdot \left[\sin \theta \cdot \frac{\partial (R^2 \cdot f_R)}{\partial R} + R \cdot \frac{\partial (\sin \theta \cdot f_\theta)}{\partial \theta} + R \cdot \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \quad (69)$$

При сферической симметрии поля в соответствии с (59) в сферической системе координат R, θ, φ с началом O в центре симметрии

$$\vec{f} = \vec{1}_R \cdot f_R, \quad f_R = f_R(R).$$

В этом случае из (69) следует, что $\text{div } \vec{f} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{d(R^2 \cdot f_R)}{dR}$, и из (19)

получаем для ненулевой компоненты f_R поля \vec{f} обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{d(R^2 \cdot f_R)}{dR} = 4\pi \cdot \delta \quad \text{или} \quad d(R^2 \cdot f_R) = 4\pi \cdot \delta \cdot R^2 dR, \quad R^2 \cdot f_R = 4\pi \cdot \delta \cdot \int R^2 dR + C.$$

Так как $\int R^2 dR = R^3/3 + C$, в области V_i $\delta_i = \delta = \text{const}$, в области V_e $\delta_e = 0$, для компоненты f_R в областях V_i, V_e получаем выражения:

$$R^2 \cdot f_R^i = (4/3)\pi \cdot \delta \cdot R^3 + C_i, \quad R^2 \cdot f_R^e = C_e. \quad (70)$$

Осталось определить константы C_i, C_e . В области V_i имеем $0 \leq R < R_{\text{ш}}$. Полагая $R=0$, из (70)₁ получаем: $C_i=0$ и $f_R^i = (4/3)\pi \cdot \delta \cdot R$. Для определения C_e потребуем непрерывности компоненты f_R на границе объёмной массы (при $R=R_{\text{ш}}$). То есть

при $R=R_{\text{ш}}$ $f_R^e = f_R^i$, $C_e/R_{\text{ш}}^2 = (4/3)\pi \cdot R_{\text{ш}} \cdot \delta$, $C_e = (4/3)\pi \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta$.

В результате из (70) следуют полученные при применении другого способа решения этой задачи выражения (66):

$$\text{при } 0 \leq R \leq R_{\text{ш}} \quad f_R^i = (4/3) \cdot \pi \cdot \delta \cdot R, \quad \text{при } R \geq R_{\text{ш}} \quad f_R^e = \frac{(4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \delta}{R^2} = \frac{m_{\text{ш}}}{R^2}.$$

Задания

Пользуясь одним из тех двух способов, которые были применены при решении задач 12, 13, надо определить в сферических координатах ненулевую компоненту f_R поля \vec{f} и потенциал U сферически симметричной объёмной массы с заданными размерами (R_1, R_2 , либо $R_{\text{ш}}$) и плотностью $\delta = \delta(R)$.

1). Однородный сферический слой. При $0 \leq R < R_1$ и при $R > R_2$ плотность $\delta_{1,3} = 0$; при $R_1 \leq R \leq R_2$ $\delta_2 = \delta = \text{const}$.

2). Неоднородный "шар" с объёмной плотностью $\delta(R)$ линейно убывающей до нуля к границе шара. При $0 \leq R \leq R_{\text{ш}}$ $\delta(R) = \delta_0 \cdot (R_{\text{ш}} - R)/R_{\text{ш}}$, где δ_0 – объёмная плотность в центре "шара"; при $R > R_{\text{ш}}$ $\delta = 0$.

Поле пласта

В дополнение к задаче 10 рассмотрим ещё один пример поля источника, имеющего бесконечную протяжённость в двух направлениях.

Задача 14. Источником статического поля \vec{f} является однородная объёмная масса ($\delta = \text{const}$) в виде плоскопараллельного слоя (пласта) с мощностью h . Такой пласт можем рассматривать, например, как прямой круговой цилиндр с высотой h и с бесконечно большим радиусом $r_{\text{ц}}$ (рис. 33, а). Надо определить поле \vec{f} пласта.

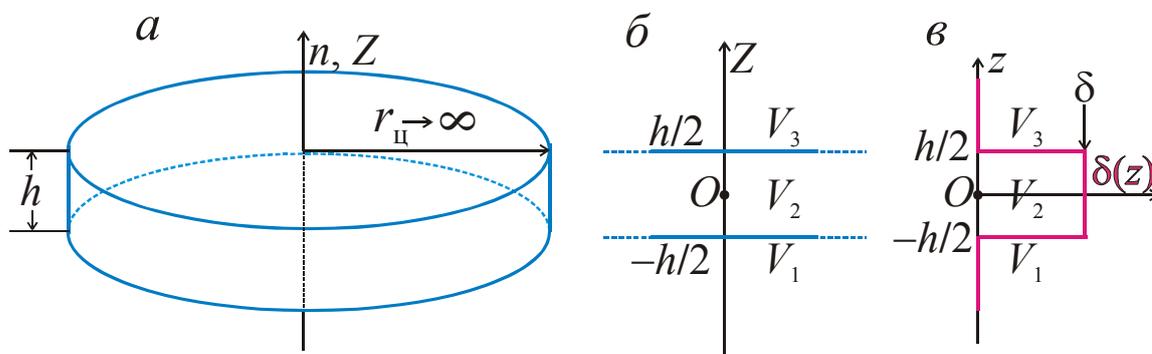


Рис. 33.

К полю "пласта"

Решение. Очевидно, что однородная масса в виде пласта и её поле цилиндрически-симметричны относительно произвольной нормали n к границам пласта и зеркально-симметричны относительно плоскости, лежащей посередине пласта. Введём декартову, либо цилиндрическую систему координат с осью Z , ортогональной границам пласта, и плоскостью $z=0$ посередине пласта (рис. 33, б). При этом объёмная плотность $\delta = \delta(z)$ (рис. 33, в). Из симметрии поля относительно оси Z и плоскости $z=0$, а также непрерывности поля \vec{f} объёмной массы следует, что

$$\vec{f} = \vec{1}_z \cdot f_z(z), \quad (71)$$

$$f_z(0) = 0. \quad (72)$$

Действительно, посередине пласта, в плоскости $z=0$, две "половины" пласта создают поля, одинаковые по абсолютной величине и противоположного направления.

Границы пласта делят пространство на три области: V_1 , V_2 , V_3 (рис. 33, б, в). В областях V_1 и V_3 объёмная плотность $\delta_{1,3}=0$; в области V_2 плотность $\delta_2=\delta=\text{const}$. Определим поле \vec{f} пласта, решая уравнение (19): $\text{div } \vec{f} = 4\pi \cdot \delta$, которое для поля \vec{f} пласта, удовлетворяющего условию (71), в соответствии с (3,б) принимает вид: $df_z/dz = 4\pi \cdot \delta(z)$. Тогда для областей V_2 , V_1 , V_3 имеем соответственно:

$$\frac{df_z^{(2)}}{dz} = 4\pi \cdot \delta, \text{ где } \delta = \text{const}, \quad \frac{df_z^{(1)}}{dz} = 0, \quad \frac{df_z^{(3)}}{dz} = 0, \quad (73)$$

где в первом из уравнений (70) δ – объёмная плотность пласта, а $f_z^{(1,2,3)}$ – z -компонента поля \vec{f} в областях V_1 , V_2 , V_3 . Очевидно, что решения уравнений (73): $f_z^{(1)} = C_1$, $f_z^{(2)} = 4\pi\delta z + C_2$, $f_z^{(3)} = C_3$, где C_1 , C_2 , C_3 – постоянные, подлежащие определению из условий задачи. Из равенства (72) следует, что $C_2=0$. Требуя, чтобы на границах пласта (при $z=\pm h/2$) поле \vec{f} было непрерывно:

$$f_z^{(1)}(-h/2) = f_z^{(2)}(-h/2), \quad f_z^{(3)}(h/2) = f_z^{(2)}(h/2),$$

можем определить постоянные C_1 , C_3 : $C_1 = -2\pi \cdot \delta \cdot h$, $C_3 = 2\pi \cdot \delta \cdot h$. Таким образом, для областей V_1 , V_2 , V_3 соответственно получаем:

$$f_z^{(1)} = -2\pi \cdot \delta \cdot h, \quad f_z^{(2)} = 4\pi \cdot \delta \cdot z, \quad f_z^{(3)} = 2\pi \cdot \delta \cdot h. \quad (74)$$

График функции $f_z(z)$ показан на рис. 34, а. Вне пласта (в областях V_1 и V_3)

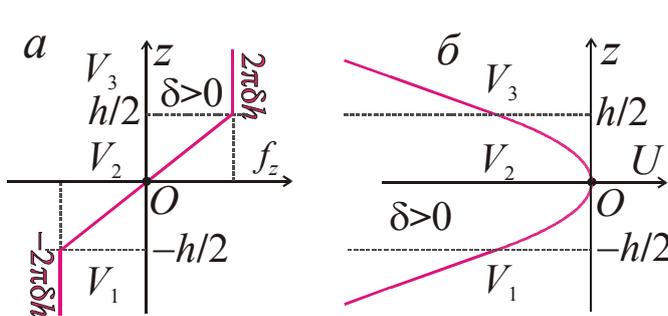


Рис. 34.

Зависимости компоненты f_z поля \vec{f} "пласта" (а) и потенциала U (б) от координаты z

его поле $\vec{f} = \vec{1}_z \cdot 2\pi \cdot \delta \cdot h \cdot \frac{z}{|z|}$

совпадает с полем плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = \delta \cdot h$. (см. выражение (56)) и не убывает с удалением от источника поля. Это, конечно обусловлено тем, что у векторных линий l_f такого поля \vec{f} нет "геометрического расхождения".

Определим потенциал U поля \vec{f} пласта. Из (71) следует, что $U=U(z)$, то есть эквипотенциальные поверхности $U=\text{const}$ – плоскости $z=\text{const}$. Тогда при $\vec{f} = \vec{1}_z \cdot f_z(z)$ из (27) получаем выражение (57):

$$U(z) = \int_z^{z_\phi} f_z dz + U(z_\phi).$$

Выберем, например, нулевое значение потенциала ($U=0$) при $z=0$ (в области V_2) и определим потенциал U в областях V_2 ($|z|\leq h/2$), V_3 ($z>h/2$) и V_1 ($z<-h/2$). Согласно (74)₁ (57)

$$U_2 = \int_z^0 f_z^{(2)} dz + 0 = 4\pi \cdot \delta \cdot \int_z^0 z dz = -2\pi \cdot \delta \cdot z^2.$$

На границах пласта – при $z=\pm h/2$ имеем $U(\pm h/2)=-\pi \cdot \delta \cdot h^2/2$. При учёте того, что потенциал U непрерывен в объёмной массе и на её границе, из (71)_{2,3}, (57) получаем:

$$U_1 = \int_z^{-h/2} f_z^{(1)} dz + U(-h/2) = \pi \cdot \delta \cdot h^2/2 + 2\pi \cdot \delta \cdot z,$$

$$U_3 = \int_z^{h/2} f_z^{(3)} dz + U(h/2) = \pi \cdot \delta \cdot h^2/2 - 2\pi \cdot \delta \cdot z.$$

Итак, если выбрать потенциал $U=0$ посередине "пласта", при $z=0$, то

$$\text{при } |z|\leq -h/2 \quad U = -2\pi \cdot \delta \cdot z^2, \quad \text{при } |z|\geq h/2 \quad U = \frac{\pi \cdot \delta \cdot h^2}{2} - 2\pi \cdot \delta \cdot h \cdot |z|. \quad (75)$$

График функции $U(z)$, которую определяют выражения (75), показан на **рис. 34, б**. В соответствии с тем, что в областях V_1 , V_3 поля \vec{f} – порознь однородны, потенциалы $U_1(z)$, $U_3(z)$ – линейные функции координаты z .

Задания

1. На основе выражений (44)₁, (44)₂ для компонент поля \vec{f} диполя получить формулы, позволяющие определить абсолютную величину p момента \vec{p} диполя и расстояние ($r=r_0$) от диполя до проходящего над ним прямого "профиля" по абсциссам и ординатам характерных точек на графиках, показанных на **рис. 18, а**, **рис. 18, б**. См. задачи 3, 4.

2. Определить массу m неоднородного шара с радиусом $R_{\text{ш}}$ и со сферически симметричной объёмной плотностью $\delta(R)$, а также поле \vec{f} этой массы. При $R<R_{\text{ш}}$ $\delta_i(R)=\delta_0[1-(R/R_{\text{ш}})^2]$, где δ_0 – плотность в центре шара; при $R>R_{\text{ш}}$ $\delta_e=0$. См. задачи 12, 13.

3. Определить поле \vec{f} однородной массы в виде плоскопараллельного слоя (пласта) с однородной плотностью δ ($\delta=\text{const}$) на основе закона Гаусса (21), то есть решить задачу 14 способом, применённым при решении задачи 12. В качестве замкнутой поверхности $S[V]$ следует взять поверхность прямого цилиндра (с высотой $2|z|$ и с произвольной площадью S_0 оснований), симметричного относительно середины пласта. Следует также принять во внимание чётную зеркальную симметрию такого поля \vec{f} относительно середины пласта.

4. Прочитать следующие разделы вплоть до раздела "Занятие 9" и подготовить вопросы преподавателю.

СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ; СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Пояснения

Средой называют расположенную определённым образом в пространстве совокупность тел (объектов), которые сами по себе могут не создавать поля, но оказывают влияние на поле. Тела, не создающие гравитационного поля, но оказывающие на него влияние, не известны. Поэтому в этой теме гравитационное поле не рассматриваем. На постоянное (во времени) магнитное поле оказывают влияние магнетики, а на постоянное электрическое поле – проводники и диэлектрики.

Постоянное электрическое поле – это кулоново поле; его создают заряды, плотность которых не меняется со временем. Различают электростатическое и стационарное электрическое поле. Электростатическое поле создают неподвижные заряды. Стационарным электрическим полем называют постоянное электрическое поле в проводящей среде, под действием которого происходит направленное движение свободных электрических микрочарядов (ионов, электронов) – постоянный электрический ток. Но, при этом, плотность зарядов в любой точке пространства не зависит от времени t . Электрическое поле определяет его напряжённость \vec{E} , а также вектор электрической индукции или (неудачный, но "исторически сложившийся" термин) "вектор электрического смещения" \vec{D} . "Распределение" электрического тока в объёмном проводнике характеризует поле вектора \vec{j} плотности электрического тока.

В магнитостатике (по формальной аналогии с электростатикой, пользуясь моделью Кулона) бывает удобно пользоваться представлениями о физически фиктивных магнитных массах (магнитных полюсах), как источниках магнитостатического поля. Характеристиками магнитного поля являются его напряжённость \vec{H} и вектор магнитной индукции \vec{B} .

Основные уравнения. Прямая задача

Все выражения, приведенные в разделе 2 для поля \vec{f} , справедливы и для рассматриваемых здесь полей \vec{E} , \vec{H} (и их потенциалов U), если умножить выражения для \vec{f} на соответствующие константы. Напомним, что согласно (13)

$$\vec{E} = [1/(4\pi\epsilon_0)] \cdot \vec{f} \quad \text{и} \quad \vec{H} = [1/(4\pi)] \cdot \vec{f}.$$

Однако при расчёте полей \vec{E} ; \vec{H} в присутствии среды не все возбудители (источники) поля можно полагать заданными. Часть этих возбудителей зависит от искомого поля и может быть определена только после его определения. Поэтому системы уравнений рассматриваемых полей в дифференциальной форме удобно представить в следующем виде.

<i>Электростатическое поле</i>	<i>Магнитостатическое поле</i>	<i>Стационарное электрическое поле</i>	
I. $\text{rot } \vec{E}=0;$	I. $\text{rot } \vec{H}=0;$	I. $\text{rot } \vec{E}=0;$	(76)
II. $\text{div } \vec{D}=\delta_{\text{свб}};$	II. $\text{div } \vec{B}=0;$	II. $\text{div } \vec{j}=0,$	(77)

где $\delta_{\text{свб}}$ – объёмная плотность свободных электрических зарядов: ионов, электронов (см.[1], стр.143). Уравнения (76), (77) дополняют уравнениями связи:

$\vec{D}=\epsilon_a \cdot \vec{E};$	$\vec{B}=\mu_a \cdot \vec{H} + \mu_0 \cdot \vec{J}^0;$	$\vec{j}=\gamma \cdot (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}}),$	(78)
-------------------------------------	--	--	------

где $\epsilon_a=\epsilon_0 \cdot \epsilon$ и $\mu_a=\mu_0 \cdot \mu$ – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости, ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, \vec{J}^0 – вектор постоянной (остаточной) намагниченности, $\gamma=1/\rho$ – удельная электропроводность, ρ – удельное электрическое сопротивление, $\vec{E}^{\text{стр}}$ – напряжённость поля сторонних (не кулоновых) сил, под действием которых (совместно с действием кулоновых сил с напряжённостью \vec{E}) согласно (78)₃ в проводящей среде (при $\gamma>0$) существует электрический ток с плотностью \vec{j} (см. [1], стр. 174 - 181, 194).

Величины ϵ , μ и γ , (количественно) характеризующие среду как диэлектрик, магнетик и проводник, называют (электрическими и магнитными) параметрами среды. Если $\epsilon>1$, то среда – диэлектрик. Если $\mu\neq 1$, то среда – магнетик. Если $\gamma>0$, то среда – проводник, а при $\gamma\rightarrow\infty$ ($\rho=0$) – идеальный проводник.

Из (76) следует, что электростатическое и стационарное электрическое поле \vec{E} , а также магнитостатическое поле \vec{H} – поля потенциальные, для них, аналогично (22), можно ввести скалярный потенциал U :

$$\vec{E}=-\text{grad } U=-\nabla U; \quad \vec{H}=-\text{grad } U=-\nabla U. \quad (79)$$

Согласно (79) расчёт векторных полей \vec{E} , \vec{H} можно свести к нахождению (более простого) скалярного поля U и последующему дифференцированию для определения компонент полей \vec{E} , \vec{H} . Подставляя (78), (79) в (77) и учитывая равенства (19), (13), получаем для потенциалов U рассматриваемых здесь полей уравнения:

$(\nabla(\epsilon \nabla U))=-\delta_{\text{свб}}/\epsilon_0;$	$(\nabla(\mu \nabla U))=-\delta^0;$	$(\nabla(\gamma \nabla U))=\text{div}(\gamma \cdot \vec{E}^{\text{стр}}),$	(80)
--	-------------------------------------	--	------

где $\delta^0=-\text{div } \vec{J}^0$.

Из (80) следует, что при $\text{grad } \epsilon=\nabla \epsilon=0$, $\delta_{\text{свб}}=0$; $\text{grad } \mu=\nabla \mu=0$, $\text{div } \vec{J}^0=0$; $\text{grad } \gamma=\nabla \gamma=0$, $\text{div}(\gamma \cdot \vec{E}^{\text{стр}})=0$ уравнения (80) для потенциалов соответственно электростатического, магнитостатического и стационарного электрического полей становятся уравнениями Лапласа (25): $\nabla^2 U = 0$. Множество решений уравнения Лапласа называют гармоническими функциями.

Равенства $\nabla \epsilon=0$, $\nabla \mu=0$, $\nabla \gamma=0$ означают, что среда однородна по соответствующим параметрам. Случай, когда эти равенства справедливы во всем пространстве, соответствует безграничной однородной модели среды. Кусочно-однородная модель среды состоит из порознь однородных областей

пространства. Поверхность, на которой параметр среды терпит разрыв, называют поверхностью раздела или границей.

Прямая задача теории рассматриваемых полей состоит в нахождении решений уравнений (80) для U (в частном случае – уравнения Лапласа), удовлетворяющих ряду условий, о которых будет сказано ниже. При этом предполагают, что известны модель среды (распределение параметров среды: ϵ , μ или γ в пространстве) и те величины, которые не зависят от искомого поля (\vec{E} ; \vec{H}) и могут быть произвольно заданы при постановке прямой задачи. Такими величинами могут быть: при расчёте электростатического поля в присутствии диэлектриков – свободные заряды или их поле; при расчёте магнитостатического поля – постоянные магниты или их поле; при расчёте стационарного электрического поля – стороннее поле $\vec{E}^{\text{стр}}$ или некоторые данные, заменяющие сведения о нём: положение и эмиссии токовых электродов или создаваемое при помощи таких электродов "первичное" поле и т. д.

При сравнении уравнений (80) для потенциалов рассматриваемых полей и учёте сделанных выше замечаний ясно, что потенциалы электростатического, магнитостатического и стационарного электрического поля удовлетворяют, в сущности, одинаковым (по "виду") уравнениям, а прямые задачи теории этих полей математически идентичны. Поэтому далее будем более подробно рассматривать одно из этих полей – стационарное электрическое поле \vec{E} . Согласно (77) - (80), для перехода от выражений, определяющих поле \vec{E} , к соответствующим формулам, например для магнитостатического поля \vec{H} , надо сделать замены:

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}; \quad \gamma \rightarrow \mu; \quad \gamma \cdot \vec{E}^{\text{стр}} \rightarrow \vec{J}^0. \quad (81)$$

Как уже было сказано, характеристикой физически реального электрического тока (в объёмном проводнике) является вектор плотности тока \vec{j} . Векторные линии l_j поля \vec{j} называют токовыми линиями. Поток вектора \vec{j} через поверхность S : $I_S = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S})$. Если на всей поверхности S углы α между векторами \vec{j} и нормалью n к S меньше $\pi/2$, то $I_S = I$, а если эти углы α больше $\pi/2$, то $I_S = -I$, где I – электрический ток через поверхность S .

В теории стационарного электрического поля вводят понятие необъёмных токов: линейных и поверхностных (см. [1], стр.178 – 181). Например, электрический ток вдоль вытянутого (по линии l) проводника с малым сечением ΔS при достаточно малой величине ΔS можно заменить линейным током I по линии l , полагая $\Delta S \rightarrow 0$, $j = I/\Delta S \rightarrow \infty$, $I = \text{const}$.

Интегральными формами уравнений (76), (77) для стационарного электрического поля являются уравнения:

$$\text{I. } \oint_l (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0, \quad \text{II. } \oint_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = I_S = 0, \quad (82)$$

согласно которым в случае стационарного электрического поля циркуляция вектора \vec{E} и поток вектора \vec{j} через замкнутую поверхность S равны нулю.

Выражения (77)₃, (82)₂ для вектора \vec{j} называют уравнениями непрерывности постоянного электрического тока соответственно в дифференциальной и интегральной форме.

В тех областях пространства, где $\vec{E}^{\text{стр}}=0$ (во «внешних» частях цепей электрического тока), уравнение (78)₃ для стационарного электрического поля вырождается в более простое уравнение – закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} = \vec{E} / \rho. \quad (83)$$

Этот закон (который обычно справедлив для многих проводников, включая горные породы) устанавливает прямую пропорциональную зависимость между напряжённостью электрического поля \vec{E} и плотностью \vec{j} электрического тока (вызванного этим полем \vec{E}) в каждой точке среды с удельной электропроводностью $\gamma=1/\rho$.

Поле у особой поверхности

Особыми поверхностями $S_{\text{ос}}$ стационарного электрического поля \vec{E} являются поверхности, несущие простые или двойные электрические слои. На поверхностях $S_{\text{ос}}$ некоторые скалярные компоненты полей $\vec{E} = -\text{grad } U$, \vec{j} и скалярное поле потенциала U могут терпеть разрыв. Дифференциальные уравнения (76), (77), (80) на таких поверхностях теряют смысл и должны быть заменены соответствующими уравнениями в поверхностной форме (см. [1], стр. 28- 33, 115- 118, 149- 150, 184 и др.). Далее будем полагать, что поверхность $S_{\text{ос}}$ разделяет области пространства V_1 и V_2 ; "1" и "2" – расположенные на разных сторонах поверхности $S_{\text{ос}}$ на бесконечно-малом расстоянии друг от друга «соседние» точки, принадлежащие соответственно областям V_1 и V_2 . Будем также полагать, что нормаль n к поверхности $S_{\text{ос}}$ направлена из области V_1 в область V_2 .

Как меняется потенциал U поля \vec{E} при пересечении точкой наблюдения a поверхности $S_{\text{ос}}$? Из решений задач 11, 12 следовало, что потенциал U поля \vec{f} непрерывен на простом слое с поверхностной плотностью σ . Но потенциал U терпит разрыв, равный $4\pi \cdot \eta$, на двойном слое с поверхностной плотностью дипольных моментов η . Следовательно, для потенциала U поля \vec{E} при учёте равенства $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{f}$ имеем:

$$U_2 - U_1 = \eta / \epsilon_0 = \mathcal{E}^{\text{кнт}}, \quad (84)$$

где U_1 , U_2 – потенциалы поля \vec{E} в точках "1" и "2"; $\mathcal{E}^{\text{кнт}}$ – контактная э. д. с., поддерживающая существование двойных электрических слоёв в проводящей среде на особых поверхностях (на которых есть стороннее поле $\vec{E}^{\text{стр}}$), см. [1], стр.194–196. Выражение (84) записано в предположении, что (при $\eta > 0$) положительная обкладка двойного слоя обращена к области V_2 .

Если на S_{oc} отсутствует контактная э. д. с. $\mathcal{E}^{кнт}$ ($\mathcal{E}^{кнт}=0$), то согласно (84) на такой поверхности потенциал U непрерывен:

$$U_2=U_1. \quad (85)$$

Согласно результатам решения задач 9, 11, нормальная к поверхности S_{oc} компонента f_n поля \vec{f} терпит на этой поверхности разрыв, равный $4\pi\cdot\sigma$ (см, например, [рис. 25](#)). Тогда для поля $\vec{E} = \vec{f}/4\pi\epsilon_0$ в точках "1" и "2" имеем:

$$E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \sigma/\epsilon_0. \quad (86)$$

При ограниченных значениях тангенциальной (касательной) к поверхности S_{oc} компоненты j_τ (чему соответствует отсутствие на S_{oc} необъёмных токов) на S_{oc} поверхностная форма уравнения непрерывности постоянного тока может быть записана в следующем виде:

$$j_n^{(2)} = j_n^{(1)} \text{ то есть } \gamma_2 \cdot E_n^{(2)} = \gamma_1 \cdot E_n^{(1)} \text{ или } \gamma_2 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial n} = \gamma_1 \cdot \frac{\partial U_1}{\partial n}, \quad (87)$$

где j_n – нормальная к поверхности S_{oc} компоненты вектора \vec{j} .

Для стационарного электрического поля \vec{E} наибольший интерес представляет случай, когда S_{oc} является поверхностью раздела (границей), по разные стороны которой параметр среды γ имеет разные значения. Для поверхностной плотности зарядов σ на такой границе из (83), (86), (87) может быть получено выражение:

$$\sigma = 2\epsilon_0 \cdot \gamma_{12} \cdot E_n^{cp}, \quad (88)$$

где $\gamma_{12} = k_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2) = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2)$ – коэффициент контрастности границы S_{oc} , по разные стороны которой (в точках "1" и "2") удельная электропроводность γ имеет значения γ_1, γ_2 ; $E_n^{cp} = (E_n^{(1)} + E_n^{(2)})/2$ – среднее значение нормальной к S_{oc} скалярной компоненты E_n поля \vec{E} в этих точках.

Согласно (88) на поверхности раздела S_{oc} (где $\gamma_1 \neq \gamma_2$) при наличии нормальной к этой поверхности компоненты E_n поля γ_1 существует (индуцированный полем \vec{E}) поверхностный заряд (в виде простого слоя с поверхностной плотностью σ). Величина E_n в (88) – n -компонента фактически действующего на S_{oc} (суммарного) поля \vec{E} , создаваемого всеми зарядами, включая заряды с плотностью σ на поверхности S_{oc} . Отсюда следует, что если нам не известно суммарное поле \vec{E} , то (при постановке прямой задачи поле \vec{E} или его потенциал U – искомое поле) не может быть задана (не может считаться известной) и плотность зарядов σ на S_{oc} .

Если, в "соседних" точках "1", "2" на S_{oc} напряжённость стороннего поля $\vec{E}^{стр}=0$, то согласно (23), (83) уравнение (87) можно представить в следующем виде: $\gamma_1 \cdot E_n^{(1)} = \gamma_2 \cdot E_n^{(2)}$, то есть

$$\gamma_1 \cdot \frac{\partial U_1}{\partial n} = \gamma_2 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial n} \quad \text{или} \quad \rho_2 \cdot \frac{\partial U_1}{\partial n} = \rho_1 \cdot \frac{\partial U_2}{\partial n}. \quad (89)$$

О теореме единственности

Решение прямых задач теории стационарного электрического поля обычно сводится к определению потенциала U фактически действующего (суммарного) поля $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$ в модели среды с известным распределением удельной электропроводности $\gamma=1/\rho$ при заданном первичном поле \vec{E}^{Π} или заданных его источниках. Под полем \vec{E}^{Π} при этом часто понимают поле известных (не зависящих от искомого суммарного поля \vec{E}) зарядов в безграничной однородной среде. В этом случае при решении прямой задачи теории стационарного электрического поля нужно найти вторичное поле $\vec{E}^B = \vec{E} - \vec{E}^{\Pi}$ (или его потенциал U^B), источниками которого являются заряды, индуцированные в местах нарушения однородности среды.

В кусочно-однородных моделях среды источниками поля \vec{E}^B являются заряды в виде простых слоёв на границах (поверхностях раздела сред с разной удельной электропроводностью γ). Поверхностную плотность σ таких зарядов определяет выражение (88). За редким исключением плотность зарядов σ не может быть определена до того, как будет найдено поле \vec{E}^B этих зарядов, так как определение σ требует знания суммарного поля $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$, нормальная компонента которого входит в правую часть равенства (88).

Поэтому задача определения поля \vec{E}^B (при неизвестном распределении его источников, зависящем от \vec{E}^B) не допускает применения тех «прямых» методов расчёта на основе выражений вида (17), (19), (21), (29). Основным приёмом, позволяющим получать аналитические решения прямых задач теории стационарного поля (а также электростатического и магнитостатического полей в присутствии среды), является *подбор* этих решений. Обоснование правомерности такого подбора дают теоремы единственности решения прямых задач (см. [1], стр.53-59, 166-169, 224-228).

Для уверенности в правильности подбора искомого решения прямая задача теории стационарного поля \vec{E} должна быть "поставлена" ("сформулирована") как краевая задача, включающая *уравнение потенциала* U (в общем случае – это уравнение (80), а в кусочно-однородных моделях среды – это обычно уравнения Лапласа (25): $\nabla^2 U = 0$) и *дополняющие условия*. Если мы решаем такую задачу для области пространства V , то в соответствии с теоремой единственности (см., например, страницы 80 – 86 главы первой электронной версии Учебника [4]) дополняющие условия должны содержать:

- 1) краевые условия на границе $S[V]$ области V ;
- 2) условия сопряжения на всех особых поверхностях S_{oc} в области V (если такие поверхности есть в области V);
- 3) условия в окрестностях всех особых точек q_{oc} и линий l_{oc} в области V (если такие точки и линии есть в области V).

Необходимость задания краевых условий предопределяет то, что решение такой прямой задачи мы должны проводить не для такой области V , где нас *фактически* может интересовать поле, а для такой области V , на всей границе $S[V]$ которой может быть задано (известно из физических условий задачи) одно из следующих трёх краевых условий:

$$\text{I. } U(p) = \varphi(p); \quad \text{II. } \partial U(p)/\partial n = \Psi(p); \quad \text{III. } \int_S \gamma(\partial U(p)/\partial n) dS = Q, \quad (90)$$

где Q – известная величина, $\varphi(p)$, $\Psi(p)$ – известные функции положения точки p на поверхности $S[V]$, n – нормаль к поверхности $S[V]$. Выражения I, II и III в (90) называют соответственно краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го типа. Краевые условия должны быть заданы на всей поверхности $S[V]$, но на разных участках этой поверхности можно задавать условия разного типа.

Часто краевые условия могут быть заданы лишь в бесконечно удалённых точках и такие краевые условия называют условиями в (на) бесконечности. В этом случае областью V , для которой приходится *ставить* и *решать* краевую задачу, является всё пространство, либо (в некоторых случаях) – полупространство.

В соответствии с (84), (89) условия сопряжения (граничные условия) на поверхностях S_{oc} для стационарного электрического поля обычно могут быть выражены равенствами:

$$\text{а) } U_2 - U_1 = \mathcal{E}^{\text{кнт}}(p), \quad \text{б) } \gamma_2(\partial U_2/\partial n) = \gamma_1(\partial U_1/\partial n), \quad (91)$$

где p произвольная точка на поверхности S_{oc} ; "1", "2" – точки, лежащие на разных сторонах S_{oc} на бесконечно малых расстояниях от точки p , $U_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ – значения U и γ в этих точках, n – нормаль к поверхности S_{oc} . Если на S_{oc} нет контактной э. д. с. $\mathcal{E}^{\text{кнт}}$ (и поддерживаемых ею двойных электрических слоёв), то первое граничное условие (91)₁ принимает более простой вид (85):

$$U_2 = U_1. \quad (91,a)$$

Особыми точками и линиями стационарного поля \vec{E} могут быть точечные и линейные электроды, на которых потенциал $U \rightarrow \infty$ (см. задачи 3, 8). Задавая условия у особых точек или линий, надо определить функции, выражающие асимптотическое поведение U при неограниченном приближении точки наблюдения к особым точкам или линиям.

Точные выражения для функций, определяющих асимптотическое поведение U , при задании краевых условий в бесконечности или условий у особых точек и линий, могут быть неизвестны. Требования к точности задаваемых условий можно установить, обратившись к теореме единственности ([1], стр. 53-59). Из доказательства этой теоремы следует, что (в случае стационарного электрического поля) краевые условия должны обеспечивать выполнение равенства $\int_S U''' \cdot \gamma \cdot (\partial U'''/\partial n) dS = 0$, где $U''' = U' - U''$ – разность

возможных решений U' , U'' уравнения потенциала U , удовлетворяющих дополняющим условиям. В случаях, о которых идёт речь, поверхность S с нормалью n – это бесконечно удалённая поверхность или поверхность, окружающая особую точку (линию) и "стянутая" к этой точке (линии). Отсюда

следует, что если, например, S – сферическая поверхность с радиусом $R \rightarrow \infty$ (или её часть), то краевое условие 1-го типа на S для функции U может быть задано с точностью до слагаемого, убывающего при $R \rightarrow \infty$ быстрее, чем $R^{-1/2}$. Тогда функция U'''' будет убывать быстрее, чем $R^{-1/2}$ (а функция $\partial U''''/\partial n = \partial U''''/\partial R$ – быстрее, чем $R^{-3/2}$) при $R \rightarrow \infty$, что обеспечит выполнение равенства $\int_S U'''' \cdot \gamma \cdot (\partial U''''/\partial n) dS = 0$.

Согласно теореме единственности, существует лишь одно (правильное) решение прямой задачи, которое удовлетворяет не только уравнению (80), но и всем дополняющим это уравнение условиям, то есть всем условиям правильно поставленной краевой задачи. Это позволяет свести процесс нахождения решения такой задачи к **подбору** решения. При этом правильность полученных результатов будет гарантирована только в том случае, если в процессе такого подбора удалось найти те решения уравнения потенциала U (обычно различные для разных областей пространства), которые удовлетворяют всем условиям краевой задачи. Понятно, что (если, конечно, для $1D$ – моделей среды эти решения могут быть получены в аналитическом виде) для разных областей пространства решения для потенциала U стационарного поля \vec{E} , (либо для потенциала U статического поля \vec{H}) определяют разные выражения.

Этапы решения задачи

Процесс решения конкретных прямых задач (для $1D$ – моделей среды) может иметь особенности, зависящие от специфики этих задач и метода, применяемого при подборе решения. Далее при рассмотрении задач будем по возможности придерживаться схемы, при которой постановка и решение задачи разбивается на следующие этапы ("шаги").

1. Формулировка условий задачи.

2. Выбор системы координат, проводимый с учётом конфигурации особых поверхностей, симметрии заданных возбудителей поля (или первичного поля) и модели среды. Если совокупность заданных возбудителей поля и модели среды симметрична, то соответствующую симметрию имеют все возбудители поля и искомое поле (\vec{E} , \vec{H} , U).

3. Формулировка условий, упрощающих задачу и ограничивающих круг возможных решений, при учёте симметрии поля, особенностей модели среды.

4. Постановка краевой задачи (уравнения потенциала U и дополняющие условия).

5. Предложение "проекта" решения задачи, то есть гипотезы о том, какой вид может иметь решение задачи. Обоснования этой гипотезы могут иметь интуитивный характер или их может не быть вовсе. Обычно предполагаемое решение задачи может быть предложено на основе опыта решения других задач, физических представлений и содержит неизвестные множители или, слагаемые, подлежащие определению в дальнейшем – в процессе подбора решения задачи.

6. «Испытание» проекта решения, проверка того, может ли выраженное в таком виде решение удовлетворить всем условиям краевой задачи. При этом

упомянутые выше неизвестные множители и слагаемые "подгоняются" под дополняющие условия, то есть определяются такие их значения, при которых выполняются эти условия. Если на этом этапе удалось найти выражения, удовлетворяющие уравнениям потенциала U и дополняющим условиям, то краевая задача решена. Если этого сделать не удалось, то приходится возвращаться к этапу 5.

7. Определение полей $\vec{E} = -\text{grad } U$ или $\vec{H} = -\text{grad } U$ и, если нужно – определение плотности источников вторичного поля и т. д.; исследование полученного решения.

При решении уравнений (80), а в случае кусочно-однородных моделей среды и при $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ – то есть уравнения Лапласа $\nabla^2 U = 0$ для $1D$ – моделей среды часто пользуются методом Фурье (методом разделения переменных). Соответствующий этому пример рассмотрен в Задаче 17. Применяя этот метод при решении краевой задачи (на этапах 5, 6), стремятся получить наиболее общее решение уравнения потенциала U (с учётом упрощающих условий, сформулированных на этапе 3), но отбрасывают те из этих решений, которые противоречат дополняющим условиям.

Занятие 9

Рассмотрение "прямых задач в присутствии среды" начнём с не имеющего непосредственного отношения к задачам теории геофизических методов примера, но наиболее очевидного в отношении "физики явления". Эта задача "относится" к теории электростатического поля (с напряжённостью \vec{E}) в присутствии проводника.

Напомню следующее. В соответствии с (13)₂ $\vec{E} = \vec{f} / (4\pi \cdot \epsilon_0)$. Постоянное поле \vec{E} – поле потенциальное ($\text{rot } \vec{E} = 0$) и $\vec{E} = -\text{grad } U$. На лекции уже шла речь о том случае, когда в первичном электростатическом поле $\vec{E}^{\text{П}}$, создаваемом в вакууме некоторыми зарядами, находится электрически нейтральный проводник, занимающий "внутреннюю" область V_i (рис. 35).

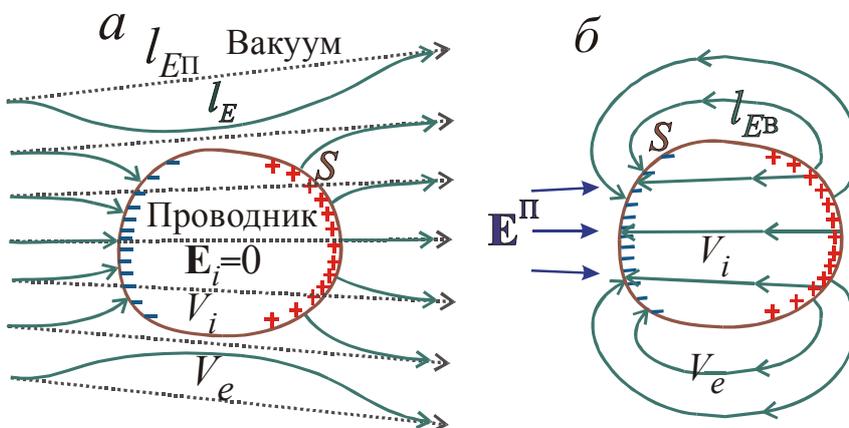


Рис. 35.

Проводник в первичном электростатическом поле $\vec{E}^{\text{П}}$

Если внести проводник в первичное электростатическое поле $\vec{E}^{\text{П}}$ (или создать такое поле $\vec{E}^{\text{П}}$, в котором окажется проводник), имеющиеся в проводнике свободные электрические микрочастицы начнут перемещаться под действием поля $\vec{E}^{\text{П}}$

(положительные – по направлению этого поля, отрицательные – в противоположном направлении) и накапливаться в микроскопически-тонком слое у поверхности S проводника.

В свою очередь эти поверхностные (при "макроскопическом подходе") заряды в виде простого слоя с плотностью σ создают вторичное поле \vec{E}^B и фактически действовать на заряды в проводнике будет суммарное поле $\vec{E} = \vec{E}^\Pi + \vec{E}^B$. Опыт показывает, что через непродолжительное время (после внесения проводника в поле или "включения" постоянного поля \vec{E}^Π) суммарное поле \vec{E} станет статическим. Это означает, что поле $\vec{E}^B = \vec{E} - \vec{E}^\Pi$ и плотность его источников (зарядов с плотностью σ на поверхности S) постоянны и движение зарядов в проводнике прекратилось. Такое возможно, если в проводнике (в области V_i) суммарное поле $\vec{E}_i = 0$. Образование зарядов на поверхности проводника при внесении его в электростатическое поле называют электростатической индукцией.

Таким образом, внутри проводника, в области V_i , (суммарное) электростатическое поле $\vec{E}_i = 0$. При этом несущественно, однороден ли проводник по удельной электропроводности γ и какова величина γ . Для плотности поверхностных зарядов σ на S справедливо выражение (см. (88) при $\gamma_2=0$): $\sigma = \epsilon_0 \cdot E_n^e$, где E_n^e – нормальная к S компонента суммарного поля \vec{E} вне проводника у его поверхности S , а нормаль n к S направлена наружу относительно области, занятой проводником. Так как слагаемое \vec{E}^B поля \vec{E} создают заряды с неизвестной плотностью σ , то неизвестна и компонента E_n^e этого поля у поверхности проводника. То есть при неизвестном (исскомом) поле \vec{E} прямой аналитический расчёт плотности σ источников поля \vec{E}^B по формуле $\sigma = \epsilon_0 \cdot E_n^e$ и расчёт их поля \vec{E}^B на основе выражений вида (16), (17) невозможны.

Проводящий шар в однородном электростатическом поле

Задача 15. В однородное первичное электростатическое поле \vec{E}^Π (которое создают некоторые постоянные заряды), заданное в вакууме, внесён (и занял фиксированное положение – область V_i) проводник в форме шара с радиусом R_{III} (рис. 36, а). Проводник – электрически нейтрален, его (суммарный) заряд

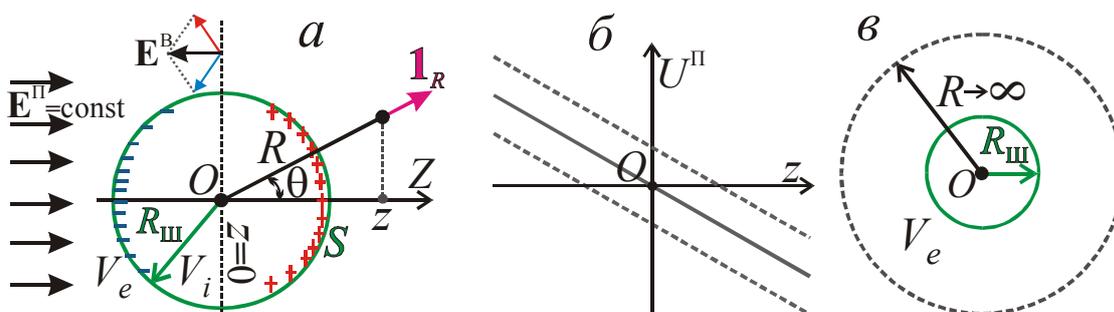


Рис. 36.

Проводящий шар в однородном первичном электростатическом поле E^Π

$e=0$. Полагая, что \vec{E}^{Π} и $R_{\text{ш}}$ известны (заданы), определим суммарное электростатическое поле \vec{E} или потенциал U этого поля.

Решение. В присутствии проводника к полю \vec{E}^{Π} "добавится" вторичное поле \vec{E}^B находящихся на поверхности S проводника (сфере с радиусом $R_{\text{ш}}$) электрических зарядов с поверхностной плотностью σ . Фактически будем иметь поле $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}^B$ с потенциалом $U = U^{\Pi} + U^B$, где $\vec{E} = -\text{grad } U$, $\vec{E}^{\Pi} = -\text{grad } U^{\Pi}$, $\vec{E}^B = -\text{grad } U^B$. Совокупность заданного поля \vec{E}^{Π} и модели среды имеет осевую (цилиндрическую) симметрию, а особая поверхность S – сфера. Введём сферическую систему координат R, θ, φ с началом O в центре шара и полярной осью по направлению поля \vec{E}^{Π} . Дополним эту систему осью Z (цилиндрических, либо декартовых координат), совмещённой с полярной осью, и началом O (см. **рис. 36, а**). Тогда для потенциала U (и его слагаемых U^{Π} , U^B) должно выполняться условие, аналогичное (4): $\partial U / \partial \varphi = 0$, то есть в сферических координатах $U = U(R, \theta)$.

Так как $\vec{E}^{\Pi} = \vec{1}_z \cdot E_z^{\Pi}$, то потенциал $U^{\Pi} = U^{\Pi}(z)$, $E_z^{\Pi} = -\frac{dU^{\Pi}}{dz}$ и аналогично

(56) – (58) имеем:

$$U^{\Pi} = -\int E_z^{\Pi} dz + C = -E^{\Pi} \int dz + C = -E^{\Pi} \cdot z + C,$$

где $C = \text{const}$ и учтено, что, $\cos\left(\vec{E}_z^{\Pi}, \vec{1}_z\right) = 1$, $E_z^{\Pi} = E^{\Pi}$, $E^{\Pi} = \text{const}$. То есть потенциал U^{Π} "линейно убывает" по направлению поля \vec{E}^{Π} (**рис. 36, б**). Значение C зависит от того, в пределах какой из плоскостей $z = \text{const}$ выберем $U^{\Pi} = 0$. Выберем $U^{\Pi} = 0$ при $z = 0$ (сплошная линия на **рис. 36, б**). Тогда получаем $0 = 0 + C$, то есть $C = 0$ и

$$U^{\Pi} = -E^{\Pi} \cdot z = -E^{\Pi} \cdot R \cdot \cos \theta. \quad (92)$$

Перейдём к нахождению потенциала U^B . Вторичное поле \vec{E}^B создают заряды e^+ и e^- ($e^+ + e^- = 0$), имеющие нечётную симметрию относительно плоскости $z = 0$. Тогда в плоскости $z = 0$: $\vec{E}^B = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \vec{1}_z E_z^B$ (см. **рис. 36, а**). Следовательно, разность потенциалов ΔU^B между двумя любыми точками плоскости $z = 0$, равная напряжению поля \vec{E}^B между этими точками (см. (26)), равна нулю. Из этого следует, что потенциал U^B одинаков во всех точках плоскости $z = 0$ и имеет на этой плоскости то же значение, что и в бесконечно удалённых точках (при $R \rightarrow \infty$). Поэтому можем выбрать значение

$$U^B = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ (и при } R \rightarrow \infty). \quad (93)$$

Область, занятую проводником, обозначили V_i , а остальную часть пространства обозначим V_e . Ниже убедимся, что потенциалы U^B и U в областях V_i и V_e определяют разные выражения. Поэтому применим для потенциалов U в областях V_i и V_e обозначения:

$$U_i = U^\Pi + U_i^B, \quad U_e = U^\Pi + U_e^B. \quad (94)$$

В соответствии с изложенным выше в области V_i , занятой проводником, суммарное электростатическое поле $\vec{E}_i = 0$. Следовательно, в этой области имеем:

$$-\vec{E}_i = \text{grad} U_i = \text{grad}(U^\Pi + U_i^B) = 0, \quad U^\Pi + U_i^B = C_1, \quad U_i^B = C_1 - U^\Pi = C_1 + E^\Pi \cdot z,$$

где $C_1 = \text{const}$. Чтобы удовлетворить условию (93), положим $C_1 = 0$. Тогда

$$U_i^B = E^\Pi \cdot z = E^\Pi \cdot R \cdot \cos \theta, \quad U_i = U^\Pi + U_i^B = 0. \quad (95)$$

Получены выражения (92), (95) для U^Π , U_i^B и $U_i = U^\Pi + U_i^B$. Если определим ещё потенциал вторичного поля вне проводника (U_e^B), то рассматриваемая прямая задача будет решена. В отличие от поля \vec{E}_i (равного нулю) поля \vec{E}_e^B и \vec{E}_e неизвестны. Не известны также источники вторичной части \vec{E}_e^B этого поля, так как их плотность σ зависит от искомого поля \vec{E}_e .

Чтобы получить выражение для потенциала U_e^B , поставим для потенциала U_e краевую задачу (для области V_e) и попытаемся найти её единственное решение. Область V_e представляет собой всё пространство без области V_i ($R \leq R_{\text{ш}}$), занятой проводником (рис. 36, в). Особых поверхностей, линий или точек в области V_e нет. Тогда, в соответствии со сказанным выше, краевая задача для области V_e должна включать дифференциальное уравнение потенциала U_e , краевое условие у поверхности проводника (при $R = R_{\text{ш}}$) и краевое условие в бесконечности (при $R \rightarrow \infty$).

Так как в области V_e нет зарядов, согласно (24), (25) потенциал U_e должен удовлетворять уравнению Лапласа (25). Учтем, что на поверхности $R = R_{\text{ш}}$, на которой есть простой слой, потенциал U непрерывен (см. (85), и рис. 25, б, и рис. 29), а в области V_i согласно (95) $U_i = 0$. Примем также во внимание то, что согласно (92), (93) асимптотическое поведение потенциала U_e при $R \rightarrow \infty$ будет определять его слагаемое U^Π . Итак, краевая задача для области V_e :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_e = 0, \\ 2) \quad \text{при } R = R_{\text{ш}} \quad U_e = 0, \\ 3) \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow \infty, \text{ как } U^\Pi, \end{array} \right\} \quad (96)$$

где потенциал U^Π определяет выражение (92).

Если удастся (каким угодно способом) найти функцию U_e , удовлетворяющую всем условиям (96), то согласно теореме единственности эта функция и будет искомым потенциалом U_e поля \vec{E}_e . Отметим, что краевую задачу вида (96), то есть задачу для функции, гармонической в некоторой области пространства, при краевых условиях I-го типа (см. (90)) на границе этой области называют задачей Дирихле.

Источником поля \vec{E}^B является нейтральная совокупность зарядов e^+ и e^- (см. рис. 36, а). Очевидно, что при $R \gg R_{ш}$ поле этих зарядов должно быть идентично полю диполя (см. задачу 5). Выскажем предположение, что в рассматриваемом случае (поле \vec{E}^{Π} – однородно, а проводник имеет форму шара) поле \vec{E}^B совпадает с полем диполя не только при $R \gg R_{ш}$, но и во всей области V_e (при $R > R_{ш}$). Точнее, поле \vec{E}_e^B – такое, какое создал бы диполь с центром в начале координат O , момент \vec{p} которого направлен, как \vec{E}^{Π} , то есть ориентирован по полярной оси. Согласно выражению (40) для потенциала U поля $\vec{f} = 4\pi\epsilon_0\vec{E}$, потенциал поля \vec{E} такого диполя $U = p \cdot \cos\theta / (4\pi\epsilon_0 R^2)$. Введём обозначение $d = p / (4\pi\epsilon_0)$ и в соответствии со сделанным выше предположением будем искать потенциал U_e^B в виде: $U_e^B = d \cdot \cos\theta / R^2$, где d – неизвестный множитель, не зависящий от координат R, θ, φ точки наблюдения. Тогда, согласно (92), (94) мы пробуем найти выражение для потенциала U_e в следующем виде:

$$U_e = -E^{\Pi} R \cos\theta + d \cos\theta / R^2. \quad (97)$$

Обратимся к условиям краевой задачи (96). Согласно (3,з) уравнение Лапласа (96)₁ для функции U_e в сферической системе координат

$$\nabla^2 U_e = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U_e}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U_e}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 U_e}{\partial \varphi^2} = 0.$$

При $\partial U_e / \partial \varphi = 0$ это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U_e}{\partial R} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U_e}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (97,a)$$

Если подставить выражение (97) для U_e в это уравнение и выполнить дифференцирование, то можно убедиться, что оба слагаемых в правой части (97) удовлетворяют уравнению Лапласа (второе из них – при $R > 0$).

Задание. Самостоятельно проверить, что выражение (97) для U_e удовлетворяет уравнению (97,a).

Но, вообще-то, справедливость равенств $\nabla^2 U^{\Pi} = 0$, $\nabla^2 U_e^B = 0$ (при $R > R_{ш}$) даже не требует такой проверки. Согласно (25), потенциал U статического поля любых источников (масс, зарядов) удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 U = 0$ вне этих источников (при $\delta=0$). Первое слагаемое в правой части выражения (97) – потенциал однородного поля \vec{E}^{Π} , а второе (при $R > R_{ш}$) – потенциал поля диполя (на расстоянии $R > R_{ш}$ от центра диполя). Это – удовлетворяющие уравнению Лапласа потенциалы полей известных нам источников вне этих источников (см. задачи 10, 14, 5).

Очевидно, что 3-му условию в (96) (при $R \rightarrow \infty$) выражение (97) удовлетворяет при любой конечной величине d . Остается обеспечить выполнение 2-го условия в (96): $U_e = 0$ при $R = R_{ш}$. Подставляя выражение (97)

для U_e в это равенство, получаем уравнение: $-E^{\text{II}} R_{\text{ш}} \cos \theta + d \cos \theta / R_{\text{ш}}^2 = 0$, решение которого для d очевидно: $d = E^{\text{II}} R_{\text{ш}}^3$. Таким образом, из (97), для потенциала U_e получаем выражение:

$$U_e = -E^{\text{II}} \cdot R \cdot \cos \theta + E^{\text{II}} \cdot R_{\text{ш}}^3 \cdot \cos \theta / R^2, \quad (98)$$

удовлетворяющее всем условиям краевой задачи (96) и, следовательно, определяющее потенциал U_e электростатического поля \vec{E}^e в области V_e (вне проводника в форме шара).

Из (98) на основе (23) не сложно получить выражения для компонент поля \vec{E}^e в сферической системе координат. Так как $E_R = -\frac{\partial U}{\partial R}$, $E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta}$, $E_\varphi = -\frac{1}{R \cdot \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$ выполняя дифференцирование получаем:

$$E_R^e = E^{\text{II}} \cdot \cos \theta \cdot \left(1 + \frac{2R_{\text{ш}}^3}{R^3}\right), \quad E_\theta^e = E^{\text{II}} \cdot \sin \theta \cdot \left(-1 + \frac{R_{\text{ш}}^3}{R^3}\right), \quad E_\varphi^e = 0.$$

Задание. Самостоятельно получить из (98) выражения для компонент E_R^e , E_θ^e , E_φ^e .

Первые слагаемые в выражениях для компонент E_R^e , E_θ^e отвечают составляющим первичного, а вторые – вторичного электрического поля в области V_e . Теперь, когда мы определили электрическое поле и его потенциал, не сложно получить выражения для (зависящих от поля) источников поля \vec{E}^B – поверхностных зарядов на границе S . Так как по нормали к границе S направлена компонента \vec{E}_R в соответствии с (86) получаем:

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot (E_{eR} - 0) \Big|_{R=R_{\text{ш}}} = \varepsilon_0 \cdot \left(-\frac{\partial U_e}{\partial R}\right) \Big|_{R=R_{\text{ш}}} = 3\varepsilon_0 E^{\text{II}} \cos \theta$$

Согласно полученному решению (95), (98) для потенциала U в области V_i вторичное поле \vec{E}_i^B – однородно, направлено навстречу первичному полю \vec{E}^{II} и равно ему по абсолютной величине. В области V_e поле \vec{E}_e^B совпадает с полем \vec{E} диполя (если бы его центр был расположен в центре шара) с моментом $\vec{p} = \vec{1}_z \cdot 4\pi\varepsilon_0 E^{\text{II}} R_{\text{ш}}^3 = \vec{1}_z \cdot 3\varepsilon_0 E^{\text{II}} V_{\text{ш}}$, где $V_{\text{ш}} = (4/3) \cdot \pi \cdot R_{\text{ш}}^3$ – объём шара.

Занятие 10

Сферический "объект" в однородном первичном поле

Рассмотрим такую задачу на примере стационарного электрического поля \vec{E} . В соответствии с (76), (79), (80) для магнитостатического поля решение соответствующей (по "геометрии") прямой задачи можно получить при заменах \vec{E} на \vec{H} и γ на μ .

Задача 16. Первичное однородное поле \vec{E}^{Π} задано в безграничной однородной среде с удельной электропроводностью γ_e . Допустим, что однородность среды нарушена из-за присутствия в ней включения ("объекта") в форме шара с радиусом $R_{\text{ш}}$ и с удельной электропроводностью γ_i . Само по себе включение однородно, то есть в его пределах $\text{grad } \gamma_i = 0$. Определим суммарное поле $\vec{E} = -\text{grad}U$ (или его потенциал U) внутри (область V_i) и вне (область V_e) "объекта" (рис. 37).

Решение. Так же, как в предыдущей задаче, будем полагать, что

$$\vec{E}_{i,e} = \vec{E}^{\Pi} + \vec{E}_{i,e}^{\text{B}}, \quad U_{i,e} = U^{\Pi} + U_{i,e}^{\text{B}}, \quad (99)$$

где $\vec{E}_{i,e}^{\text{B}}$ – вторичное поле в областях V_i, V_e , создаваемое зарядами (в виде простого слоя), индуцированными на поверхности S "объекта". Согласно (88) плотность σ этих зарядов зависит от суммарного поля \vec{E} и не может быть задана при постановке прямой задачи, если создаваемая этими зарядами часть \vec{E}^{B} поля \vec{E} неизвестна.

Учитывая симметрию задачи и форму особой поверхности, введём ту же систему координат, что в задаче 15 (см. рис. 37). Так как при $\vec{E}^{\Pi} = \vec{1}_z E^{\Pi}$ потенциал $U^{\Pi} = U^{\Pi}(z)$, то, выбирая $U^{\Pi} = 0$ при $z = 0$, получаем для U^{Π} такое же, как в задаче 15, выражение (92):

$$U^{\Pi} = -E^{\Pi} \cdot z = -E^{\Pi} \cdot R \cdot \cos \theta.$$

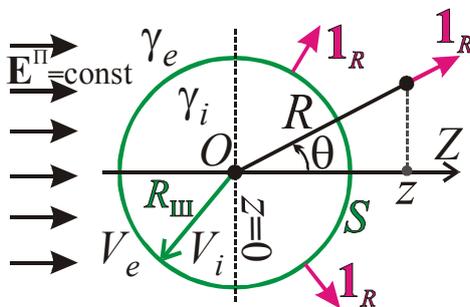


Рис. 37.

Сферический объект в однородном первичном электрическом поле \vec{E}^{Π}

Удельные электропроводности γ_i, γ_e имеют произвольные значения и, в отличие от задачи 15, здесь не можем утверждать, что $\vec{E}_i = 0, U_i = \text{const}$ и не можем задать краевое условие (для области V_e) на поверхности S включения (при $R = R_{\text{ш}}$). В данном случае краевую задачу придётся ставить и решать для совокупности областей V_i и V_e (для всего пространства).

Учтём, что порознь в областях V_i и V_e среда однородна, в этих областях поле $\vec{E}^{\text{стп}} = 0$, на особой поверхности $R = R_{\text{ш}}$ не заданы контактные э. д. с., а нормали к этой поверхности ориентированы по координатным линиям l_R (как орты $\vec{1}_R$ на рис. 37). Если выбрать $U_e^{\text{B}} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, то согласно (80), (85), (89), (92), (99) получаем следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_i = 0, \quad \nabla^2 U_e = 0; \\ 2) \quad \text{при } R \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow \infty \text{ как } U^\Pi; \\ 3) \quad \text{при } R = R_{\text{ш}} : \\ \quad \text{а) } U_i = U_e, \\ \quad \text{б) } \gamma_i (\partial U_i / \partial R) = \gamma_e (\partial U_e / \partial R). \end{array} \right\} \quad (100)$$

Условия 3а), 3б) в краевой задаче (100) обеспечивают непрерывность на границе S потенциала U и нормальной к S компоненты j_R вектора плотности постоянного электрического тока.

Если сумеем найти поля U_i, U_e , удовлетворяющие всем условиям краевой задачи (100), то эти функции и будут определять потенциал искомого поля \vec{E} в областях V_i, V_e .

Воспользуемся тем, что рассматриваемая задача имеет некоторое сходство с задачей 15 (однородность первичного поля, форма особой поверхности). Согласно решению задачи 15 при $\gamma_e=0$ вторичное электростатическое поле \vec{E}_i^B внутри занимающего область V_i проводника однородно, направлено навстречу первичному полю \vec{E}^Π и равно последнему по абсолютной величине. Вне проводника (в области V_e) вторичное поле \vec{E}_e^B совпадает с полем диполя (с моментом, направленным как \vec{E}^Π) и с центром в центре O проводника. То есть, согласно (95), (97)

$$\text{при } \gamma_e=0 \quad \vec{E}_i^B = -\vec{E}^\Pi, \quad U_i^B = E^\Pi z = E^\Pi R \cos \theta, \quad U_e^B = d \cos \theta / R^2,$$

где d – не зависящий от координат точки наблюдения множитель (в выражении для U_e^B), который мы определили в задаче 15, пользуясь краевым условием 2) в (96).

Предположим, что в рассматриваемой здесь задаче 16, при $\gamma_e \neq 0$

$$\vec{E}_i^B = -C \cdot \vec{E}^\Pi, \quad (101)$$

где $C = \text{const}$, то есть поле \vec{E}_i^B однородно и пропорционально \vec{E}^Π (с коэффициентом пропорциональности $-C$), а поле \vec{E}_e^B идентично полю диполя с неизвестным пока моментом. Тогда согласно (92), (95), (97), (99) потенциалы U_i, U_e поля \vec{E} в областях V_i, V_e нам надо искать в виде следующих функций:

$$U_i = -E^\Pi z + C E^\Pi z = (C - 1) \cdot E^\Pi R \cos \theta, \quad U_e = -E^\Pi R \cos \theta + D \frac{\cos \theta}{R^2}, \quad (102)$$

где множители C, D не зависят от координат точки наблюдения. Слагаемые $-E^\Pi z = -E^\Pi R \cos \theta$ в правых частях выражений (102) согласно (92) это – потенциал U^Π однородного первичного поля \vec{E}^Π .

Очевидно, что потенциалы U_i, U_e в выражениях (102) удовлетворяют условиям 1), 2) в краевой задаче (100) так как это потенциалы однородного поля и поля диполя при $R > 0$ (см. задачу 15). Проверка того, можно ли удовлетворить

условиям 3,а) и 3,б) в (100) сводится к решению системы уравнений 3,а), 3,б) в (100) с подстановкой выражений (102) для U_i и U_e относительно неизвестных множителей C и D . Решая эту систему двух уравнений:

$$(C-1)E^{\Pi}R_{\text{ш}} = -E^{\Pi}R_{\text{ш}} + d/R_{\text{ш}}^2, \quad \gamma_i(C-1)E^{\Pi} = \gamma_e(-E^{\Pi} - 2D/R_{\text{ш}}^3),$$

получаем:

$$C = \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e}, \quad D = CE^{\Pi}R_{\text{ш}}^3 = \frac{\gamma_i - \gamma_e}{\gamma_i + 2\gamma_e} E^{\Pi}R_{\text{ш}}^3. \quad (103)$$

Задание. На основе выражений (102) для U_i , U_e самостоятельно получить выражения (103) для C и D , решая систему уравнений 3а), 3б) в краевой задаче (100).

При подстановке (103) в (102) получаем выражения для U_i и U_e , удовлетворяющие всем условиям краевой задачи (100), и, следовательно, определяющие потенциал искомого поля \vec{E} в областях V_i ($R \leq R_{\text{ш}}$) и V_e ($R > R_{\text{ш}}$).

На основе выражений (23), (79), (102), (103) и (86) или (88) не сложно определить компоненты поля \vec{E} в областях V_i и V_e . В частности, теперь можем определить плотность источников поля \vec{E}^{B} – поверхностных зарядов с поверхностной плотностью σ на границе $R=R_{\text{ш}}$. Для определения поверхностной плотности σ зарядов на границе $R=R_{\text{ш}}$ воспользуемся выражениями (86), (102), (103). Напомню, что согласно уравнению (86) разрыв нормальной (по направлению нормали n) к особой поверхности $S_{\text{ос}}$ поля \vec{E} , на которой есть поверхностные заряды с плотностью σ , определяет равенство: $E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \sigma/\varepsilon_0$. Так как в рассматриваемой задаче нормальная к особой поверхности $R=R_{\text{ш}}$ компонента $E_n = E_R = -\partial U/\partial R$, то поверхностная плотность зарядов, индуцированных на поверхности "объекта" V_i :

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot (E_{eR} - E_{iR})\Big|_{R=R_{\text{ш}}} = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial U_i}{\partial R} - \frac{\partial U_e}{\partial R} \right)\Big|_{R=R_{\text{ш}}} = 3\varepsilon_0 CE^{\Pi} \cos\theta. \quad (104)$$

Задание. На основе выражений (102), (103) самостоятельно получить выражение (104) для поверхностной плотности σ .

Отметим, что если $\gamma_i = \gamma_e$, то согласно (103) $C=0$, $D=0$ и, следовательно, плотность $\sigma=0$, $U^{\text{B}}=0$, $\vec{E}^{\text{B}} = 0$, то есть, конечно, в отсутствие неоднородности среды по удельной электропроводности γ суммарное поле $\vec{E} = \vec{E}^{\Pi}$.

В общем случае характер распределения зарядов по поверхности S разрыва γ (при $R=R_{\text{ш}}$) и создаваемое этими зарядами поле \vec{E}^{B} существенно зависят от соотношения удельных электропроводностей γ_i и γ_e .

Если занимающий область V_i объект – хорошо проводящий по сравнению с вмещающей средой ($\gamma_i > \gamma_e$), то согласно (103), (104) величины C и D положительные. Согласно (104) множитель $3\varepsilon_0 CE^{\Pi}$ при $\cos\theta$ положителен и

поверхностная плотность σ индуцированных на поверхности S зарядов пропорциональна $\cos \theta$ с положительным коэффициентом пропорциональности.

При этом в области V_e вторичное поле \vec{E}_e^B аналогично полю расположенного в центре сферического объекта диполя с моментом, ориентированным по направлению поля \vec{E}^{Π} . В области V_i поле \vec{E}_i^B направлено

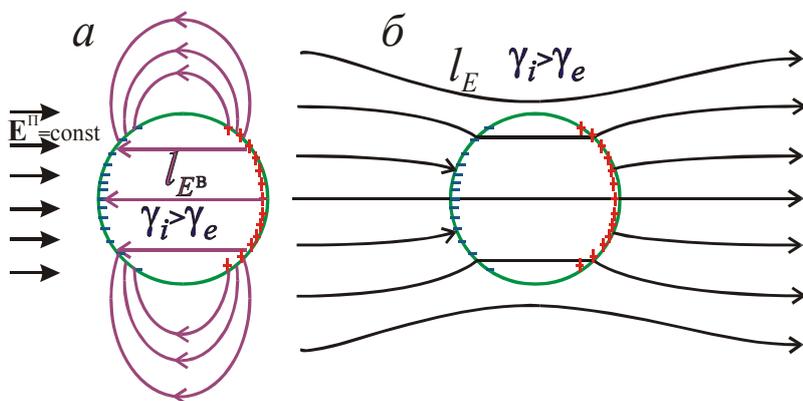


Рис. 38.

Векторные линии l_E^B (а) и l_E (б) при $\gamma_i > \gamma_e$

Если удельная электропроводность объекта в области V_i меньше, чем у вмещающей его среды ($\gamma_i < \gamma_e$), то множители C и D в выражениях (103) отрицательны. В этом случае согласно (104) плотность зарядов σ на поверхности $R=R_{ш}$, пропорциональна $-\cos \theta$. При этом в области V_e поле \vec{E}_e^B совпадает с полем расположенного в центре O области V_i диполя с моментом антипараллельным векторам \vec{E}^{Π} . В области V_i поле \vec{E}_i^B направлено как \vec{E}^{Π} , и «усиливает» суммарное поле \vec{E}_i (увеличивает его абсолютную величину) по

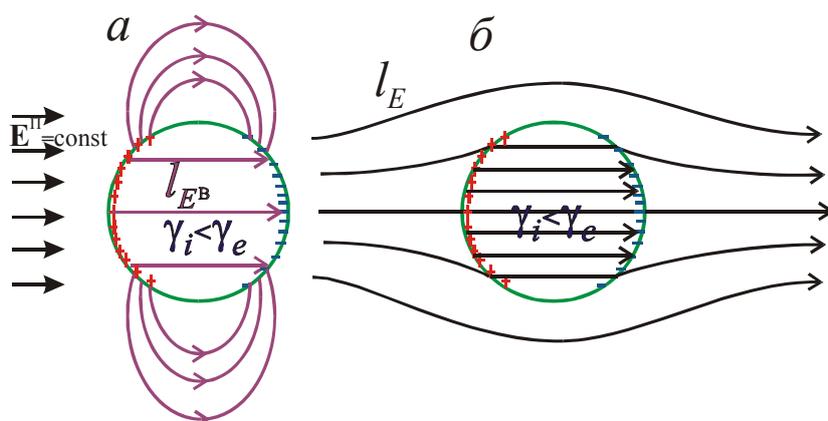


Рис. 39.

Векторные линии l_E^B (а) и l_E (б) при $\gamma_i < \gamma_e$

навстречу \vec{E}^{Π} . Это приводит к «ослаблению» суммарного поля \vec{E}_i (уменьшению его абсолютной величины) по сравнению с $E^{\Pi} = |\vec{E}^{\Pi}|$ (рис. 38, а, б).

В частности, при $\gamma_e = 0$ (или при $\gamma_i \rightarrow \infty$) имеем $C=1$ и решение рассматриваемой задачи "переходит" в решение задачи 15.

сравнению с $|\vec{E}^{\Pi}|$ (рис. 39, а, б).

Так как поле \vec{E}_e^B идентично полю диполя, то зависимости на рис. 18 можно рассматривать как графики компонент этого поля при перемещении точки наблюдения a вдоль прямых (линий) (в области V_e) при

соответствующих направлениях поля \vec{E}^{Π} относительно направлений этих линий. Например, кривая на рис. 18, в может иллюстрировать изменение

скалярной компоненты E_{ez}^B вдоль прямой, параллельной оси Z , при $\vec{E}^\Pi = \vec{1}_z E^\Pi$ и $\gamma_i > \gamma_e$.

Занятие 11

Цилиндрический "объект" в однородном первичном поле.

Задача 17. Однородное первичное поле \vec{E}^Π задано в безграничной однородной среде с удельной электропроводностью γ_e . Но однородность среды нарушена из-за присутствия в ней однородного объекта в форме кругового цилиндра с радиусом r_Π , неограниченного по «протяжённости» (высоте) и имеющего удельную электропроводность γ_i . Полагая, что поле \vec{E}^Π направлено по нормали к оси цилиндра, определим суммарное электрическое поле \vec{E} (или его потенциал U) внутри (область V_i) и вне (область V_e) такого цилиндрического «объекта», нарушающего однородность среды (рис. 40, а). Заметим, что в более общем случае \vec{E}^Π – это компонента однородного первичного поля ортогональная оси цилиндра.

Решение. Рассматриваемая задача – “плоская”, заданное поле \vec{E}^Π и модель среды одинаковы в любой плоскости, нормальной к оси цилиндрического объекта с $\gamma = \gamma_i$; особая поверхность – поверхность кругового цилиндра. Введём цилиндрическую систему координат с осью Z по оси цилиндра и отсчетом угловой координаты φ от направления \vec{E}^Π . Дополним эту систему координат проходящей через ось Z цилиндра осью X , направленной как \vec{E}^Π (рис. 40, б).

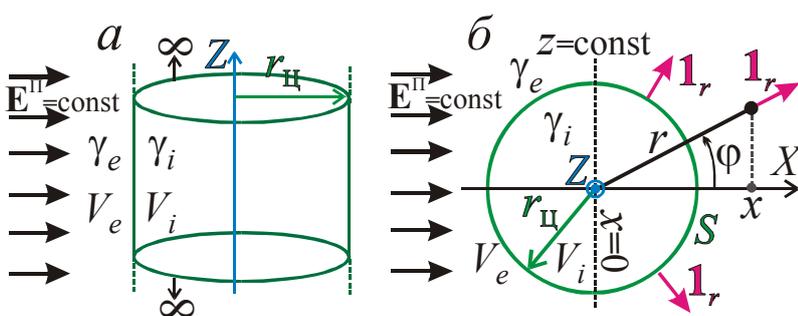


Рис. 40.

Цилиндрический объект в однородном первичном электрическом поле \vec{E}^Π

Отметим, что в рассматриваемой «плоской» задаче цилиндрические координаты r и φ идентичны полярным координатам r, φ в произвольной плоскости $z = \text{const}$.

Полагаем, что потенциал U связан с полем \vec{E} равенством (79)₁:

$\vec{E} = -\text{grad}U$. Введём для поля \vec{E} и потенциала U обозначения (99):

$$\vec{E}_{i,e} = \vec{E}^\Pi + \vec{E}_{i,e}^B, \quad U_{i,e} = U^\Pi + U_{i,e}^B.$$

Для потенциала $U^\Pi(x)$ однородного первичного поля \vec{E}^Π , направленного по оси X , выбирая $U^\Pi = 0$ при $x = 0$, подобно (92), получаем:

$$U^\Pi = -E^\Pi \cdot x = -E^\Pi \cdot r \cos \varphi. \quad (106)$$

Источники вторичного поля \vec{E}^B – поверхностные заряды, индуцированные на границе $r=r_{ц}$, плотность σ которых определяет выражение вида (88): $\sigma = 2\varepsilon_0 \cdot \gamma_{ie} \cdot E_r^{cp}$. Так как модель среды и поле \vec{E}^{Π} симметричны относительно плоскости $x=0$, то эта плоскость разделяет разноименные поверхностные заряды лежащие на границе $r=r_{ц}$. При $r \gg r_{ц}$ поле этих зарядов должно быть идентично полю линейного диполя (см. [13], задача 9, и выражение (50)). Следовательно, можем полагать, что при $r \rightarrow \infty$ потенциал $U_e^B \rightarrow 0$ как $1/r$. Кроме того, при учёте симметрии задачи и того, что при изменении координаты φ точки наблюдения на 2π эта точка возвращается в исходное положение очевидно следующее. Потенциал U^B вторичного поля \vec{E}^B в показанной на **рис. 40, б** системе координат r, φ, z не зависит от координаты z и является чётной периодической (с периодом 2π) функцией координаты φ :

$$U^B = U^B(r, \varphi), \quad U^B(r, \varphi) = U^B(r, -\varphi), \quad U^B(r, \varphi) = U^B(r, \varphi + 2\pi n), \quad (107)$$

где n – целое число

Краевые условия в рассматриваемой задаче могут быть заданы лишь в бесконечно удалённых от цилиндра точках (при $r \rightarrow \infty$). Поставим краевую задачу (для всего пространства). При учёте однородности среды в областях V_i и V_e по удельной электропроводности γ , выражений (99), (106), а также того, что нормали к особой поверхности $r=r_{ц}$ ориентированы по координатным линиям l_r (направлениям ортов $\vec{1}_r$ на **рис. 40, б**), подобно (100), можем поставить краевую задачу следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_i = 0, \quad \nabla^2 U_e = 0; \\ 2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad U_e \rightarrow \infty \text{ как } U^{\Pi}; \\ 3) \quad \text{при } r = r_{ц} : \\ \quad \quad a) \quad U_i = U_e, \\ \quad \quad б) \quad \gamma_i (\partial U_i / \partial r) = \gamma_e (\partial U_e / \partial r). \end{array} \right\} \quad (108)$$

где потенциал U^{Π} определяет выражение (106).

На основе (108) определим требования к потенциалу U^B вторичного поля \vec{E}^B . При учёте линейности оператора Лапласа ∇^2 , того, что функция U^{Π} – гармоническая (удовлетворяет уравнению Лапласа: $\nabla^2 U^{\Pi} = 0$), непрерывности потенциала U^{Π} на границе $r=r_{ц}$ и того, что $U_{i,e}^B = U_{i,e} - U^{\Pi}$, из (108) для искомого потенциала U^B получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 & 1) \quad \nabla^2 U_i^B = 0, \quad \nabla^2 U_e^B = 0; \\
 & 2) \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad U_e^B \rightarrow 0; \\
 & 3) \quad \text{при } r = r_{\text{п}}: \\
 & \quad \text{а) } U_i^B = U_e^B, \\
 & \quad \text{б) } \gamma_i \left[\frac{\partial(U^{\text{II}} + U_i^B)}{\partial r} \right] = \gamma_e \left[\frac{\partial(U^{\text{II}} + U_e^B)}{\partial r} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

В соответствии с первым условием в (109) потенциал U^B в областях V_i, V_e должен удовлетворять уравнению Лапласа. Согласно (3,2) в цилиндрических координатах при выполнении первого из условий в (107): $U^B = U^B(r, \varphi)$ уравнение Лапласа для функции U^B имеет вид:

$$\frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U^B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U^B}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Умножая левую и правую части этого уравнения на r^2 и перенося второе слагаемое из левой части в правую получаем равенство:

$$r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial U^B}{\partial r} \right) = - \frac{\partial^2 U^B}{\partial \varphi^2}. \quad (110)$$

Будем решать уравнение Лапласа для $U^B(U_i^B, U_e^B)$ методом разделения переменных, то есть попытаемся найти решения уравнения (110) для $U_{i,e}^B$ в виде произведения двух взаимно независимых функций: $U_{i,e}^B = \Phi(r) \cdot \Psi(\varphi)$. То есть функция Φ зависит от r и не зависит от φ , а функция Ψ зависит от φ и не зависит от r . При этих условиях из (110) получаем:

$$\Psi \cdot r \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\Phi \cdot \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} \quad \text{или} \quad \frac{r}{\Phi} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right) = - \frac{1}{\Psi} \cdot \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}. \quad (111)$$

Второе выражение в (111) определяет равенство двух взаимно независимых функций. Левая часть этого уравнения зависит только от r , а правая – только от φ . Такому уравнению удовлетворим, приравняв его левую и правую части к произвольному числу λ .

При этом, из (111)₂, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{\Phi} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right) &= \lambda, & - \frac{1}{\Psi} \cdot \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} &= \lambda \quad \text{или} \\
 r \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{d\Phi}{dr} \right) &= \lambda \cdot \Phi, & \frac{d^2\Psi}{d\varphi^2} &= -\lambda \cdot \Psi.
 \end{aligned} \quad (112)$$

Каждое из этих двух уравнений второго порядка (112) имеет два частных решения.

Решения уравнений (112) зависят от знака числа λ . Рассмотрим два случая:

1) $\lambda = -m^2 \leq 0$, 2) $\lambda = m^2 \geq 0$, где m – неотрицательное число, то есть $m \geq 0$.

1) Не сложно убедиться в том, что частные решения уравнений (112) при $\lambda = -m^2 \leq 0$ – это функции:

$$\Phi_1 = \cos(m \cdot \ln r), \quad \Phi_2 = \sin(m \cdot \ln r); \quad \Psi_1 = e^{m\varphi}, \quad \Psi_2 = e^{-m\varphi}. \quad (113)$$

Задание. Проверить самостоятельно, что определяемые выражениями (113) функции $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ удовлетворяют уравнениям (112) при $\lambda = -m^2$.

Общие решения уравнений (112) при произвольном фиксированном значении $m \geq 0$ получим в виде линейных комбинаций их частных решений (113) для функций Φ и Ψ . Если попытаемся воспользоваться выражениями (113) для Φ и Ψ , то потенциал $U^B = \Phi \cdot \Psi$ не сможет удовлетворить некоторым из требований, предъявленных выше к решению задачи для U^B . При том виде, который имеют функции Φ_1, Φ_2 , в (113) для U^B , не будет выполнено, в частности, краевое условие “2” в (109). Кроме того, при решениях (113) уравнений (112) нельзя удовлетворить, например, третьему условию в (107) ($U^B = \Phi \cdot \Psi$ – периодическая функция аргумента φ). Таким образом, при выборе $\lambda \leq 0$ не удастся получить решение краевой задачи (108).

2). $\lambda = m^2 \geq 0$. Легко проверить, что в этом случае две пары частных решений уравнений (112) для Φ и Ψ – это функции:

$$\Phi_1 = r^m, \quad \Phi_2 = r^{-m}, \quad \Psi_1 = \cos(m\varphi), \quad \Psi_2 = \sin(m\varphi). \quad (113')$$

Задание. Проверить самостоятельно, что определяемые выражениями (113') функции $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ удовлетворяют уравнениям (112) при $\lambda = m^2$.

Общие решения обыкновенных дифференциальных уравнений (112) второго порядка для функций Φ и Ψ при произвольном значении $m \geq 0$ могут быть представлены в виде линейной комбинации частных решений:

$$\Phi = a \cdot r^m + b \cdot r^{-m}, \quad \Psi = c \cdot \cos(m\varphi) + d \cdot \sin(m\varphi), \quad (114)$$

где a, b, c, d – множители, не зависящие от аргументов r, φ функций Φ, Ψ . Однако эти множители могут зависеть от значения m .

Сформулированные выше требования (107), (109) к потенциалу $U^B = \Phi \cdot \Psi$ заставляют нас отбросить некоторые из слагаемых в выражениях (114) для Φ и Ψ . Согласно второму условию в (107) функция $\Psi(\varphi)$ должна быть чётной, поэтому следует в (114) выбрать $d=0$. В области V_e имеем $r_{ц} < r < \infty$ и, если для этой области $a \neq 0$, то при $m > 0$ получим $U_e^B \rightarrow \infty$ если $r \rightarrow \infty$, что противоречит краевому условию “2” в (109). В области V_i имеем $0 \leq r < r_{ц}$ и, если для этой области $b \neq 0$, то при $m > 0$ потенциал $U_i^B \rightarrow \infty$ если $r \rightarrow 0$, то есть ось Z будет особой линией поля U^B что противоречит условиям задачи (109), согласно которым поле U^B не имеет особой линии при $r=0$. Тогда, введя обозначения $A(m) = a \cdot c, B(m) = b \cdot c$, для потенциала $U^B = \Phi \cdot \Psi$ в областях V_i, V_e получаем:

$$U_i^B(m) = A(m) \cdot r^m \cos(m\varphi), \quad U_e^B(m) = B(m) \cdot r^{-m} \cos(m\varphi).$$

Эти выражения определяют частные решения для U_i^B и U_e^B , так как соответствуют какому-либо одному, хотя и произвольному, значению $m \geq 0$.

Общие решения для U_i^B , U_e^B получим, суммируя все частные решения $U^B(m)$ (при всех возможных значениях $m \geq 0$).

В общем случае мы должны были бы искать решение для потенциалов $U_{i,e}^B$ в областях V_i , V_e в виде интегралов Фурье: $U^B = \int_0^{\infty} U^B(m) dm$, подынтегральная функция в которых содержит множитель $\cos(m\varphi)$. Но интегралы такого вида выражают *не периодические функции* аргумента φ . При учёте 3-го равенства в (107), определяющего периодическую зависимость функции $U^B(r, \varphi)$ от φ , можем ограничиться при суммировании $U^B(m)$ целыми значениями m , то есть выразить общие решения для U_i^B , U_e^B в виде рядов Фурье (см. [7]):

$$U_i^B = \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot r^m \cos(m\varphi), \quad U_e^B = \sum_{m=0}^{\infty} B(m) \cdot r^{-m} \cos(m\varphi). \quad (115)$$

Согласно (99)₂, (106), (115), для потенциала U суммарного поля \vec{E} в областях V_i , V_e имеем:

$$\begin{aligned} U_i &= -E^{\Pi} r \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot r^m \cos(m\varphi), \\ U_e &= -E^{\Pi} r \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} B(m) \cdot r^{-m} \cos(m\varphi). \end{aligned} \quad (116)$$

Выражения (115), (116) удовлетворяют условиям “1”, “2” в краевой задаче (108), (109) при любых значениях $A(m)$, $B(m)$. Множители $A(m)$, $B(m)$ в (116) определим из граничных условий “3,а”, “3,б” в (109). Из условия “3,а” в (109) согласно (115) получаем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot r_{\Pi}^m \cos(m\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} B(m) \cdot r_{\Pi}^{-m} \cos(m\varphi).$$

Равенство этих рядов Фурье возможно только при равенстве коэффициентов Фурье, то есть в данном случае при $A(m) \cdot r_{\Pi}^m = B(m) \cdot r_{\Pi}^{-m}$. Следовательно

$$B(m) = A(m) \cdot r_{\Pi}^{2m}. \quad (117)$$

Из условия “3,б” в (109), согласно (116), (117), получаем:

$$\begin{aligned} \gamma_i \left[-E^{\Pi} \cos \varphi + \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot m \cdot r_{\Pi}^{m-1} \cos(m\varphi) \right] &= \\ = \gamma_e \left[-E^{\Pi} \cos \varphi - \sum_{m=0}^{\infty} A(m) \cdot m \cdot r_{\Pi}^{m-1} \cos(m\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (118)$$

Из того, что уравнение (118) справедливо при любых γ_i , γ_e , r_{Π} , следует равенство множителей при $\cos(m\varphi)$ в левой, и правой частях этого уравнения при каждом из значений m . Рассмотрим эти равенства при $m=0, 1, 2, \dots$.

При $m=0$ из (118) получаем: $\gamma_i \cdot A(0) \cdot 0 = -\gamma_e \cdot A(0) \cdot 0$, то есть множитель $A(0)$ может быть выбран произвольно. Выберем

$$A(0) = C, \quad (119)$$

где $C = \text{const}$.

При $m=1$ к соответствующим членам рядов в левой и правой частях уравнения (118) надо прибавить отвечающие первичному полю первые слагаемые в этих частях, содержащие множитель $\cos(1 \cdot \varphi)$. Тогда приходим к уравнению

$$\gamma_i [-E^\Pi + A(1)] = -\gamma_e [E^\Pi + A(1)],$$

решая которое относительно $A(1)$ и принимая во внимание выражение (117) получаем:

$$A(1) = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi, \quad B(1) = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot r_\Pi^2, \quad \text{где } \gamma_{ie} = (\gamma_i - \gamma_e) / (\gamma_i + \gamma_e) - \quad (120)$$

коэффициент контрастности границы (цилиндра с вмещающей его средой), см. (88).

При $m=2$ из (118) получаем уравнение: $\gamma_i \cdot A(2) = -\gamma_e \cdot A(2)$, удовлетворить которому можем только при значении $A(2) = 0$. Аналогичные уравнения имеем при $m=3, 4, \dots$. Следовательно, согласно (117), (118) при $m \geq 2$: $A(m) = 0, B(m) = 0$, то есть все члены рядов, выражающих в (115) потенциал U^B , при $m \geq 2$ равны нулю.

Подставляя (119), (120) в (116), и при учёте (117) получаем выражения для U_i, U_e с точностью до постоянного слагаемого C . Требуя, чтобы выполнялось краевое условие "2" в (108), (109), получаем $C = 0$ и, следовательно, потенциал вторичного поля определяют выражения:

$$U_i^B = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot r \cdot \cos \varphi = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot x, \quad U_e^B = \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot r_\Pi^2 \cdot \frac{\cos \varphi}{r}.$$

Потенциал суммарного поля:

$$U_i = E^\Pi r (-1 + \gamma_{ie}) \cos \varphi = E^\Pi (-1 + \gamma_{ie}) \cdot x, \quad U_e = E^\Pi \left[-r + \frac{\gamma_{ie} \cdot r_\Pi^2}{r} \right] \cos \varphi. \quad (121)$$

При сравнении выражений для U_i^B и (106) для потенциала однородного первичного поля видно, что вторичное поле \vec{E}_i^B в области V_i однородно и коллинеарно полю \vec{E}^Π . Из полученного решения прямой задачи следует, что направления полей \vec{E}_i^B и \vec{E}^Π одинаковы при $\gamma_i < \gamma_e$ ($\gamma_{ie} < 0$) и противоположны при $\gamma_i > \gamma_e$ ($\gamma_{ie} > 0$). При сравнении полученного выражения для U_e^B и выражения для потенциала U поля \vec{f} линейного диполя (см. [13], выражение 50 на стр. 40) и учёте того, что $\vec{f} / (4\pi\epsilon_0) = \vec{E}$, видно, что поле \vec{E}_e^B совпадает с полем линейного диполя, лежащего на оси Z при линейной плотности дипольных моментов $\eta^\lambda = 2\pi\epsilon_0 \cdot \gamma_{ie} \cdot E^\Pi \cdot r_\Pi^2$.

Векторные линии l_{E^B} и l_E полей \vec{E}^B и \vec{E} в плоскости $z=\text{const}$ (в общих чертах) сходны по конфигурации с линиями l_{E^B} , l_E , показанными на рис. 38, 39 для случая, когда отличающийся по удельной электропроводности γ от вмещающей среды "объект" имеет форму шара.

Занятие 12

Шаровой и точечный токовый электрод в безграничной однородной среде

Задача 18. В безграничную однородную проводящую среду с удельной электропроводностью γ (или удельным электрическим сопротивлением $\rho=1/\gamma$) помещён занимающий область V_i токовый электрод \mathcal{E} в форме шара с радиусом $R_{\text{ш}}$ и с эмиссией $I_{\mathcal{E}}=I$ (рис. 41). Примем допущение, что этот (обычно металлический) электрод – идеальный проводник ($\gamma_i=\gamma_{\mathcal{E}}\rightarrow\infty$). Надо определить поле \vec{E} , его потенциал U и плотность \vec{j} тока в окружающей электрод однородной среде – в области V_e , а также заряд электрода и величину, называемую "сопротивление заземления электрода".

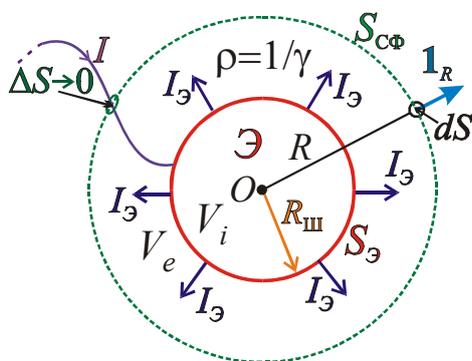


Рис. 41.

Токовый электрод в форме шара в безграничной однородной среде

Для того чтобы цепь постоянного тока была замкнутой необходимы, как минимум, два токовых электрода. Здесь будем полагать, что второй токовый электрод расположен на очень большом расстоянии от той области пространства, в которой нас интересует поле, и полем второго электрода можно пренебречь по сравнению с полем электрода \mathcal{E} .

Решение. Если объёмный электрод \mathcal{E} – идеальный проводник, то согласно выражению (79): $\vec{E} = -\text{grad } U$ и закону Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ или $\vec{E} = \vec{j}/\gamma$ внутри электрода (в области V_i) имеем:

$$-\text{grad } U_i = \vec{E}_i = \vec{j}_i/\infty = 0, \quad U_i = U_{\mathcal{E}} = \text{const},$$

то есть область V_i , занятая идеально проводящим электродом, эквипотенциальна. Если также справедливо допущение, что однородность среды в области V_e , не искажена из-за присутствия тонкого изолированного провода (по которому "подводится" электрический ток I к электроду), то рассматриваемая задача – сферически симметрична.

Введём сферическую систему координат с началом O в центре электрода (см. рис. 41) Тогда согласно (8), (9) для сферически симметричных скалярного и векторных полей во внешней области V_e имеем:

$$U = U(R), \quad \vec{E} = \vec{1}_R E_R(R), \quad \vec{j} = \vec{1}_R j_R(R). \quad (122)$$

В соответствии с интегральной формой уравнения непрерывности постоянного электрического тока (82)_{II} для замкнутой поверхности S , расположенной в среде, окружающей электрод (в области V_e), справедливо равенство:

$$\oint_S (\vec{j} \cdot \vec{dS}) = I_S = 0.$$

Поток I_S вектора \vec{j} через S составляют: ток I по "проводу" и ток эмиссии электрода $I_{\mathcal{E}}$. Для случаев, когда ток I направлен к электроду (как на [рис. 41](#)) или от электрода получаем соответственно: $-I+I_{\mathcal{E}}=0$ или $I+I_{\mathcal{E}}=0$, то есть $I_{\mathcal{E}}=\pm I$. В дальнейшем будем обозначать $I_{\mathcal{E}}=I$, опуская знаки " \pm " и придавая величине I алгебраический смысл.

Если S ($S_{\text{СФ}}$ на [рис. 41](#)) – сферическая поверхность $R=\text{const}$, то согласно (122) во всех точках этой поверхности значения потенциала U и каждой из скалярных компонент E_R, j_R одинаковы. Пусть S_0 – не замкнутая поверхность, представляющая собой поверхность $S_{\text{СФ}}$ без бесконечно малой площадки ΔS , через которую "протекает" линейный ток I (см. [рис. 41](#)). Площадь S_0 , с точностью до бесконечно малой величины равна $4\pi \cdot R^2$. Поток вектора \vec{j} через поверхность S_0 :

$$\int_{S_0} (\vec{j} \cdot \vec{dS}) = I_{\mathcal{E}} = I. \quad (123)$$

В каждой точке поверхности S_0 векторы \vec{dS} и $\vec{1}_R$ направлены одинаково, следовательно, $(\vec{j} \cdot \vec{dS}) = j_R \cdot (\vec{1}_R \cdot \vec{dS}) = j_R \cdot dS$. Так как на поверхности S_0 координата $R=\text{const}$, то, согласно (122), (123), $I = j_R \cdot S_0 = j_R \cdot 4\pi R^2$, откуда следует, что

$$j_R = I / (4\pi R^2). \quad (124)$$

Из (124) на основе выражений $E_R = j_R / \gamma = \rho \cdot j_R$, $U = \int_R^{\infty} E_R \cdot dR$ не сложно

определить, что при $R > R_{\text{ш}}$

$$E_R = I / (\gamma \cdot 4\pi R^2) = \rho \cdot I / (4\pi R^2), \quad U = I / (\gamma \cdot 4\pi R) = \rho \cdot I / (4\pi R). \quad (125)$$

Задание. Получить самостоятельно выражение (125)₂ для потенциала U .

Выражения (125) для поля \vec{E} и потенциала U шарового электрода идентичны формулам (61), (63) для поля $\vec{f} = 4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ и потенциала U поля \vec{f} однородной поверхностной массы в форме сферической поверхности. Это связано с тем, что источники поля \vec{E} такого (окружённого однородной по ρ средой) электрода в форме шара – однородные поверхностные заряды (с поверхностной плотностью $\sigma = \text{const}$) находящиеся на поверхности электрода, при $R = R_{\text{ш}}$. Учитывая, что внутри электрода поле $\vec{E} = 0$, пользуясь равенством $\sigma = \epsilon_0 \cdot (E_R^e - E_R^i) \Big|_{R=R_{\text{ш}}} = \epsilon_0 \cdot E_R^e \Big|_{R=R_{\text{ш}}}$, из (125)₁ получаем выражение для поверхностной плотности этих зарядов:

$$\sigma = \varepsilon_0 \rho I / (4\pi R_{\text{ш}}^2). \quad (126)$$

Так как на поверхности, шарового электрода $\sigma = \text{const}$, то заряд электрода

$$e_{\text{э}} = \sigma \cdot S_{\text{э}} = \sigma \cdot (4\pi R_{\text{ш}}^2) = \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I, \quad (127)$$

где I – эмиссия электрода. Заметим, что последнее равенство справедливо для идеально проводящего электрода любой формы, если он окружён однородной по удельному электрическому сопротивлению ρ средой.

Так как на поверхностном заряде в виде простого слоя потенциал U непрерывен, то в соответствии с (125)₂ потенциал электрода (всей эквипотенциальной области V_i) определяет выражение:

$$U_{\text{э}} = \rho \cdot I / (4\pi \cdot R_{\text{ш}}), \quad (128)$$

см. (64) и [рис. 28, 29](#).

Сопротивление R_{12} ограниченного нормальными (к векторам \vec{j}) сечениями $S_{\text{н1}}$, $S_{\text{н2}}$ участка l_{12} цепи постоянного электрического тока определяет следующее выражение (см., например, [6] или [16]):

$$R_{12} = \frac{1}{I} \int_1^2 \rho (\vec{j} \cdot d\vec{l}) = \int_1^2 \rho \left(\frac{\vec{j}}{I} \cdot d\vec{l} \right), \quad (129)$$

где I – ток в этой цепи, а 1, 2 – точки на поверхностях $S_{\text{н1}}$, $S_{\text{н2}}$.

На основе полученных выше выражений определим сопротивление заземления $R_{\text{э}}$ шарового электрода. Это – сопротивление от поверхности электрода до бесконечно-удалённых точек. При $\vec{j} = \vec{1}_R \cdot j_R(R)$ и $\rho = \text{const}$ из (124), (129) получаем:

$$R_{\text{э}} = (\rho/I) \cdot \int_{R_{\text{ш}}}^{\infty} j_R dR = (\rho/(4\pi)) \cdot \int_{R_{\text{ш}}}^{\infty} 1/R^2 dR.$$

Следовательно,

$$R_{\text{э}} = \rho / (4\pi \cdot R_{\text{ш}}). \quad (130)$$

То есть чем меньше размер электрода и больше удельное электрическое сопротивление ρ окружающей электрод среды, тем выше сопротивление заземления $R_{\text{э}}$ электрода.

Заметим, что выражение для сопротивления заземления электрода $R_{\text{э}}$ в рассматриваемом примере можно получить и несколько проще – пользуясь законом Ома для участка цепи постоянного тока. В соответствии с этим законом и при учёте того, что при стационарном электрическом поле \vec{E} напряжение \mathcal{E} этого поля на "пути" от поверхности $S_{\text{э}}$ электрода (см. [рис. 41](#)) до "бесконечности" равно разности потенциалов U на участке цепи от поверхности шарового электрода до бесконечно-удалённых от него точек. Для такого участка цепи ток

$$I = (U(R_{\text{ш}}) - U(\infty)) / R_{\text{э}} = (U(R_{\text{ш}}) - 0) / R_{\text{э}}. \quad \text{То есть } R_{\text{э}} = U(R_{\text{ш}}) / I$$

и в соответствии с (128) получаем для сопротивления заземления $R_{\text{э}}$ выражение (130).

Согласно (125), при заданном токе I поле шарового электрода в окружающей его однородной среде не зависит от радиуса $R_{\text{ш}}$ электрода. В частности, если $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$, то выражения (125) справедливы при $R > 0$ и определяют поле расположенного в начале сферических координат точечного электрода в

безграничной однородной среде с удельным электрическим сопротивлением $\rho=1/\gamma$. В этом случае источник поля \vec{E} – точечный заряд $e_{\mathcal{E}}=\epsilon_0 \cdot \rho \cdot I$. То есть при $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$ мы заменяем поверхностный заряд таким же по величине точечным зарядом и согласно (126) при $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$ плотность $\sigma \rightarrow \infty$. Из (128), (130) следует, что при $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$ и конечной эмиссии $I > 0$ потенциал электрода $U_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$. Кроме того, при $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$ согласно (130) сопротивление заземления электрода $R_{\mathcal{E}} \rightarrow \infty$.

Поле точечного токового электрода в присутствии непроводящего полупространства

В рассматриваемом ниже примере показано, какое влияние (в первом приближении) оказывает граница «земля – воздух» на стационарное электрическое поле точечного токового электрода.

Задача 19. Плоскость S делит пространство на две области (два полупространства) V_1 и V_2 с удельными электропроводностями $\gamma_1=\gamma=1/\rho$ и $\gamma_2=0$ ($\rho_2=\infty$) соответственно. В точке A в однородной проводящей области V_1 на расстоянии h от границы S расположен точечный токовый электрод с эмиссией I . Надо определить потенциал U поля \vec{E} в областях V_1 , V_2 .

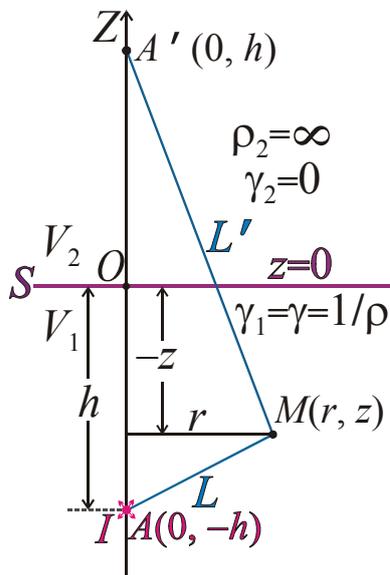


Рис. 42.

Точечный токовый электрод A в присутствии непроводящего полупространства

Решение. Задача симметрична относительно проходящей через точку A нормали n к плоскости S ; особая поверхность – плоскость S . Введём цилиндрическую систему координат, совместив ось Z с этой нормалью n и поместив начало координат O в точку пересечения оси Z с плоскостью S (рис. 42). Если ось Z направлена из V_1 в V_2 , то в области V_1 имеем: $-\infty < z < 0$, а в области V_2 $0 < z < \infty$.

Полагая, что \vec{E} и U связаны равенством $\vec{E} = -\text{grad } U$, введём обозначения, аналогичные (99):

$$\vec{E}_{1,2} = \vec{E}^{\text{П}} + \vec{E}_{1,2}^{\text{В}}, \quad U_{1,2} = U^{\text{П}} + U_{1,2}^{\text{В}}, \quad (131)$$

где $\vec{E}_{1,2}$ и $U_{1,2}$ – поля \vec{E} и U соответственно в

областях V_1 , V_2 . Источник первичного поля $\vec{E}^{\text{П}}$ – точечный заряд $e_{\mathcal{E}}=\epsilon_0 \cdot \rho \cdot I$ токового электрода, расположенного в точке A . Согласно (125)₂ при учёте обозначения $\gamma_1=1/\rho$ имеем: $U^{\text{П}}=\rho \cdot I/(4\pi \cdot L)$, где L – расстояние от точки A до точки наблюдения M . Координаты этих точек: $r_A=0$, $z_A=-h$, $r_M=r$, $z_M=z$ (см. рис. 42), тогда (при $z < 0$) расстояние $L = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ и потенциал первичного поля

$$U^{\text{П}} = \rho \cdot I / \sqrt{r^2 + (z+h)^2}. \quad (132)$$

Согласно (132), при $L \rightarrow \infty$ потенциал первичного поля $U^{\Pi} \rightarrow 0$, как $1/L$.

Источники вторичного поля \vec{E}^B – поверхностные заряды (в виде простого слоя) на плоскости S . Поле \vec{E}^B и его потенциал U^B должны быть чётно симметричными относительно плоскости S (плоскости $z=0$). Если ещё учесть осевую симметрию задачи, то в соответствии с (4) для потенциала U^B в показанной на **рис. 42** цилиндрической системе координат имеем:

$$U^B = U^B(r, z), \quad U_2^B(r, z) = U_1^B(r, -z). \quad (133)$$

Воспользуемся тем, что среда в области V_2 – изолятор ($\gamma_2=0$). В соответствии с законом Ома в дифференциальной форме (83) в непроводящем полупространстве V_2 плотность тока $\vec{j}^{(2)} = \gamma_2 \cdot \vec{E}^{(2)} = 0$, а согласно (87) нормальная к границе S компонента $j_n = j_z$ непрерывна на границе S . Следовательно, в проводящем полупространстве (в области V_1) у его границе S с нормалью n по направлению оси Z :

$$j_z^{(1)} = 0 \Big|_S \rightarrow \gamma_1 E_z^{(1)} = 0 \Big|_S \rightarrow E_z^{(1)} = 0 \Big|_S \rightarrow (\partial U_1 / \partial z) = 0 \Big|_S.$$

Таким образом, у границы S проводника (в области V_1) с изолятором (областью V_2) известно значение нормальной к поверхности S производной потенциала U . Эта производная равна нулю. В соответствии с (90)₂ это означает, что на такой границе S области V_1 может быть задано краевое условие II-го типа. Благодаря этому мы можем поставить краевую задачу для области V_1 , занятой проводником, и определить поле в этой области независимо от поля в изоляторе, занимающего полупространство V_2 .

Область V_1 – полупространство, которое можно представить себе, как полушарие бесконечно большого радиуса. Краевые условия для проводящего полупространства V_1 надо задать на плоскости S (при $z=0$) и в бесконечно удалённых от электрода A точках полусферы ($L \rightarrow \infty$). Учитывая однородность среды по удельной электропроводности γ в области V_1 , выражения (80), (131)₂, (132), а также то, что точка A ($L=0$) – особая, так как в ней есть точечный заряд e_3 , получаем следующую краевую задачу для области V_1 :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \nabla^2 U_1 = 0, \quad \text{при } L \neq 0, \\ 2) \quad \text{при } L \rightarrow \infty \quad U_1 \rightarrow 0 \text{ как } 1/L, \\ 3) \quad \text{при } z = 0 \quad (\partial U_1 / \partial z) = 0, \\ 4) \quad \text{при } L \rightarrow 0 \quad U_1 \rightarrow \infty \text{ как } U^{\Pi}. \end{array} \right\} \quad (134)$$

Потенциал U^{Π} в краевой задаче (134) определяет выражение (132). Условие “4” в особой точке следует из того, что потенциал U^B вторичного поля в точке A ограничен. При записи краевого условия “2” учтено, что при $L \rightarrow \infty$ потенциал $U^B \rightarrow 0$ не медленнее, чем U^{Π} .

При подборе соответствующего краевой задаче (134) выражения для U_1^B попробуем воспользоваться методом зеркальных изображений. В рассматриваемой задаче предпосылки применения этого метода вполне

очевидны. Непроводящая среда (или вакуум) в области V_2 препятствует прохождению электрического тока через плоскость S .

На рис.43, а показано то, какой может быть форма векторных линий l_j или l_E полей \vec{j} или \vec{E} в области V_1 в присутствии границы S с изолятором. Если бы

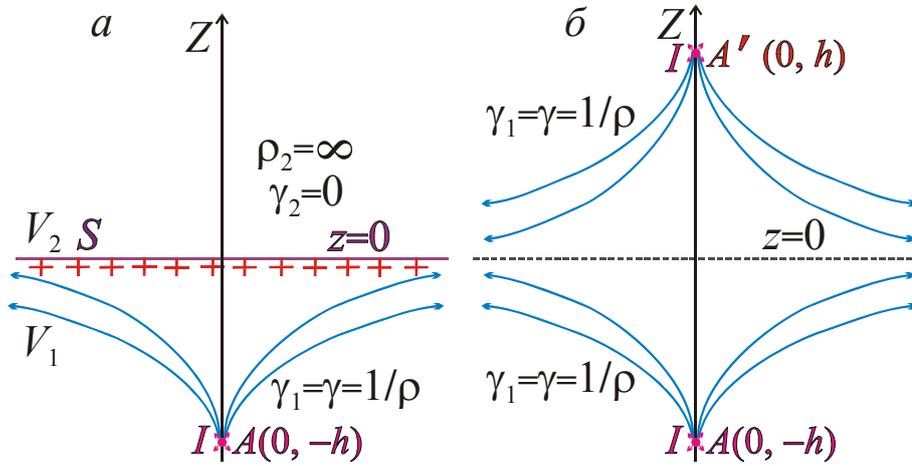


Рис. 43.

К методу зеркальных изображений

границы S не было и во всем пространстве была однородная проводящая среда с удельной электропроводностью $\gamma_1 = \gamma = 1/\rho$, то подобную форму в полупространстве V_1 , эти векторные линии имели бы, если в точке A' , симметричной точке A относительно плоскости S , находился точечный электрод с эмиссией $I'=I$ и с зарядом $e_{\mathcal{A}'} = e_{\mathcal{A}}$ (рис.43, б).

Предположим, что поле электрода A в полупространстве V_1 в присутствии плоской границы S с изолятором не просто похоже, а идентично полю двух электродов с одинаковыми зарядами и эмиссиями равными I : действительного в точке A и фиктивного в точке A' , находящихся в безграничной однородной среде с удельной электропроводностью $\gamma_1 = 1/\rho$. Так как координаты точки A' : $r_{A'} = 0$, $z_{A'} = h$ (рис.43, б), потенциал U_1 поля зарядов двух таких электродов определяют выражения:

$$U_1 = \frac{\rho \cdot I}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \right), \quad L = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}, \quad L' = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}. \quad (135)$$

Не сложно убедиться в том, что выражение (135) для U_1 удовлетворяет при $z < 0$ всем условиям краевой задачи (134) и, следовательно, это и есть искомое решение для проводящего полупространства V_1 .

Задание. Проверить самостоятельно то, что выражения (135) для потенциала U_1 удовлетворяют всем условиям краевой задачи (134).

Второе слагаемое в правой части выражения (135) для U_1 отвечает потенциалу U_1^B . Таким образом, в полупространстве V_1 вторичное поле, фактически создаваемое поверхностным зарядом на плоскости S , совпадает с полем заряда $e_{\mathcal{A}} = \epsilon_0 \cdot \rho \cdot I$ фиктивного точечного электрода в точке A' ,

являющегося зеркальным изображением действительного электрода A в плоскости S .

Осталось найти потенциал U_2^B (в изоляторе), что легко сделать, если принять во внимание, что вторичное поле, создаваемое зарядами на плоскости S , должно быть симметрично относительно S (плоскости $z=0$). Это отражено во втором равенстве в (133). Из (132), (135) для потенциалов вторичного и суммарного поля в полупространстве V_2 получаем:

$$U_2^B = \rho I / \left(4\pi \sqrt{r^2 + (z+h)^2} \right) = \rho I / (4\pi L), \quad U_2 = \rho I / (4\pi L) + \rho I / (4\pi L) = \rho I / (2\pi L). \quad (136)$$

Выражения (135), (136) определяют потенциалы при $z < 0$ и $z > 0$ соответственно.

Согласно (136), вторичное поле в V_2 совпадает с полем фиктивного точечного электрода (заряда e_2), расположенного в той же точке A , что и действительный электрод (рис. 44, а). Потенциал U_2 суммарного поля в полупространстве V_2 равен удвоенному потенциалу U^{II} . Соответственно суммарное поле \vec{E}_2 в каждой точке верхнего полупространства в два раза больше по абсолютной величине по сравнению с полем \vec{E}^{II} . На рис. 44, б

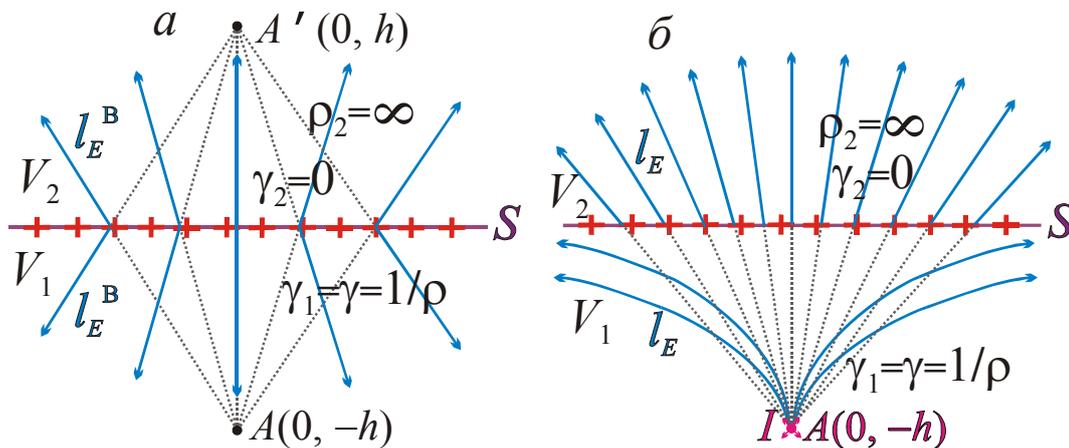


Рис. 44.

Векторные линии l_E^B вторичного (а) и векторные линии l_E суммарного (б) электрического поля

сделана попытка "отразить" это путём увеличения "густоты" векторных линий l_E в полупространстве V_2 по сравнению с линиями l_E^B на рис. 44, а.

В практически наиболее значимом случае электрод A расположен на поверхности проводящего полупространства. Если $h=0$, то есть точечный электрод расположен на границе S , то, согласно (135), (136), для потенциалов U^B и U во всем пространстве справедливы выражения (136) для U_2^B и U_2 , в которых следует положить $L=(r^2+z^2)^{1/2}$:

$$\text{при } h=0 \quad U_{1,2} = \frac{\rho \cdot I}{2\pi \cdot \sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (136,a)$$

Следовательно, потенциал U поля точечного электрода с заданной эмиссией I , расположенного на плоской границе однородного проводящего и непроводящего полупространств, всюду равен удвоенному потенциалу поля такого же электрода, находящегося в безграничной однородной проводящей среде с удельной электропроводностью проводящего полупространства:

$U_{1,2}=2 \cdot U^{\text{II}}$. Фактически это обусловлено тем, что для обеспечения заданного и равного I тока эмиссии, "стекающего" не в "4-х -пийное" пространство, а в "2-х -пийное" проводящее полупространство необходимо вдвое увеличить заряд $e_{\text{Э}}$ электрода A . То есть согласно (127) при $h=0$ заряд $e_{\text{Э}}=2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \rho \cdot I$.

Отметим, что применённый при решении этой задачи подход, при котором влияние непроводящего полупространства V_2 на поле в проводящем полупространстве V_1 мы учитываем путем отражения модели среды в V_1 и заданного там возбудителя поля в область V_2 , справедлив при любых заданных возбудителях и моделях среды в проводящем полупространстве. Действительно, согласно условию "3" в (134), в V_1 на плоской границе S (с нормалью Z) с изолятором достаточно обеспечить выполнение краевого условия $(\partial U / \partial z) = -E_z = 0|_S$. Если модель среды в полупространстве V_1 и заданные там возбудители поля отразить в непроводящее полупространство V_2 , то все возбудители поля \vec{E} будут симметричны относительно S ; суммарное поле на S будет направлено вдоль S , то есть на S компонента $E_z = -(\partial U / \partial z) = 0$. Следовательно, решая для ограниченного плоскостью S проводящего полупространства V_1 прямую задачу теории стационарного электрического поля \vec{E} (в присутствии непроводящего полупространства V_2), можем заменить её задачей для неограниченного проводящего пространства с чётной симметрией модели среды и заданных источников поля относительно плоскости S .

Занятие 13

Поле точечного токового электрода в присутствии плоской границы

Следующую задачу можно рассматривать, как обобщение задачи 19 для случая, когда удельные электропроводности γ_1, γ_2 обоих однородных полупространств – произвольны. В отличие от учебного пособия [13] мы (после "сокращения" Курса) имеем возможность при решении этой задачи рассмотреть применение только одного из возможных подходов, при котором подбор решения краевой задачи проведём, пользуясь методом зеркальных изображений.

Задача 20. Плоскость S делит пространство на две однородные области V_1, V_2 (два полупространства) с удельными электропроводностями $\gamma_1=1/\rho_1, \gamma_2=1/\rho_2$ соответственно. В области V_1 на расстоянии h от границы S в точке A расположен точечный токовый электрод Э с эмиссией $I_{\text{Э}}=I$ и зарядом $e_{\text{Э}}=\varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I$ (рис. 45). Определим потенциал U стационарного электрического поля \vec{E} в областях V_1, V_2 .

Решение. Введём такую же цилиндрическую систему координат, как в задаче 19, и такие же обозначения (79), (131): $\vec{E} = -\text{grad } U, U_{1,2} = U^{\text{II}} + U_{1,2}^{\text{B}}$. Первичное поле создаёт заряд $e_{\text{Э}}=\varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I = \varepsilon_0 \cdot I / \gamma_1$ электрода с заданной эмиссией I , окружённого средой с удельной электропроводностью γ_1 . Для потенциала U^{II}

первичного поля \vec{E}^{Π} , создаваемого зарядом точечного электрода A , справедливо выражение, аналогичное (132):

$$U^{\Pi} = \frac{\rho_1 \cdot I}{4\pi \cdot \sqrt{r^2 + (z+h)^2}}. \quad (137)$$

Для z -компоненты поля \vec{E}^{Π} из (137) получаем:

$$E_z^{\Pi} = -\frac{\partial U^{\Pi}}{\partial z} = \frac{\rho_1 \cdot I \cdot (z+h)}{4\pi \cdot (r^2 + (z+h)^2)^{3/2}}.$$

В частности, на границе S , в плоскости $z=0$

$$E_z^{\Pi} \Big|_{z=0} = \frac{\rho_1 \cdot I \cdot h}{4\pi \cdot (r^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (137')$$

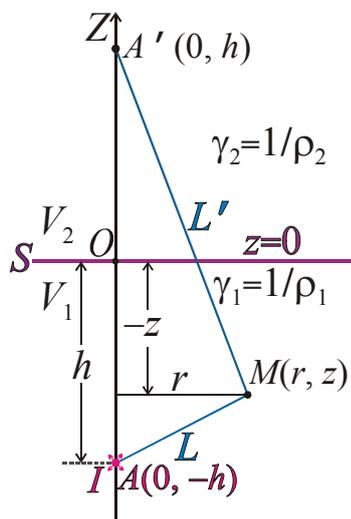


Рис. 45.

Точечный токовый электрод A в присутствии плоской границы

Вторичное поле \vec{E}^B создают поверхностные заряды, индуцированные на границе S . В связи с тем, что эти заряды симметричны относительно оси Z и плоскости $z=0$ для потенциала U^B поля \vec{E}^B справедливы условия (133):

$$U^B = U^B(r, z), \quad U_2^B(r, z) = U_1^B(r, -z),$$

То есть потенциал U^B – чётная функция координаты z и не зависит от координаты φ .

Так как значения γ_1 и γ_2 – произвольны, то, в отличие от задачи 19, на плоскости S не может быть задано краевое условия вида “3” в (134). Поставим краевую задачу для всего пространства (V_1 и V_2). Очевидно, что задача должна содержать дифференциальные уравнения для U , краевые условия в бесконечности, условие в особой точке A и условия сопряжения (граничные условия) на плоскости S :

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \text{в } V_1 \quad \nabla^2 U_1 = 0 \text{ при } L \neq 0, \quad \text{в } V_2 \quad \nabla^2 U_2 = 0, \\ 2) \quad \text{при } L \rightarrow 0 \quad U_1 \rightarrow \infty \text{ как } U^{\Pi}, \\ 3) \quad \text{при } L \rightarrow \infty \quad U_{1,2} \rightarrow 0 \text{ как } 1/L, \\ 4) \quad \text{при } z = 0: \quad a) \quad U_1 = U_2, \\ \quad \quad \quad \quad \quad b) \quad \gamma_1 (\partial U_1 / \partial z) = \gamma_2 (\partial U_2 / \partial z). \end{array} \right\} \quad (138)$$

В (138) учтено, что среда в областях V_1, V_2 порознь однородна по удельной электропроводности, особая точка A расположена в полупространстве V_1 , а область V_2 не содержит особых точек. Условия “2”, “3” в краевой задаче (138) аналогичны требованиям “2”, “4” в (134). Условия сопряжения “4,а”, “4,б” следуют из (85), (89). Эти условия обеспечивают на границе S непрерывность потенциала U и нормальной к S компоненты j_z вектора плотности тока \vec{j} .

Как и в задаче 19, попытаемся найти выражения для U_1^B и U_2^B в виде потенциалов полей зарядов фиктивных точечных электродов в безграничной

однородной среде с удельной электропроводностью $\gamma_1=1/\rho_1$ той среды, в которой находится "действительный" электрод A . Допустим, что (как и в задаче 19) вторичное поле \vec{E}_2^B в области V_2 можно заменить полем фиктивного электрода (его заряда), расположенного в точке A , а поле \vec{E}_1^B в полупространстве V_1 – полем фиктивного электрода, находящегося в точке A' , являющейся отражением точки A в плоскости S . Если учесть второе условие в (133) (U^B – чётная функция аргумента z), то ясно, что заряды этих фиктивных электродов должны быть одинаковы. Предположим, что эти заряды пропорциональны заряду $e_{\mathcal{E}}=\varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I=\varepsilon_0 \cdot I/\gamma_1$ электрода A . Обозначая коэффициент пропорциональности α , подобно (135), (136), будем искать решение краевой задачи (138) в следующем виде:

$$U_1 = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{\alpha}{L'} \right), \quad U_2 = \frac{I}{4\pi\gamma_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{\alpha}{L} \right), \quad (139)$$

где $L=(r^2+(z+h)^2)^{1/2}$ и $L'=(r^2+(z-h)^2)^{1/2}$ – расстояния от точки наблюдения соответственно до точек A и A' (см. [рис. 45](#)). Вторые слагаемые в правых частях выражений (139) соответствуют потенциалам U_1^B, U_2^B .

Легко убедиться в том, что выражения (139) удовлетворяют всем условиям задачи (138), кроме условия "4, σ ", при любом значении множителя α . Подставляя выражения (139) для U_1, U_2 в равенство "4, σ " в (138), дифференцируя функции $1/L$ и $1/L'$ по z и ([после дифференцирования](#)) полагая $z=0$, получаем уравнение

$$\gamma_1 \cdot (1-\alpha) = \gamma_2 \cdot (1+\alpha).$$

Задание. Получить самостоятельно из равенства "4, σ " в (138) и выражений (139) это уравнение и его решение (140).

Решение этого уравнения для искомого множителя α :

$$\alpha = \gamma_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2) / (\gamma_1 + \gamma_2) = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 + \rho_2). \quad (140)$$

Следовательно, если величина α равна коэффициенту контрастности γ_{12} границы S (см. (88)), то выражения (139) для U_1, U_2 удовлетворяют всем требованиям краевой задачи (138) и определяют искомое решение задачи для потенциала U поля \vec{E} при $z<0, z>0$ соответственно.

Определим ещё поверхностную плотность σ зарядов, индуцированных на границе S , и заряд e_S на этой границе. В соответствии с (86) для модели, показанной на [рис. 45](#),

$$\sigma = \varepsilon_0 \cdot \left(E_z^{(2)} - E_z^{(1)} \right) \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{\partial U_1^B}{\partial z} - \frac{\partial U_2^B}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (141)$$

так как потенциал U^{Π} и его производная $\partial U^{\Pi}/\partial z$ непрерывны на границе S . Согласно (139) - (141)

$$\sigma = \frac{\gamma_{12} \cdot \varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[r^2 + (z-h)^2 \right]^{-1/2} - \frac{\partial}{\partial z} \left[r^2 + (z+h)^2 \right]^{-1/2} \right\} \Big|_{z=0}.$$

Выполняя дифференцирование и полагая $z=0$, получаем

$$\sigma = (\varepsilon_0 \cdot \rho_1 \cdot I) \cdot \frac{\gamma_{12}}{2\pi} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = e_{\mathcal{E}} \cdot \frac{\gamma_{12}}{2\pi} \cdot \frac{h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_z^{\Pi} \Big|_{z=0}, \quad (142)$$

где $e_{\mathcal{E}}$ – заряд расположенного в среде с удельным электрическим сопротивлением ρ_1 электрода A с эмиссией I (см. [рис. 45](#)), а компоненту $E_z^{\Pi} \Big|_{z=0}$ определяет выражение (137').

Согласно (88), плотность зарядов σ на границе S должны определять коэффициент контрастности γ_{12} и средние значения нормальной к S компоненты *суммарного* поля \vec{E} . Но, в соответствии с (142), величину σ определяют коэффициент γ_{12} и нормальная к S z – компонента *первичного* поля \vec{E}^{Π} . Это связано с тем, что для такой "уникальной" модели среды, как на [рис. 45](#), в рассматриваемой здесь задаче (в виде исключения) создаваемое поверхностным зарядом на *единственной* плоской границе S вторичное поле \vec{E}^B , создаваемое "лежащими" на S индуцированными поверхностными зарядами с поверхностной плотностью σ , направлено по касательной к этой границе, то есть нормальная к S компонента вторичного поля $E_z^B = 0$ на S . Поэтому нормальную к границе S компоненту E_z имеет только поле \vec{E}^{Π} .

Понятно, что заряд e_S на плоскости S ($z=0$) определяет поверхностный интеграл:

$$e_S = \int_S \sigma dS.$$

Для определения заряда e_S применим тот же подход, что при решении задачи 9. Множеством координатных линий l_r (лучей, исходящих из точки O) и координатных линий l_{φ} (окружностей с центром в точке O) разобьём плоскость $z=0$ на бесчисленное множество элементарных координатных площадок $dS = dl_r \cdot dl_{\varphi} = dr \cdot r \cdot d\varphi = r \cdot dr \cdot d\varphi$, где r – коэффициент Ламэ для цилиндрической координаты φ . При интегрировании пределы изменения координат: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Следовательно, согласно (142)

$$e_S = e_{\mathcal{E}} \cdot \frac{\gamma_{12} \cdot h}{2\pi} \cdot \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = e_{\mathcal{E}} \cdot \gamma_{12} \cdot h \cdot \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Так как $\frac{dr^2}{dr} = 2 \cdot r$ произведение $2 \cdot r \cdot dr = dr^2 = d(r^2 + \text{const}) = d(r^2 + h^2)$. Поэтому

$$e_S = \frac{1}{2} \cdot e_{\mathcal{E}} \cdot \gamma_{12} \cdot h \cdot \int_0^{\infty} \frac{d(r^2 + h^2)}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = -e_{\mathcal{E}} \cdot \gamma_{12} \cdot h \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Big|_0^{\infty} = -e_{\mathcal{E}} \cdot \gamma_{12} \cdot h \cdot \frac{-1}{h}.$$

Итак, (суммарный) заряд, индуцированный на границе S ,

$$e_S = \gamma_{12} \cdot e_{\mathcal{E}} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot e_{\mathcal{E}} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \cdot e_{\mathcal{E}}. \quad (143)$$

Согласно (140), (142), (143) при $\rho_2 > \rho_1$ знаки зарядов e_S и $e_{\mathcal{D}}$ – (как и в задаче 19) одинаковы, а при $\rho_2 < \rho_1$ – противоположны.

Задание. Получить самостоятельно из (141) выражения (142) для плотности σ и (143) для e_S .

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Будем полагать, что среда немагнитна: магнитная восприимчивость $\chi=0$, магнитная проницаемость $\mu=1+\chi=1$, абсолютная магнитная проницаемость $\mu_a=\mu\cdot\mu_0=\mu_0$, где магнитная постоянная $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м, и вектор постоянной намагниченности $\vec{J}^0=0$. В этом случае поле $\vec{B}=\mu_0\cdot\vec{H}$ и единственными возбудителями (чисто-вихревого) стационарного магнитного поля являются постоянные электрические токи.

Занятие 14

Магнитное поле линейных токов

Вспомним закон Био - Савара - Лапласа. В случае, если магнитное поле (поле вектора магнитной индукции) \vec{B} в немагнитной среде создаёт постоянный линейный ток I по линии l , то согласно этому закону поле

$$\vec{B}(a) = \int_l d\vec{B}(a), \quad \text{где} \quad d\vec{B}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}, \quad (144)$$

а $[d\vec{l} \vec{L}_{qa}]$ – векторное произведение направленного (как ток I) элементарного отрезка $d\vec{l}$ (с центром в точке q) тока I и радиус – вектора \vec{L}_{qa} . Абсолютная

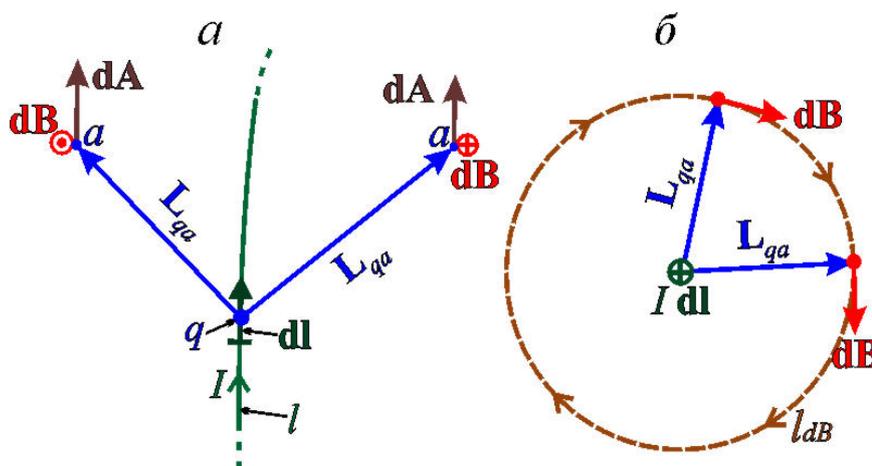


Рис. 46.

К закону Био – Савара – Лапласа для линейного электрического тока

величина этого радиус - вектора $|\vec{L}_{qa}|=L_{qa}$ равна расстоянию между точками q и a . (рис. 46, а). На этом рисунке направленный элементарный отрезок $d\vec{l}$ тока I и точки наблюдения a лежат в плоскости рисунка, а на рис. 46, б векторы \vec{L}_{qa} лежат в плоскости рисунка, а вектор $d\vec{l}$ (и ток I) ортогонален этой плоскости и направлен "от нас".

Согласно (144) абсолютная величина вектора $d\vec{B}(a)$

$$dB(a) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi \cdot L_{qa}^2} \cdot \sin(\mathbf{d}\vec{l}, \vec{L}_{qa}). \quad (144')$$

Магнитное поле прямого отрезка линейного тока

Задача 21. Возбудитель магнитного поля \vec{B} в немагнитной среде – постоянный линейный ток I вдоль прямого отрезка l_{12} . Определим магнитное поле \vec{B} такого тока.

Понятно, что такой возбудитель магнитного поля может быть лишь одним из участков цепи постоянного электрического тока, так как (полная) цепь постоянного тока не может быть "разомкнутой". Но законом Био - Савара - Лапласа (в отличие от закона полного тока, см. ниже) можно воспользоваться и для расчёта магнитного поля, создаваемого *отдельными участками* полных (всегда замкнутых) цепей постоянного электрического тока.

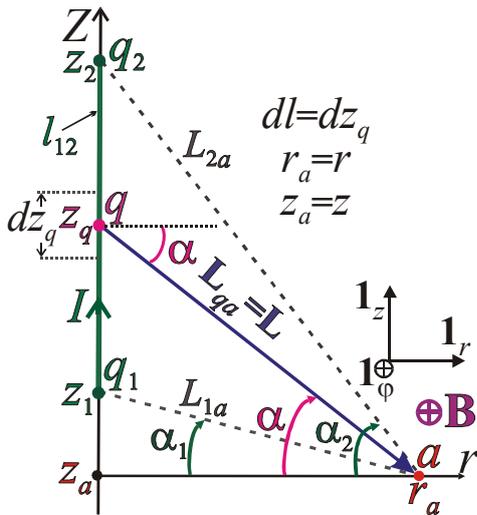


Рис. 47.

К магнитному полю, создаваемому током I вдоль отрезка прямой

Решение. Введём цилиндрическую систему координат r, φ, z с такой осью Z , чтобы на ней лежал (ограниченный координатами z_1, z_2) отрезок тока I и направим ось Z по току (рис. 47). Вследствие осевой симметрии задачи выбор начала отсчёта координаты φ произволен. Воспользуемся выражениями (144), (144'). При обозначениях на рис. 47 в (144') длина элементарного отрезка $dl=dz_q$, а $\sin(\mathbf{d}\vec{l}, \vec{L}_{qa})=\sin(\pi/2+\alpha)=\cos \alpha$. При сравнении рис. 46 и рис. 47 видим, что в выбранной системе координат магнитное поле элемента dz_q тока I определяет

выражение:

$$d\vec{B} = \vec{1}_\varphi \cdot dB_\varphi, \quad dB_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dz_q}{4\pi \cdot L_{qa}^2} \cdot \cos \alpha. \quad (145)$$

Следовательно, поле отрезка l_{12} тока I :

$$\vec{B} = \int_{z_1}^{z_2} d\vec{B} = \vec{1}_\varphi \cdot \int_{z_1}^{z_2} dB_\varphi = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi. \text{ Ненулевую компоненту } B_\varphi \text{ магнитного поля}$$

\vec{B} определяет интеграл: $B_\varphi = \int_{z_1}^{z_2} dB_\varphi$ или $B_\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB_\varphi$. При интегрировании нам удобнее будет воспользоваться последним выражением для скалярной компоненты B_φ . Но для этого надо выразить $dz_q, L_{qa}=L$ через $d\alpha, \alpha$ и не меняющуюся при интегрировании координату $r_a=r$ точки наблюдения a . Как видно на рис. 47, $\cos \alpha = r/L, L = r/\cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha = (z_q - z)/r, z_q - z = r \cdot \operatorname{tg} \alpha, z_q = r \cdot \operatorname{tg} \alpha + z$.

Так как координата $z_a=z$ точки наблюдения a не зависит от угла α производная $\frac{dz_q}{d\alpha} = r \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + 0$.

Следовательно, $dz_q = \frac{r \cdot d\alpha}{\cos^2 \alpha}$. В соответствии с (145)₂

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos \alpha}{L^2} dz_q = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos^3 \alpha}{r^2} \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha.$$

Итак, в показанной на **рис. 47** системе координат

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi, \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r} \left[\frac{z_2 - z}{\sqrt{r^2 + (z_2 - z)^2}} - \frac{z_1 - z}{\sqrt{r^2 + (z_1 - z)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (146)$$

При $\vec{B} = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi$ векторные линии l_B поля \vec{B} – окружности (см. **рис. 46, б**) с осью Z . Направление векторных линий l_B образует правовинтовую систему с направлением тока I .

Получим более простое выражение для магнитного поля линейного тока в следующем частном случае. Пусть в (146) $z_a=z=0$ и $-z_1=z_2=z_0>0$, то есть точка наблюдения a , расположена против середины отрезка l_{12} линейного тока I , координата z этой точки равна нулю. При этом условии $-\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = \sin \alpha_0 = z_0 / (r^2 + z_0^2)^{1/2}$. Тогда согласно (146)

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi, \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r} \left[\frac{z_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} + \frac{z_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} \right] = \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \frac{z_0}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \sin \alpha_0 \end{aligned} \quad (147)$$

Пусть отрезок линейного тока имеет "большую протяжённость", равную $(z_2 - z_1) = 2 \cdot z_0$, по сравнению с расстоянием r от тока I до точки наблюдения a ($z_0 \gg r$, $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$, $\sin \alpha_0 \rightarrow 1$). Тогда из (147) получаем:

$$B_\varphi \approx \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}, \quad \text{а при } z_0 \rightarrow \infty \text{ и конечном расстоянии } r: \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}. \quad (148)$$

Второе выражение в (148) определяет ненулевую компоненту магнитного поля \vec{B} неограниченного линейного тока I по оси Z , при $z_1 = -\infty$, $z_2 = \infty$. Магнитное поле такого тока медленно убывает с увеличением расстояния r от тока – как $1/r$.

При решении задачи 25 нам понадобятся два выражения – следствия из (146) для магнитного поля линейного тока I по положительной (B_+) и отрицательной (B_-) полуосям Z . Для магнитных полей таких токов из (146) получаем выражения:

$$\vec{B}_+ = \vec{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad \vec{B}_- = \vec{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad (149)$$

из которых первому соответствуют координаты $z_1=0, z_2=\infty$, а второму - $z_1=-\infty, z_2=0$ (см. рис. 47).

Магнитное поле в центре "квадратной петли"

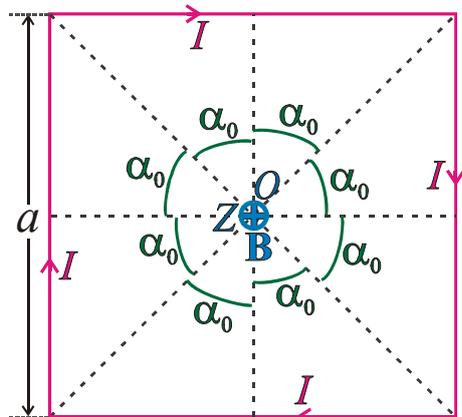


Рис. 48.

"Квадратная петля"

Задача 22. Возбудителем постоянного магнитного поля в немагнитной среде является "квадратная петля" – линейный ток I по периметру квадрата со стороной a (рис. 48). Получим выражение для вектора магнитной индукции \vec{B} и напряжённости магнитного поля \vec{H} в центре O квадратной петли в аналитическом виде, а затем сделаем количественную оценку при заданных численных значениях I и a .

Решение. Введём декартову систему координат x, y, z с началом O в центре квадрата и осью Z , ортогональной плоскости, в которой лежит "квадратная петля". Будем полагать, что ось Z образует правовинтовую систему с направлением тока I , то есть на рис. 48 ось Z направлена "от нас". Определим поля \vec{B} и \vec{H} в точке O .

Очевидно, что в точке O токи I по каждой из сторон (каждому прямому отрезку) квадратной петли создают одинаковые магнитные поля $\vec{B}^{\text{отр}}$, направленные по оси Z , то есть $\vec{B}^{\text{отр}}(O) = \vec{1}_z \cdot B_z^{\text{отр}}(O)$. В этом легко убедиться, например, "поворачивая" рис. 48 (в плоскости этой страницы) на 90° . Обратимся к выражению (147). Так как этому равенству на рис. 48 соответствуют значения $\alpha_0 = \pi/4$, $\sin \alpha_0 = \sqrt{2}/2$, $r = a/2$, то согласно (147)

$$B_z^{\text{отр}}(O) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot (a/2)} \cdot \sin \alpha_0 = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi \cdot a} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Сумма 4-х (одинаковых в точке } O \text{)}$$

магнитных полей 4-х отрезков $B_z(O) = 4 \cdot B_z^{\text{отр}}(O)$. Так как в немагнитной среде $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$, в центре O постоянного линейного тока I по периметру квадрата со стороной a магнитное поле:

$$\vec{B} = \vec{1}_z \cdot B_z(O), \quad B_z(O) = \frac{2\sqrt{2} \cdot \mu_0 \cdot I}{\pi \cdot a}, \quad \vec{H} = \vec{1}_z \cdot H_z(O), \quad H_z(O) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{I}{a}. \quad (150)$$

То есть магнитное поле в центре O петли пропорционально току I и обратно пропорционально линейному размеру a петли.

Сделаем численную оценку. Пусть $I=1$ А, $a=1$ км=1000 м. Из выражений (150) получаем:

$$B_z(O) = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \cdot \frac{1}{1000} = 8\sqrt{2} \cdot 10^{-10} \text{ Тл} \approx 1.1 \cdot 10^{-9} \text{ Тл} \approx 1 \text{ нТл},$$

$$H_z(O) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{1}{1000} \approx 9 \cdot 10^{-4} \text{ А/м} \approx 1 \text{ мА/м}.$$

Измерить такое постоянное магнитное поле при влиянии вариаций магнитного поля Земли непросто... .

К векторному потенциалу магнитного поля тока

Задача 23. На основе выражения (144) для магнитного поля $\vec{d}\mathbf{B}(a)$ элементарного отрезка $\vec{d}\mathbf{l}$ постоянного линейного тока I (см. рис. 46, а)

$$\vec{d}\mathbf{B}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{d}\mathbf{l} \vec{L}_{qa}]}{L_{qa}^3}$$

доказать, что такое поле может быть выражено через векторный потенциал $\vec{d}\mathbf{A}(a)$ следующим образом:

$$\vec{d}\mathbf{B}(a) = \text{rot } \vec{d}\mathbf{A}(a), \text{ где } \vec{d}\mathbf{A}(a) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{d}\mathbf{l}}{L_{qa}} \quad (151)$$

векторный потенциал магнитного поля $\vec{d}\mathbf{B}(a)$, а q – центр отрезка dl .

Решение. Как и в задаче 21, воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z с такой осью Z по направлению тока I (и отрезка $\vec{d}\mathbf{l}$), на которой лежит отрезок dl . Начало O координат поместим в центр O отрезка dl (рис. 49). Очевидно, что в этой системе координат получаем следующие выражения для магнитного поля $\vec{d}\mathbf{B}(a)$ (см. (145)) и векторного потенциала $\vec{d}\mathbf{A}(a)$ (см. (151)₂):

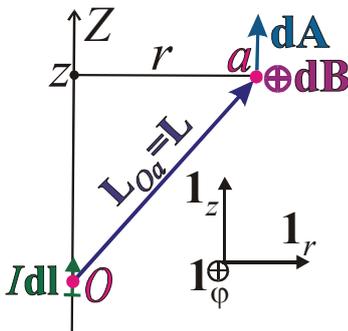


Рис. 49.

К доказательству равенства $\vec{d}\mathbf{B} = \text{rot } \vec{d}\mathbf{A}$

$$\vec{d}\mathbf{B} = \vec{1}_\varphi \cdot dB_\varphi, \quad dB_\varphi = C \cdot \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (152)$$

$$\vec{d}\mathbf{A} = \vec{1}_z \cdot dA_z, \quad dA_z = C \cdot \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}}, \quad (153)$$

где (не зависящий от координат точки наблюдения) множитель $C = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi}$.

В цилиндрической системе координат r, φ, z (в которой коэффициенты Ламэ: $h_r = h_z = 1, h_\varphi = r$) из (3,в) для ротора векторного потенциала $\vec{d}\mathbf{A}$ получаем:

$$\text{rot } \vec{d}\mathbf{A} = \vec{1}_r \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial dA_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial dA_\varphi}{\partial z} \right] + \vec{1}_\varphi \cdot \left[\frac{\partial dA_r}{\partial z} - \frac{\partial dA_z}{\partial r} \right] + \vec{1}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial (r dA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial dA_r}{\partial \varphi} \right].$$

Согласно (153) $\vec{d}\mathbf{A} = \vec{1}_z \cdot A_z(r, z)$. Поэтому

$$\text{rot } \vec{d}\mathbf{A} = \vec{1}_r \cdot 0 + \vec{1}_\varphi \cdot \left(-\frac{\partial dA_z}{\partial r} \right) + \vec{1}_z \cdot 0, \text{ то есть } \text{rot } \vec{d}\mathbf{A} = \vec{1}_\varphi \cdot \text{rot}_\varphi \vec{d}\mathbf{A}, \text{ где}$$

$$\text{rot}_\varphi \vec{d}\mathbf{A} = -\frac{\partial dA_z}{\partial r}.$$

В соответствии с выражением (153)

$$-\frac{\partial dA_z}{\partial r} = -C \cdot \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} = C \cdot \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

При сравнении правой части этого выражения с (152) видим, что $\text{rot } \vec{d\vec{A}} = d\vec{B}$.

Так как согласно (144) магнитное поле \vec{B} линейных (а также и объёмных) токов – это сумма полей $d\vec{B}$ элементарных токов, то поле

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \text{откуда, в частности, получаем: } \text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} \equiv 0. \quad (154)$$

Занятие 15

Магнитное поле объёмных токов

Из выражений (144) можно получить закон Био - Савара - Лапласа для магнитного поля \vec{B} физически реальных объёмных токов, "распределение" которых в объёмных проводниках (в областях пространства V) характеризует вектор плотности \vec{j} электрического тока. В этом случае

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int_V \frac{[\vec{j}(q) \vec{L}_{qa}]}{L_{qa}^3} dV. \quad (155)$$

Пользуясь выражением (155) (и компьютером), не очень сложно численно определить магнитное поле заданных объёмных токов. Но этим выражением трудно воспользоваться для получения более-менее простых аналитических выражений даже в том случае, когда магнитное поле создают имеющие "простую геометрию" (симметричные) токи. В случае, когда эти токи (поле вектора \vec{j}) имеют чётную цилиндрическую симметрию, можно получить простые выражения для магнитного поля тока пользуясь *законом полного тока*:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} d\vec{l}) = \mu_0 \cdot I_S, \quad I_S = \int_S (\vec{j} d\vec{S}), \quad (156)$$

согласно которому циркуляция вектора \vec{B} по линии $l[S]$, ограничивающей поверхность S , пропорциональна (с коэффициентом пропорциональности μ_0) потоку I_S вектора \vec{j} через поверхность S . С точностью до знака поток I_S (просто) равен (суммарному) электрическому току через поверхность S .

Но необходимо учитывать, что (в отличие от закона Био - Савара - Лапласа) закон *полного* тока (156) применим только к *полным* цепям постоянного тока – замкнутым или продолжающимся до бесконечности.

Дифференциальная форма выражения (156) – уравнение:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}. \quad (157)$$

Можно доказать ([3]), что если два векторных поля "связаны" подобным (157) равенством и одно из этих полей во всём пространстве имеет (зеркальную, цилиндрическую, либо сферическую) симметрию, то другое поле также симметрично, но с "заменой" чётной симметрии на нечётную, либо, наоборот - нечётной симметрии на чётную (см. [рис. 8](#), [рис. 9](#)).

Докажем это для случая, когда электрический ток (поле вектора \vec{j}) имеет чётную цилиндрическую симметрию. Воспользуемся цилиндрической системой

координат r, φ, z с осью Z по оси симметрии поля \vec{j} . При такой симметрии согласно (5)

$$\vec{j} = \vec{1}_r \cdot j_r(r, z) + \vec{1}_z \cdot j_z(r, z).$$

Но тогда в соответствии с (157) аналогичное выражение справедливо для поля $\text{rot } \vec{B}$:

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{1}_r \cdot \text{rot}_r \vec{B}(r, z) + \vec{1}_z \cdot \text{rot}_z \vec{B}(r, z),$$

то есть компонента $\text{rot}_\varphi \vec{B} = 0$, а две другие компоненты поля $\text{rot } \vec{B}$ не могут зависеть от координаты φ . Тогда из (3,в) для вектора $\text{rot } \vec{B}$ получаем:

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{1}_r \cdot \left[0 - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right] + \vec{1}_\varphi \cdot 0 + \vec{1}_z \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - 0 \right].$$

Следовательно, при $\vec{j} = \vec{1}_r \cdot j_r(r, z) + \vec{1}_z \cdot j_z(r, z)$ производная $\text{rot } \vec{B}$ (чисто-вихревого) поля \vec{B} зависит только от (единственной ненулевой) компоненты $B_\varphi(r, z)$. Это означает, что для (чисто-вихревого) магнитного поля \vec{B} , которое создаёт постоянный электрический ток,

$$\text{при } \vec{j} = \vec{1}_r \cdot j_r(r, z) + \vec{1}_z \cdot j_z(r, z), \text{ поле } \vec{B} = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi(r, z). \quad (158)$$

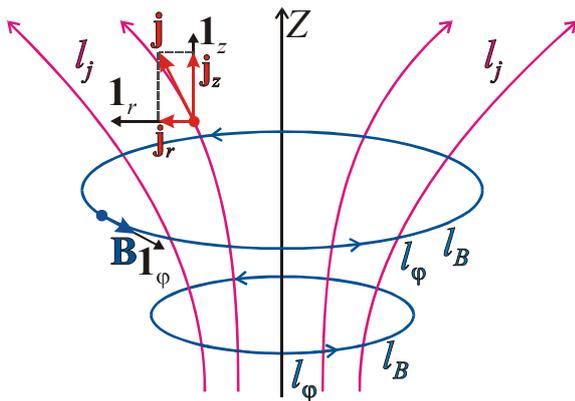


Рис. 50.

Векторные линии l_B магнитного поля \vec{B} , создаваемого электрическим током с чётной цилиндрической симметрией

То есть в соответствии с (5), (7) при чётной цилиндрической симметрии поля \vec{j} относительно оси Z создаваемое током магнитное поле имеет нечётную цилиндрическую симметрию относительно этой оси. Равенство (158)₂ означает, что силовые линии l_B поля \vec{B} – окружности с осью Z (рис. 50).

Из (157), в частности, следует, что рассмотренному в задаче 18 электрическому полю $\mathbf{E} = \mathbf{1}_R \cdot E_R(R)$ (во всём пространстве) соответствует поле $\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{E} = \mathbf{1}_R \cdot j_R(R)$, то есть поле \mathbf{j} с (чётной) сферической симметрией. В связи со сказанным выше такой ток должен

создавать магнитное поле с нечётной сферической симметрией. Но определению понятия "нечётная сферическая симметрия" формально удовлетворяет только векторное поле всюду равное нулю. То есть *сферически симметричный* (во всём пространстве) ток с вектором плотности тока $\mathbf{j} = \mathbf{1}_R \cdot j_R(R)$ не создаёт магнитного поля.

Ниже рассмотрим примеры для случая, когда в цилиндрических координатах r, φ, z (имеющий бесконечную протяжённость) ток (поле вектора \vec{j}) и его магнитное поле \vec{B} удовлетворяют условиям (158). Для этого случая из закона полного тока получим совсем простое выражение для определения

ненулевой компоненты B_φ магнитного поля \vec{B} . Если в (156) в качестве линии $l[S]$ взять окружность с осью Z (координатную линию l_φ), то согласно (158)

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \, d\vec{l}) = \oint_{l_\varphi} B_\varphi (\vec{1}_\varphi \, d\vec{l}) = B_\varphi \cdot \oint_{l_\varphi} dl_\varphi = B_\varphi \cdot l_\varphi = 2\pi \cdot r \cdot B_\varphi.$$

Следовательно, из (156) при условии (158) для ненулевой компоненты B_φ магнитного поля \vec{B} получаем:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 \cdot I_S}{2\pi \cdot r}, \quad I_S = \int_S (\vec{j} \, d\vec{S}), \quad (159)$$

где I_S – (с точностью до знака) электрический ток "протекающий внутри" окружности с радиусом r и осью Z .

Магнитное поле тока по неограниченному (по "высоте") круговому цилиндру

Задача 24. Неограниченная по "протяжённости" граница S кругового цилиндра с радиусом $r_\text{ц}$ делит (немагнитное) пространство на две области: проводящий круговой цилиндр V_i с радиусом $r_\text{ц}$ и изолятор в остальной части пространства V_e . В области V_i задан однородный (с однородным полем \vec{j}) постоянный электрический ток I по направлению оси цилиндра. (рис. 51, а, б). Определим создаваемое этим током магнитное поле \vec{B} , \vec{H} в областях пространства V_i, V_e . Такие условия могут, например, (приблизённо) соответствовать случаю, когда возбудителем магнитного поля служит постоянный объёмный ток I по "прямому" и "очень протяжённому" участку цепи тока I в виде "провода кругового сечения" при условии, что влиянием остальных частей (всегда замкнутой) цепи

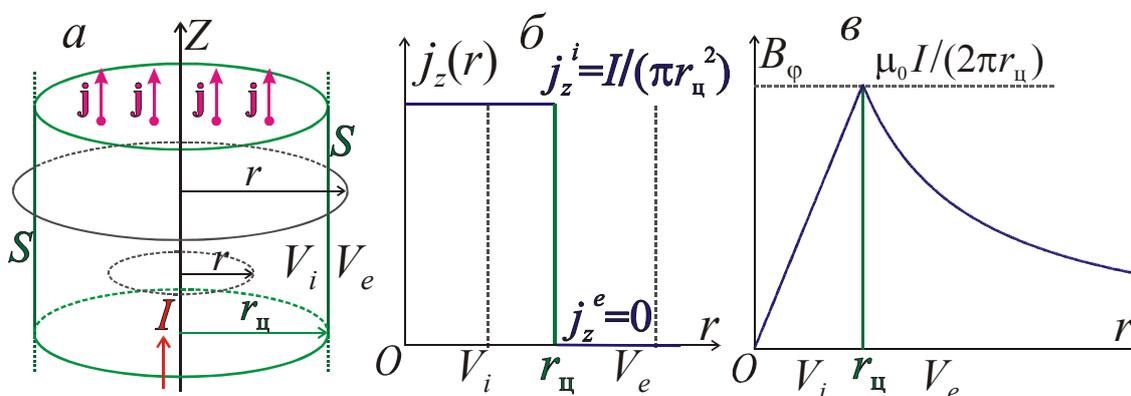


Рис. 51.

К магнитному полю \vec{B} создаваемому однородным электрическим током I по (неограниченному по "протяжённости") круговому цилиндру постоянного тока I на магнитное поле в точке наблюдения можно пренебречь.

Решение. В рассматриваемом здесь случае в цилиндрической системе координат с осью Z по оси симметрии тока в соответствии с (158) и при учёте того, что в этом, простейшем из всех возможных подобных случаев, примере поле вектора плотности тока $\vec{j} = \vec{1}_z \cdot j_z(r)$, а магнитное поле такого тока в областях V_i, V_e

$$\vec{B}^{i,e} = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi^{i,e}(r). \quad (160)$$

При показанных на рисунке направлениях тока и оси Z компонента $B_\varphi > 0$.

Представим себе две окружности с осью Z и с радиусами $r > r_{\text{ц}}$, $r < r_{\text{ц}}$ (см. **рис. 51, а**). Если $r > r_{\text{ц}}$, то через ограниченную этой окружностью l поверхность S (например круг $S_{\text{кр}}$ с радиусом r) "проходит" ток $I_S^e = I$, а если $r < r_{\text{ц}}$, то – только часть этого тока. При однородном поле $\vec{j} = \vec{1}_z j_z$ в области V_i (см. **рис. 51, б**) этот ток $I_S^i = j_z \cdot S_{\text{кр}} = \frac{I}{\pi \cdot r_{\text{ц}}^2} \cdot \pi \cdot r^2 = I \frac{r^2}{r_{\text{ц}}^2}$. Подставляя выражения для I_S^e , I_S^i в равенство (159) для B_ϕ , получаем:

$$B_\phi^e = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}, \quad B_\phi^i = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_{\text{ц}}^2} \cdot r. \quad (161)$$

При сравнении (161)₁ с выражением (148)₂ для магнитного поля неограниченного по протяжённости линейного тока I по оси Z видим, что эти поля одинаковы. То есть в области V_e магнитное поле показанного на **рис. 51, а, б** объёмного тока идентично полю линейного тока I по оси Z . Зависимость $B_\phi(r)$ приведена на **рис. 51, в**.

Магнитное поле тока в модели "коаксиальный кабель"

Задача 24. Магнитное поле постоянного электрического тока в модели "коаксиальный кабель" (патент 1880-го года Хевисайда, автор которого известен некоторым геофизикам по сигма-функции Хевисайда "единичная ступень"). Рассмотрим случай, в котором три (бесконечные по "протяжённости") коаксиальные границы круговых цилиндров разделяют (немагнитное) пространство на четыре области: V_1, V_2, V_3, V_4 (**рис. 52, а, б**). Это – цилиндр V_1 , цилиндрические слои

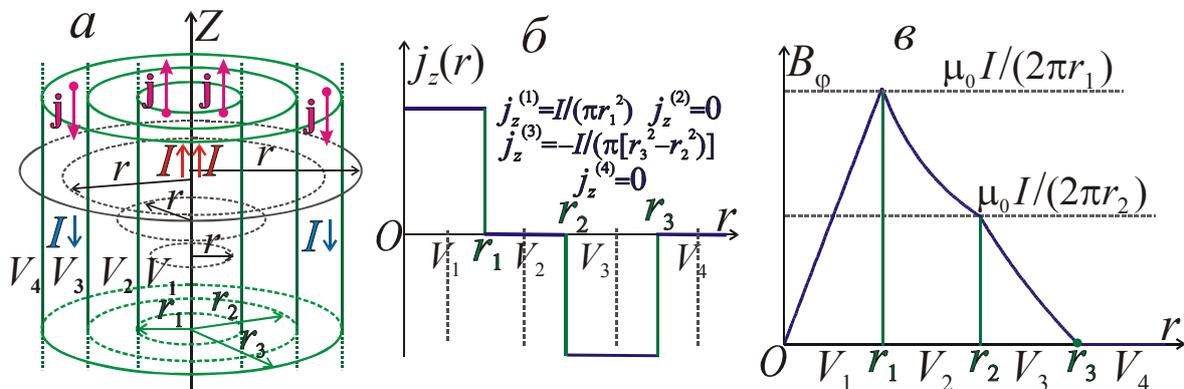


Рис. 52.

К магнитному полю \vec{B} создаваемому электрическим током I в коаксиальном кабеле

V_2, V_3 и (неограниченная "снаружи") область V_4 . Область V_4 – это всё пространство без областей V_1, V_2, V_3 . Области V_2, V_4 – изоляторы, в которых плотность тока $\vec{j}^{(2,4)} = 0$. В областях V_1, V_3 есть (порознь) однородные по полю вектора плотности тока \vec{j} и имеющие противоположные направления, но одинаковые по величине, токи I . Определим магнитное поле в областях $V_{1,2,3,4}$.

Решение. В показанной на **рис. 52, а** цилиндрической системе координат r, ϕ, z с осью Z по оси симметрии модели и направлением оси Z по направлению тока I в цилиндре V_1 поле, $\vec{j} = \vec{1}_z j_z(r)$ удовлетворяет условию (158)₁ и в

соответствии с (158)₂ магнитное поле $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{1}}_{\phi} \cdot B_{\phi}(r)$. Следовательно, для определения поля $\vec{\mathbf{B}}$ мы можем воспользоваться выражением (159).

В областях V_2, V_4 компонента $j_z^{(2,4)} = 0$. Поля $\vec{\mathbf{j}}^{(1,3)}$ (порознь) однородны. Очевидно, что в области V_1 (в круговом цилиндре V_1 с радиусом r_1) компонента $j_z^{(1)} = \frac{I}{\pi \cdot r_1^2}$, а в области V_3 (в цилиндрическом слое V_3 , ограниченном цилиндрическими поверхностями с радиусами r_2, r_3) компонента $j_z^{(3)} = -\frac{I}{\pi \cdot (r_3^2 - r_2^2)} = \frac{-I}{\pi \cdot (r_3^2 - r_2^2)}$ (см. рис. 52, б). Компонента $j_z^{(3)}$ отрицательна так как вектор $\vec{\mathbf{j}}^{(3)}$ имеет направление противоположное направлению оси Z .

Применим формулу (159) для определения ненулевой компоненты B_{ϕ} магнитного поля $\vec{\mathbf{B}}$ (модели) коаксиального кабеля в областях пространства V_1, V_2, V_3, V_4 . На рис. 52, а показаны четыре окружности с радиусами r и с осью Z , расположенные в этих областях. При $r < r_1$ и $r_1 < r < r_2$, то есть в областях V_1, V_2 для компоненты B_{ϕ} получаем выражения, аналогичные равенствам (161) в задаче 23 для компонент B_{ϕ}^i, B_{ϕ}^e :

$$B_{\phi}^{(1)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r_1^2} \cdot r, \quad B_{\phi}^{(2)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}. \quad (162)$$

Для области V_3 , при $r_2 < r < r_3$, поток $I_S^{(3)}$ вектора $\vec{\mathbf{j}}$ через круг с радиусом r и нормалью по направлению оси Z это сумма положительного потока I_S^+ равного току I в цилиндре V_1 и отрицательного потока I_S^- через "плоское кольцо", ограниченное окружностями с радиусами r_2 и r (см. рис. 52, б). То есть этот поток

$$I_S^{(3)} = I_S^+ + I_S^- = I + j_z^{(3)} \cdot \pi \cdot (r^2 - r_2^2) = I - \frac{I}{\pi \cdot (r_3^2 - r_2^2)} \cdot \pi \cdot (r^2 - r_2^2) = I \cdot \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right).$$

Очевидно, что во внешней области V_4 для потока $I_S^{(4)}$ вектора $\vec{\mathbf{j}}$ через круг с радиусом $r > r_3$ получаем:

$$I_S^{(4)} = I_S^+ + I_S^- = I - I = 0.$$

При подстановке полученных для потоков $I_S^{(3)}, I_S^{(4)}$ выражений в правую часть равенства (159)₁ для областей V_3, V_4 получаем:

$$B_{\phi}^{(3)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2} \right), \quad B_{\phi}^{(4)} = 0. \quad (163)$$

Соответствующая выражениям (162), (163) зависимость $B_{\phi}(r)$ приведена на рис. 52, в. На основе полученного решения (по крайней мере "в рамках" показанной на рис. 52, а модели) можем сделать следующий вывод. Электрический ток в коаксиальном кабеле, в отличие от других (не осесимметричных) двухпроводных линий тока (два взаимно-параллельных провода с токами в противоположных направлениях или "витая пара"), не создаёт магнитного поля в окружающем коаксиальный кабель пространстве.

Занятие 16

Магнитное поле тока эмиссии точечного электрода, расположенного на поверхности однородного проводящего полупространства

Задача 25. При решении задачи (19) в цилиндрической системе координат r, φ, z с направленной по нормали к границе однородного проводящего и непроводящего полупространств и проходящей через электрод A осью Z мы получили выражение (136,а) для потенциала U поля \vec{E} в случае, когда токовый точечный электрод A расположен на этой границе в начале координат O :

$$U = \frac{\rho \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{L} = \frac{I}{2\pi \cdot \gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (164)$$

где $I=I_A$ – ток эмиссии (эмиссия) электрода A .

В показанной на **рис. 53** цилиндрической системе координат в нижнем проводящем полупространстве, при $z>0$ из выражения (164) и закона Ома в дифференциальной форме: $\vec{j}=\gamma \cdot \vec{E}$ получаем:

$$\text{при } z>0 \quad j_z = \gamma \cdot E_z = -\gamma \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (165)$$

В верхнем полупространстве поле вектора плотности тока $\vec{j}=0$, а в нижнем

полупространстве поле $\vec{j}=\gamma \cdot \vec{E}$ имеет сферическую симметрию. Для всего пространства такое поле \vec{j} имеет чётную цилиндрическую симметрию относительно оси Z (см. **рис. 53**), что не противоречит условию (158)₁:

$$\vec{j} = \vec{1}_r \cdot j_r(r, z) + \vec{1}_z \cdot j_z(r, z),$$
 выполнение которого необходимо для того, чтобы (для полного тока) можно было воспользоваться формулой (159) для определения ненулевой компоненты $B_\varphi(r, z)$ магнитного поля \vec{B}

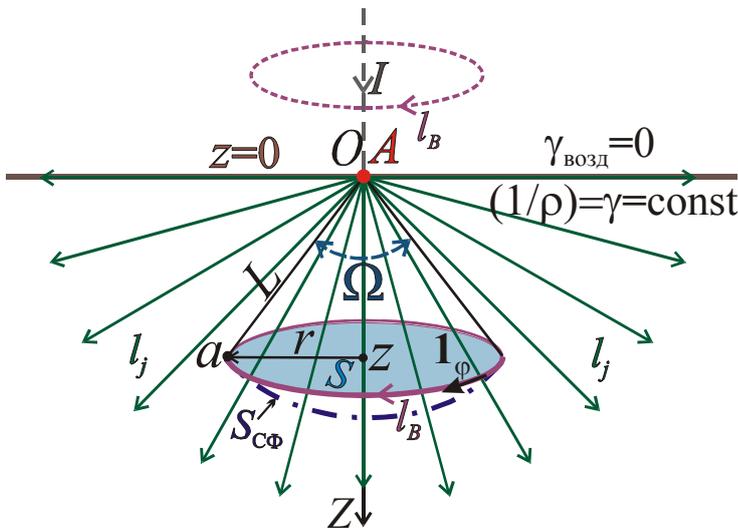


Рис. 53.

К магнитному полю тока эмиссии точечного электрода \mathcal{E} , расположенного на поверхности однородного проводящего полупространства

такого тока.

Но применить закон полного тока и следствие из него – формулу (159) можно только к полным (замкнутым, либо "продолжающимся до бесконечности") цепям тока. Поэтому "добавим" к току эмиссии электрода A ("питающий" электрод A) линейный ток I , а для того, чтобы сохранить осевую симметрию, будем полагать, что это – ток I по отрицательной полуоси Z (см. **рис. 53**). Таким образом, получаем цепь постоянного тока, "продолжающуюся

до бесконечности", к которой применим закон полного тока. Определим поле $\vec{B}^\Sigma = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi^\Sigma$, создаваемое этим ("суммарным") током в точке $a(r, z)$. Затем сможем найти поле $\vec{B} = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi$, создаваемое объёмным током эмиссии электрода, как разность $\vec{B}^\Sigma - \vec{B}^\Lambda$, где $\vec{B}^\Lambda = \vec{1}_\varphi \cdot B_\varphi^\Lambda$ – магнитное поле линейного тока I по отрицательной полуоси Z .

Согласно (159) $\vec{B}^\Sigma = \vec{1}_\varphi \cdot \mu_0 \cdot I_S / (2\pi \cdot r)$, где I_S – поток вектора \vec{j} через поверхность S , ограниченную векторной линией l_B поля \vec{B}^Σ – окружностью с радиусом r и с осью Z . Очевидно, что в верхнем полупространстве (и на его границе), при $z \leq 0$, поток $I_S = I$, то есть

$$\text{при } z \leq 0 \quad \vec{B}^\Sigma = \vec{1}_\varphi \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}. \quad (166)$$

На рис. 53 видим, что в нижнем полупространстве, при $z > 0$, поток I_S вектора \vec{j} через круг S , ограниченный окружностью с радиусом r и с осью Z (векторной линией l_B), проведенной через точку a , охватывает не весь (равный I) ток эмиссии электрода A , а только его часть I_S . Это ток в конусе, ограниченном проходящей через точку a круговой конической поверхностью $r/z = \text{const} \geq 0$ с вершиной в точке O , образующей L и направляющей l_B .

Для определения тока I_S можем воспользоваться (как это сделано в главе пятой электронной версии Учебника [6]) понятием «телесный угол» Ω . В случае, показанном на рис. 53, телесный угол при вершине O конической поверхности с направляющей l_B $\Omega = S_{C\Phi} / L^2$, где $S_{C\Phi}$ – площадь ограниченного окружностью l_B участка сферической поверхности с центром в точке O и с радиусом L . На рис. 53 проекция "края" поверхности $S_{C\Phi}$ на плоскость рисунка показана штрихпунктирной линией.

Здесь для определения (равного потоку вектора \vec{j}) тока I_S через ограниченную окружностью l_B поверхность круга S (а также и поверхность $S_{C\Phi}$, см. рис. 53) применим другой подход, опробованный нами при решении задач 9, 20. В соответствии с (159)₂, (165) в случае, показанном на рис. 54,

$$I_S = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = \int_S j_z dS = \frac{I z}{2\pi} \cdot \int_S \frac{dS}{(r_q^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (167)$$

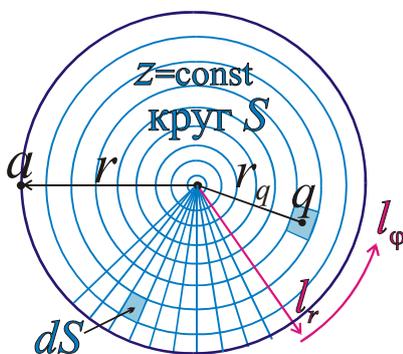


Рис. 54.

К определению потока I_S вектора \vec{j} через круг S

"Разобьём" круг S на множество элементарных координатных площадок dS с центрами в точках q . Площади $dS = dl_{r_q} \cdot dl_\varphi = dr_q \cdot r_q \cdot d\varphi = r_q \cdot dr_q \cdot d\varphi$ (см. рис. 54). При интегрировании по кругу S пределы изменения координат: $0 \leq r_q \leq r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Так как плоскости S круга ортогональна компонента \vec{j}_z вектора \vec{j} то поток dI_S вектора \vec{j} через координатную площадку dS определяет выражение:

$$dI_S = (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = j \cdot \cos(\vec{j}, \vec{1}_z) \cdot dS = j_z \cdot dS = j_z \cdot r_q \cdot dr_q \cdot d\varphi.$$

Следовательно, в соответствии с (165)

$$dI_S(r_q, z) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \cdot dS = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{z}{(r_q^2 + z^2)^{3/2}} \cdot r_q \cdot dr_q \cdot d\varphi.$$

Отсюда следует, что поток вектора \vec{j} через расположенный в нижнем полупространстве круг S с осью Z и с радиусом r :

$$I_S = \int_S dI_S = \frac{I \cdot z}{2\pi} \cdot \int_0^{r_{\text{кр}}} \int_0^{2\pi} \frac{r_q \cdot dr_q}{(r_q^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi = I \cdot z \cdot \int_0^r (r_q^2 + z^2)^{-3/2} r_q \cdot dr_q.$$

Знаем, что производная $\frac{dr_q^2}{dr_q} = 2r_q$. Так как координата z не меняется при

интегрировании по кругу S , то $r_q dr_q = \frac{1}{2} dr_q^2 = \frac{1}{2} d(r_q^2 + \text{const}) = \frac{1}{2} d(r_q^2 + z^2)$. То есть

$$\int_0^r (r_q^2 + z^2)^{-3/2} r_q \cdot dr_q = \frac{1}{2} \int_0^{r_{\text{кр}}} (r_q^2 + z^2)^{-3/2} d(r_q^2 + z^2) = \frac{1}{z} - \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}},$$

где принято во внимание, что в нижнем полупространстве $z \geq 0$ и вместо $\sqrt{z^2} = |z|$ можем полагать, что $\sqrt{z^2} = z$.

Следовательно,

$$I_S = I \cdot z \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right) = I \cdot \left(1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right). \quad (168)$$

где r, z – координаты расположенной в нижнем полупространстве или на его границе точки наблюдения a (см. [рис. 53](#)).

Тогда согласно (159): $\vec{B}^{\Sigma} = \vec{1}_{\varphi} \cdot \mu_0 \cdot I_S / (2\pi \cdot r)$ и выражению (168) для потока I_S получаем:

$$\text{при } z \geq 0 \quad \vec{B}^{\Sigma} = \vec{1}_{\varphi} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot \left(1 - \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right). \quad (169)$$

Теперь можем определить искомое поле $\vec{B} = \vec{B}^{\Sigma} - \vec{B}^{\Lambda}$, создаваемое объемным током эмиссии электрода A . В соответствии с (149)₂ магнитное поле линейного тока I по отрицательной полуоси Z :

$$\vec{B}^{\Lambda} = \vec{B}_{-} = \vec{1}_{\varphi} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (170)$$

Из (166), (170) следует, что в верхнем полупространстве ("в воздухе")

$$\text{при } z \leq 0 \quad \vec{B} = \vec{B}^{\Sigma} - \vec{B}^{\Lambda} = \vec{1}_{\varphi} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad (171)$$

а из (169), (170) для магнитного поля в точке $a(r, z)$, расположенной в однородном проводящем полупространстве получаем:

$$\text{при } z \geq 0 \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}^{\Sigma} - \vec{\mathbf{B}}^{\Lambda} = \vec{\mathbf{i}}_{\varphi} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (172)$$

Сравним теперь выражения (171), (172) для ненулевой компоненты B_{φ} магнитного поля объёмного тока эмиссии электрода A с полученными выше равенствами (149) для полей $\vec{\mathbf{B}}_{+}$ и $\vec{\mathbf{B}}_{-}$ магнитного поля линейных токов по положительной и отрицательной полуосям Z :

$$\vec{\mathbf{B}}_{+} = \vec{\mathbf{i}}_{\varphi} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad \vec{\mathbf{B}}_{-} = \vec{\mathbf{i}}_{\varphi} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right).$$

Видим, что для показанной на **рис. 53** модели магнитное поле тока эмиссии электрода A при $z \leq 0$ $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{+}$, а при $z \geq 0$ $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{-}$. То есть при $z \leq 0$ ток эмиссии электрода A в отношении возбуждения в верхнем полупространстве поля $\vec{\mathbf{B}}$ эквивалентен линейному току по положительной полуоси Z (вниз). При $z \geq 0$ этот ток эмиссии создаёт в нижнем (проводящем) полупространстве такое же поле $\vec{\mathbf{B}}$, как линейный ток по отрицательной полуоси Z . Это – ток I , показанный на **рис. 53** штриховой линией.

На **рис. 55, а** показана модель, соответствующая применяемой в ряде методов сопротивлений в электроразведке токовой линии AB . Приведенная на этом рисунке модель отвечает случаю, когда линия AB тока I расположена на границе S однородного проводящего полупространства. Из полученного выше решения прямой задачи следует, что магнитное поле показанного на **рис. 55, а** тока в верхнем полупространстве и на его границе S идентично полю линейного тока, показанного на **рис. 55, б**.

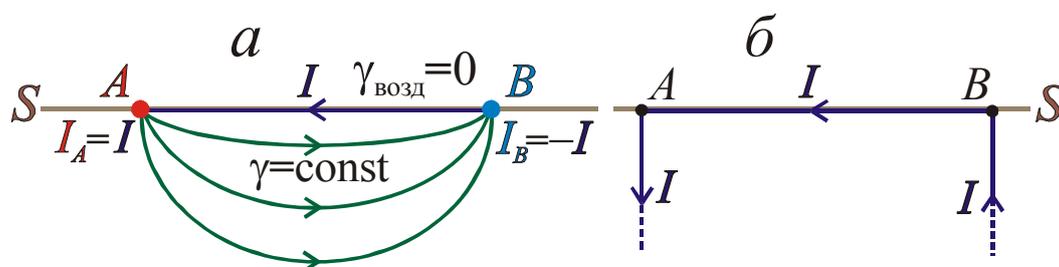


Рис. 55.

Постоянные электрические токи, создающие одинаковые магнитные поля в верхнем полупространстве и на его границе S

Важно отметить, что к выражениям (171) (при $z \leq 0$) и (172) (при $z \geq 0$) мы "пришли разными путями". При $z > 0$ формула (172) была получена благодаря сферической симметрии поля \mathbf{j} в нижнем полупространстве, а при $z \leq 0$ выражение (171) получено без этого условия. Поэтому для верхнего полупространства ("воздуха") и для плоскости S ($z=0$) формула (171) применима также при любых нарушениях однородности проводящей среды в нижнем полупространстве, не нарушающих её цилиндрическую симметрию относительно вертикальной, прямой, проходящей через электрод A . В частности, формула (171) при $z \leq 0$ применима в случае, когда в земле удельная электропроводность $\gamma = \gamma(z)$, где $\gamma(z)$ – любая функция глубины z . Это, например, "горизонтально-слоистая" модель проводящего

полупространства. Что же касается создаваемого током эмиссии электрода поля \mathbf{V} в нижнем пространстве (в земле), то при сохранении симметрии поля относительно оси Z надо ещё определить отношение $I_S/I=c$ и ввести $I_S=c\cdot I$ в выражение (167) для потока I_S .

ЛИТЕРАТУРА

1. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». М., "Недра", 1985.
2. Альпин Л. М. Теория поля. М., "Недра", 1966.
3. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля. М., "Недра", 1971.
4. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть I. "Введение". Глава первая "Поле", 2019, 104 с. [Электронный ресурс/Текст].
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41710031> или
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol1_2019.pdf.
5. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть II. Глава вторая "Статическое поле в вакууме". Глава третья "Статическое поле в присутствии среды", 2020, 111 с. [Электронный ресурс/Текст].
<https://elibrary.ru/item.asp?id=42771398> или
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol2_2019.pdf.
6. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть III. Глава четвёртая "Стационарное электрическое поле". Глава пятая "Магнитное поле постоянного тока", 2020, 106 с. [Электронный ресурс/Текст].
<https://elibrary.ru/item.asp?id=42782333> или
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol3_2020.pdf.
7. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть IV. Глава шестая "Переменное электромагнитное поле". Глава седьмая "Прямая задача теории переменного электромагнитного поля", 2020, 104 с. [Электронный ресурс/Текст].
<https://elibrary.ru/item.asp?id=43803479> или
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol4_2020.pdf.
8. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Учебник для ВУЗов. Часть V. Глава восьмая "Элементы теории упругости". Глава девятая "Распространение упругих колебаний", 2021, 104 с. [Электронный ресурс/Текст].
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46309633> или
http://magnetometry.ru/files/Alpin_uch_vol5_2021.pdf.
9. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л., "Недра", 1972.
10. Заборовский А. И. Электроразведка. М. Гостпотехиздат, 1963.
11. Каринский А. Д. Практикум по теоретическим основам разведочной геофизики. Изд-во МГРИ, 1984.
12. Каринский А. Д. Практикум по курсу «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Изд-во МГГА, 1993.
13. Каринский А. Д. «Теория полей, применяемых в разведочной геофизике». Статические поля, стационарное электрическое поле. Учебное пособие. 2-е издание, исправленное. Изд-во МГРИ, 2007, 105 с. [Электронный

- ресурс/Текст]. (2014) <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44903409> или
http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2657 или
http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lab_2014.pdf или
<http://www.geokniga.org/books/6823> .
14. Каринский А. Д. Лекции по «Теории поля» («Теории полей, применяемых в разведочной геофизике»). Учебное пособие, 2014, 203 с. [Электронный ресурс/Текст]. http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=2656 или
http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_lec_2014.pdf или
<http://www.geokniga.org/books/6822>.
15. Каринский А. Д.. "Теория поля". Дополнительные главы: учебное пособие для специализации "сейсморазведка" 2018. 104 с, [Электронный ресурс/Текст]. http://mgri-rggru.ru/fondi/libraries/index.php?ELEMENT_ID=4823, или
http://magnetometry.ru/files/Karinskiy_uch_2018.pdf.
16. Каринский А. Д. Лекции по «Теории поля» : Теории полей, применяемых в разведочной геофизике. Версия II, 2021, 216 с. [Электронный ресурс/Текст]. <https://elibrary.ru/item.asp?id=46438214>.
17. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. М., «Недра», 1997.
18. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля. М., «Недра», 2000.
19. Кудрявцев Ю. И. Теория поля и ее применение в геофизике. М., «Недра», 1988.
20. Овчинников И. К. Теория поля. М., «Недра», 1979.