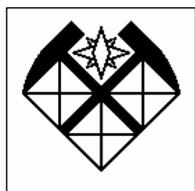


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени Серго Орджоникидзе  
(МГРИ-РГГРУ)**

---

**А. Д. Каринский**

**Лекции по «Теории поля»  
(«Теории полей, применяемых в разведочной  
геофизике»)**

Учебное пособие

«Допущено УМО по образованию в области прикладной геологии в качестве учебного пособия для студентов направления подготовки 21.05.03 «Технология геологической разведки» специализаций «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», «Геофизические исследования скважин», «Сейсморазведка», «Геофизические информационные системы» (решение № 28-14-УМО/2 от 28.01.14г.) ».

Москва, 2014 г.

УДК 550.83.015

**Каринский А.Д.**

Лекции по "Теории поля" ("Теории полей, применяемых в разведочной геофизике"). Учебное пособие. Российский государственный геологоразведочный университет (МГРИ-РГГРУ). 2014,. 203 с.

Учебное пособие составлено на основе курса лекций, читаемых автором около 35-и лет студентам-геофизикам Геофизического факультета МГРИ-РГГРУ.

Ил. 110, список лит. 16 назв.

#### **Р е ц е н з е н т ы:**

- доктор физико-математических наук В. А. Шевнин (профессор кафедры Геофизических методов исследования земной коры Геологического факультета МГУ)

- кандидат технических наук И. А. Мараев (доцент кафедры Геофизики МГРИ-РГГРУ)

## Оглавление

<b>Предисловие</b> .....	4
<b>1. ВВЕДЕНИЕ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОНЯТИЯ, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ)</b> .....	7
1.1. Скаляры и векторы.....	7
1.2. Поле.....	8
1.3. Пространственные производные. Поток вектора, напряжение, циркуляция.....	10
<b>2. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ</b> .....	18
2.1. Массы.....	18
2.2. Поле кулоновых сил.....	20
2.3. Телесный угол. Угол видимости.....	23
2.4. Уравнения статического поля $\vec{f}$ .....	26
2.5. Потенциал $U$ статического поля $\vec{f}$ .....	30
2.6. Поле плоской массы (простого слоя на части $S$ плоскости $\Pi$ ).....	34
2.7. Поле диполя.....	35
2.8. Поле двойного слоя.....	37
2.9. Поле нейтральной совокупности масс.....	39
2.10. Непрерывность статического поля и её нарушение.....	40
2.11. Решение прямой задачи теории статического поля в вакууме.....	44
2.12. Теорема единственности решения прямой задачи теории постоянного потенциального поля.....	45
2.13. Формулы Грина.....	51
2.14. Функция Грина. Интеграл Пуассона для полупространства.....	53
<b>3. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ</b> .....	55
3.1. Среда. Модели среды.....	57
3.2. Проводник в электростатическом поле $\vec{E}$ .....	58
3.3. Электростатическое экранирование.....	62
3.4. Векторы поляризации и намагниченности.....	63
3.5. Поле, создаваемое поляризованной или намагниченной средой.....	65
3.6. Полные "массы" (заряды).....	67
3.7. Второе уравнение статического поля в присутствии поляризованной (или намагниченной) среды. Векторы $\vec{D}$ и $\vec{B}$ .....	68
3.8. Система уравнений статического поля в присутствии поляризующейся (или намагничивающейся) среды.....	70
3.9. Источники поля в поляризующейся (намагничивающейся) среде.....	73
3.10. Поле у границы поляризующихся (намагничивающихся) сред.....	75
<b>4. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ</b> .....	77
4.1. Электрический ток.....	77
4.2. Закон Ома в дифференциальной форме.....	79
4.3. Тензор удельной электропроводности.....	81
4.4. Уравнение непрерывности электрического тока.....	83
4.5. Стороннее поле.....	85
4.6. Система уравнений стационарного электрического поля.....	87
4.7. Сопротивление участка цепи электрического тока.....	89

4.8. ЭДС; контактная ЭДС.....	91
4.9. Источники стационарного электрического поля.....	94
4.10. Стационарное электрическое поле у границы двух сред.....	97
4.11. Токовые электроды.....	100
4.12. Интегральные уравнения для плотности источников стационарного электрического поля.....	103
4.13. О математической идентичности уравнений полей: электростатического, магнитостатического и стационарного электрического.....	107
<b>5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА.....</b>	<b>108</b>
5.1. Постоянные магнитные поля. О законе Ампера.....	108
5.2. Закон Био- Савара- Лапласа.....	109
5.3. Векторный потенциал магнитного поля постоянного тока.....	111
5.4. Система уравнений магнитного поля постоянного тока в немагнитной среде.....	113
5.5. Скалярный потенциал магнитного поля постоянного тока.....	114
5.6. Магнитный диполь.....	118
5.7. Уравнения магнитного поля постоянного тока в присутствии намагничивающейся среды.....	119
<b>6. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....</b>	<b>123</b>
6.1. Квазипостоянное электромагнитное (ЭМ) поле.....	123
6.2. Электромагнитная индукция. II-е уравнение Максвелла.....	124
6.3. Ток смещения. I-е уравнение Максвелла.....	126
6.4. Система уравнений электродинамики.....	129
6.5. ЭМ поле в изоляторе. Волновое уравнение.....	131
6.6. ЭМ поле в проводящей среде. Телеграфное уравнение.....	136
6.7. Квазистационарное ЭМ поле. Уравнение теплопроводности- диффузии.....	140
<i>Гармонически меняющееся ЭМ поле.....</i>	<i>143</i>
6.8. Гармонически меняющееся скалярное поле.....	143
6.9. Гармонически меняющееся векторное поле.....	146
6.10. Система уравнений гармонически меняющегося ЭМ поля.....	148
6.11. Уравнение Гельмгольца. Волновое число.....	151
6.12. Плоская гармоническая ЭМ волна, её характеристики.....	154
6.13. Поперечность ЭМ волны. Импеданс.....	159
*****	
6.14. Электродинамические потенциалы.....	162
6.15. Уравнения Даламбера. Запоздывающие потенциалы.....	164
6.16. Сторонние возбудители ЭМ поля.....	166
6.17. Уравнение баланса ЭМ энергии. Вектор Умова-Пойнтинга.....	170
<b>7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ.....</b>	<b>172</b>
7.1. Упругие напряжения. Виды напряжений.....	173
7.2. Тензор упругих напряжений.....	175
7.3. Вектор смещения. Деформации.....	178

7.4. Тензор деформаций.....	181
7.5. Вектор вращения. Дилатация.....	181
7.6. Закон Гука. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона.....	184
7.7. Выражение упругих напряжений через деформации.....	186
7.8. Уравнение передачи упругих колебаний (уравнение Ламэ).....	187
7.9. Волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн.....	188
7.10. Плоская продольная упругая волна.....	191
7.11. Плоская поперечная упругая волна.....	193
7.12. Плоские однородные и неоднородные волны.....	194
7.13. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. "Сосредоточенный" источник.....	196
7.14. О Формуле Кирхгофа и принципе Гюйгенса-Френеля.....	197
7.15. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн...	199
<b>Литература.....</b>	<b>202</b>

### **Предисловие**

Фактически курс "Теория поля" ("Теория полей, применяемых в разведочной геофизике") включает ряд разделов "Теоретической физики", наиболее значимых для студентов-геофизиков геологоразведочного ВУЗа. В разведочной геофизике изучают характеристики различных физических полей: гравитационного (гравиразведка), магнитостатического (магниторазведка), стационарного электрического (электроразведка), стационарного магнитного (электроразведка), переменного электромагнитного (электроразведка), а также- поля упругих колебаний (сейсморазведка). Но, несмотря на различие в физической природе этих полей, их математическое описание может основываться на общем подходе. Это позволяет выяснить то, какие общие свойства присущи многим изучаемым в разведочной геофизике полям и в чём их принципиальные различия. При записи физических законов и других выражений применена международная система физических единиц (СИ).

Учебники и учебные пособия, на которые имеются ссылки ([№]), приведены в конце этого пособия. В основном, это- ссылки на те вопросы, понятия, доказательства которые приведены в (отражающем мировоззрение научной школы МГРИ) учебнике [1]: Л.М. Альпин, Д.С. Даев, А.Д. Каринский "Теория полей, применяемых в разведочной геофизике".

Из-за разнообразия полей, рассматриваемых в этом курсе, а также необходимости, по- возможности, применять традиционные обозначения, принятые для тех или иных величин в электродинамике, механике сплошной среды, а также в отдельных методах геофизической разведки, некоторые символы обозначают разные величины. Приведем список основных обозначений и соответствующих им величин.

$\vec{A}$ - векторный потенциал (магнитного поля постоянного тока, электродинамический электрического типа);

$a$ - точка наблюдения, в разделе 6 - фазовая постоянная;

- $\vec{B}$  - вектор магнитной индукции с абсолютной величиной  $B$ ;
- $b$  - в разделе 6- коэффициент затухания;
- $c \approx 2.998 \cdot 10^8$ , м/с- электродинамическая постоянная (скорость света в вакууме);
- $\vec{D}$  - вектор электрического смещения (индукции) с абсолютной величиной  $D$ ;
- $\vec{E}$  - напряженность электрического поля с абсолютной величиной  $E$ ;
- $E$  - в разделе 7- модуль Юнга;
- $e$  - электрический заряд;
- $\mathcal{E}$  - напряжение векторного поля;
- $\vec{F}$  - сила;
- $\vec{f}$  - в разделе 2 - напряженность статического поля с абсолютной величиной  $f$ ;
- $f$  - в разделе 6 - частота колебаний;
- $\vec{G}$  - напряженность гравитационного поля с абсолютной величиной  $G$ ;
- $\vec{H}$  - напряженность магнитного поля с абсолютной величиной  $H$ ;
- $h$  - коэффициент Ламэ, высота, толщина;
- $I$  - электрический ток, эмиссия электрода;
- $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица;
- $\vec{J}$  - вектор намагниченности;
- $\vec{J}^{BP}$  - вектор временной (индуктивной) намагниченности;
- $\vec{J}^0$  - вектор постоянной (остаточной) намагниченности;
- $\vec{j}$  - вектор плотности электрического тока с абсолютной величиной  $j$ ;
- $k$  - в разделах 6, 7 - волновое число;
- $\vec{L}$ ,  $\vec{L}_{12}$ ,  $\vec{L}_{qa}$  - радиус-векторы с модулями  $L$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{qa}$ ;
- $L$  - расстояние;
- $l$  - линия, контур, длина;
- $\vec{M}$  - момент с абсолютной величиной  $M$ , в разделе 1- векторное поле;
- $m$  - масса;
- $n$  - нормаль к поверхности;
- $\vec{P}$  - вектор поляризации;
- $\vec{p}$  - момент диполя с абсолютной величиной  $p$ , в разделе 7- вектор упругого напряжения;
- $P$  - мощность сторонних сил;
- $Q$  - мощность, переходящая в тепло;
- $q$  - точка в источнике (возбудителе) поля;
- $R$  - сферическая координата, сопротивление;
- $r$  - цилиндрическая координата;
- $S$  - поверхность, площадь;
- $T$  - период колебаний, в разделе 1- скалярное поле;

- $t$ - время;  
 $U$ - (скалярный) потенциал;  
 $\vec{U}$  - (в разделе 7)- вектор смещения с декартовыми компонентами  $U$ ,  $V$ ,  
 $W$ ;  
 $V$ - область пространства, объем;  
 $v$ - скорость;  
 $W$ - энергия;  
 $x, y, z$ - декартовы координаты;  
 $\vec{Y}$  - (в разделе 6) вектор Умова - Пойнтинга;  
 $Z$ - ось координат, в разделе 6- импеданс (волновое сопротивление);  
 $\alpha$  (альфа) - в разделе 6- отношение  $\omega\epsilon_a/\gamma$ ;  
 $\gamma$  (гамма)- в разделе 2- гравитационная постоянная  $\gamma \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$ ,  
 $\text{м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ , в разделах 4– 6- удельная электропроводность, в разделе 7-  
 деформация сдвига;  
 $\delta$  (дельта)- объемная плотность масс, зарядов, в разделе 6- глубина  
 проникновения;  
 $\epsilon$  (эпсилон)- в разделах 3– 6- (относительная) диэлектрическая  
 проницаемость, в разделе 7- деформация сжатия- растяжения;  
 $\epsilon_0 \approx 10^{-9} / (36 \cdot \pi)$ , Ф/м- электрическая постоянная;  
 $\epsilon_a = \epsilon \epsilon_0$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость;  
 $\eta$  (эта)- поверхностная плотность дипольных моментов;  
 $\theta$  (тета)- сферическая координата, в разделе 7- дилатация;  
 $\kappa$  (каппа)- магнитная восприимчивость;  
 $\lambda$  (лямбда)- линейная плотность масс, в разделе 3- параметр среды ( $\epsilon, \mu$ ,  
 $\gamma$ ), в разделе 6- длина волны; в разделе 7- одна из упругих постоянных Ламэ;  
 $\Lambda$  (лямбда прописная), в разделе 7- - длина волны;  
 $\mu$  (мю) в разделах 3– 6- (относительная) магнитная проницаемость, в  
 разделе 7- одна из упругих постоянных Ламэ- модуль сдвига;  
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м- магнитная постоянная;  
 $\mu_a = \mu \mu_0$ - абсолютная магнитная проницаемость;  
 $\nu$  (ню) в разделе 2- множитель в законе Кулона-Ньютона, в разделе 7-  
 коэффициент Пуассона;  
 $\xi$  (кси)- координата;  
 $\pi$  (пи)  $\approx 3.141592653589793238462643\dots$ ;  
 $\rho$  (ро)- в разделах 4 – 6- удельное электрическое сопротивление, в  
 разделе 7- плотность масс;  
 $\sigma$  (сигма)- поверхностная плотность масс, зарядов, в разделе 7-  
 нормальное упругое напряжение;  
 $\tau$  (тау)- в индексах- тангенциальная компонента вектора, в разделе 6-  
 время релаксации, в разделе 7- касательное упругое напряжение;

$\varphi$  (фи)- цилиндрическая или сферическая (азимутальная) координата, в разделе 7- скалярный потенциал поля смещений;

$\chi$  (хи)- диэлектрическая восприимчивость;

$\psi$  (пси)- поток вектора;

$\bar{\Psi}$  (пси прописная), в разделе 7- векторный потенциал поля смещений;

$\omega$  (омега) в разделе 2- угол видимости, в разделах 6, 7- круговая частота;

$\bar{\omega}$  в разделе 7- вектор вращения;

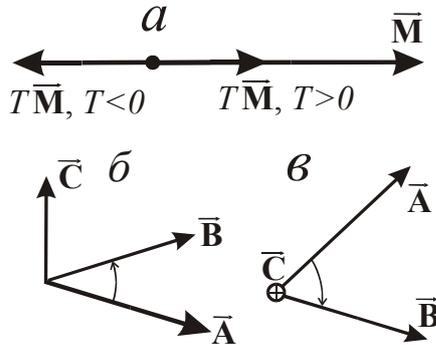
$\Omega$  (омега прописная) в разделе 2- телесный угол.

## 1. ВВЕДЕНИЕ (ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОНЯТИЯ, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ)

### 1.1. Скаляры и векторы

Скалярную величину  $T$  характеризует число, а также- размерность (если  $T$ - не безразмерная величина). Примерами скалярных величин являются напряжение  $\mathcal{E}(В)$  электрического поля  $\vec{E}$  в цепи электрического тока, ток  $I(А)$  в этой цепи и её сопротивление  $R(Ом)$ . Очевидно, что действия сложения и вычитания применимы к таким величинам только в том случае, если они имеют одинаковую размерность. При перемножении или делении таких величин тем же действиям подвергаются их размерности. Например, по закону Ома  $\mathcal{E}(В)/R(Ом)=I(В/Ом)=I(А)$ .

Векторную величину (вектор)  $\vec{M}$  характеризуют её абсолютная величина  $|\vec{M}|=M$  и направление (рис. 1,*a*), либо три



**Рис. 1.1.** Вектор  $\vec{M}$ , произведение  $T \cdot \vec{M}$  скаляра  $T$  и вектора  $\vec{M}$  (*a*); векторное произведение  $\vec{C}$  векторов  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  (*б, в*).

скалярные величины- скалярные компоненты  $M_1, M_2, M_3$  (см. ниже) вектора  $\vec{M}$  в системе координат. Как и для скаляров, сложение или вычитание векторов (либо их компонент) возможно только при одинаковой размерности векторов. При умножении или делении вектора  $\vec{M}$  на скаляр  $T$  тем же действиям подвергаются размерности  $\vec{M}$  и  $T$ . Например, если  $\vec{F}$ - сила, действующая на массу  $m$ , а  $\vec{a}$ - ускорение, то по 2-му закону Ньютона  $\vec{a} = \vec{F}/m$ , где размерности:  $[F]=Н$ ,  $[m]=кг$ ,  $[a]=Н/кг=м/с^2$ .

Произведение скаляра  $T$  и вектора  $\vec{M}$ :  $T \cdot \vec{M} = \vec{A}$ , где  $\vec{A}$ - вектор с абсолютной

величиной  $|\vec{A}|=A=|T| \cdot M$ . При  $T>0$  имеем  $\vec{A} \parallel \vec{M}$  (направления  $\vec{A}$  и  $\vec{M}$  одинаковы). При  $T<0$   $\vec{A} \uparrow \downarrow \vec{M}$  (вектор  $\vec{A}$  антипараллелен вектору  $\vec{M}$ ), рис. 1,а.

Скалярное произведение векторов

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A} \vec{B}) = T, \quad (1.1)$$

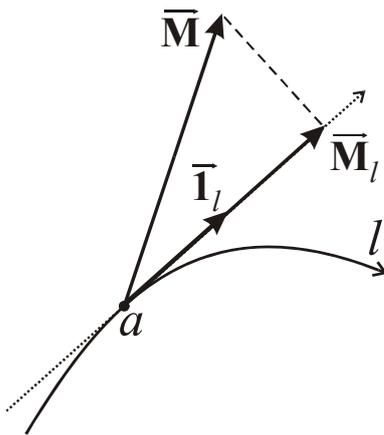
где скаляр  $T=A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B})$ . Если угол между направлениями векторов  $\vec{A}, \vec{B}$  - острый (или равен  $0^\circ$ ), то  $T>0$ , а если этот угол - тупой (или равен  $180^\circ$ ), то  $T<0$ . Если же этот угол прямой ( $90^\circ$ ), то  $T=0$ .

Векторное произведение векторов:

$$\vec{A} \times \vec{B} = [\vec{A} \vec{B}] = \vec{C}, \quad (1.2)$$

где  $\vec{C}$  - вектор с абсолютной величиной  $|\vec{C}|=C=A \cdot B \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$ . Направление вектора  $\vec{C}$  определяет следующее правило:  $\vec{C} \perp \vec{A}$ ,  $\vec{C} \perp \vec{B}$  и векторы  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  образуют правую тройку. Последнее означает, что если повернуть вектор

$\vec{A}$  на угол, меньший, чем  $180^\circ$ , до направления вектора  $\vec{B}$ , то направление вектора  $\vec{C}$  определяет правило "правого винта". Это иллюстрируют рис. 1,б,в. В частности, на рис. 1,в векторы  $\vec{A}, \vec{B}$  лежат в плоскости чертежа, а вектор  $\vec{C}$  направлен ортогонально этой плоскости ("от нас").



**Рис. 1.2.** Векторная компонента  $\vec{M}_l$  вектора  $\vec{M}$  и единичный вектор  $\vec{i}_l$  по направлению  $l$ .

Определим такие понятия, как векторная ( $\vec{M}_l$ ) и скалярная ( $M_l$ ) компоненты вектора  $\vec{M}$  по направлению (линии)  $l$ . На рис. 1.2. показаны: вектор  $\vec{M}$  в точке  $a$ , проходящая через эту точку линия  $l$ , векторная компонента  $\vec{M}_l$  по направлению  $l$  и (пунктирной линией) - касательная к линии  $l$  в точке  $a$  прямая. Безразмерный единичный вектор  $\vec{i}_l$  в точке  $a$  направлен по касательной к линии  $l$ .

Абсолютная величина  $|\vec{i}_l|=1$ . Компоненты  $M_l$  и  $\vec{M}_l$  определяют выражения:

$$M_l = M \cdot \cos(\vec{M}, \vec{i}_l) \text{ или } M_l = (\vec{M} \vec{i}_l), \quad \vec{M}_l = \vec{i}_l \cdot M_l, \quad (1.3)$$

где, в соответствии с (1.1),  $(\vec{M} \vec{i}_l)$  - скалярное произведение векторов  $\vec{M}$  и  $\vec{i}_l$ . Из (1.3) следует, что при остром угле между направлениями  $\vec{M}, \vec{i}_l$  компонента  $M_l > 0$ , а при тупом угле между направлениями  $\vec{M}, \vec{i}_l$   $M_l < 0$ . Если направления векторов  $\vec{M}$  и  $\vec{i}_l$  - одинаковы, то  $M_l = M$ , а если эти направления - взаимно ортогональны, то компонента  $M_l=0$ . При  $M_l > 0$

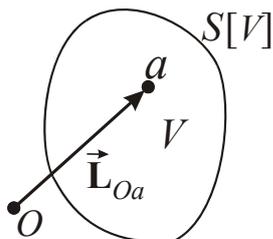
направление векторной компоненты  $\vec{M}_l$  совпадает с направлением  $\vec{I}_l$ , а при  $M_l < 0$  имеем:  $\vec{M}_l \uparrow \downarrow \vec{I}_l$ .

## 1.2. Поле

Понятию "поле" будем придавать как *физический*, так и *математический* смысл. В первом случае можем, например, говорить о том, что электрический заряд создаёт электрическое поле с напряжённостью  $\vec{E}$ . Математически определим понятие "поле" следующим образом. Величина  $F$  образует в области пространства  $V$  поле, если каждой точке  $a$  области  $V$  соответствует некоторое значение  $F$ . Иными словами, величина  $F$  есть функция положения точки  $a$  в области  $V$ :  $F=F(a)$ . Замкнутую поверхность, ограничивающую область  $V$ , будем обозначать  $S[V]$  (рис. 1.3).

Точку  $a$ , в которой мы рассматриваем или определяем поле, условно назовём "точкой наблюдения". Положение точки  $a$  в области пространства  $V$  будем определять двумя способами.

1). При помощи радиуса-вектора  $\vec{L}_{Oa}$  с началом в некоторой точке  $O$  и концом в точке  $a$  (рис. 1.3). Модуль этого вектора  $|\vec{L}_{Oa}| = L_{Oa}$ , где  $L_{Oa}$  - расстояние между точками  $O$  и  $a$ .



**Рис. 1.3.** "Точка наблюдения"  $a$  в области  $V$ , граница  $S[V]$  области  $V$  и радиус-вектор  $\vec{L}_{Oa}$ .

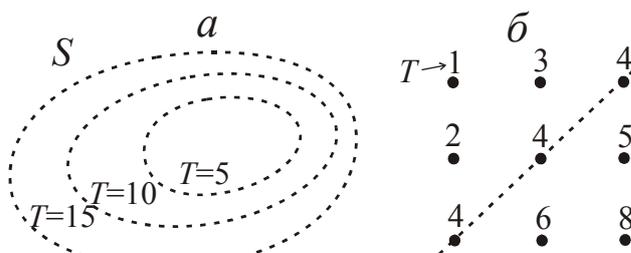
2). При помощи координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  в той или иной (выбранной нами) системе координат.

В общем случае поле  $F$  зависит не только от положения точки  $a$ , но и от времени  $t$ :  $F=F(a, t)$ . Тогда поле  $F$  называют *переменным*. Если поле  $F$  не зависит от времени  $t$  ( $F=F(a), \partial F/\partial t \equiv 0$ ), то это - *постоянное* поле  $F$ . Если (постоянное или переменное) поле  $F$  не зависит от положения точки  $a$  в области пространства  $V$ , то это - *однородное* поле в этой области. Тогда в области

$V$  имеем:  $\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0, \frac{\partial F}{\partial \xi_3} = 0$ , где  $\xi_{1,2,3}$  -

координаты.

Различают *скалярные, векторные и тензорные* поля.

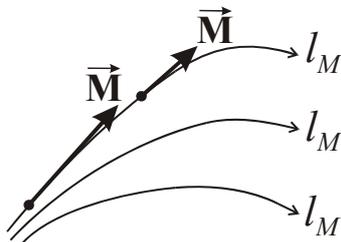


**Рис. 1.4.** Представление скалярного поля  $T$  на поверхности  $S$  (или на части  $S$  плоскости) при помощи: изолиний (а), чисел в "узлах сетки" (б).

1). **Скалярное поле  $T(a)$**  в каждой точке  $a$  характеризует скалярная величина  $T$ , то есть число (а также размерность в системе физических единиц). Примеры таких полей: температура  $t^\circ$  (в градусах Цельсия, или в других градусах), объёмная плотность масс  $\delta$  (в  $\text{кг}/\text{м}^3$ ), потенциал  $U$

электрического поля  $\vec{E}$  (в В (вольтах)). Геометрически распределение скалярного поля  $T$  в пространстве бывает можно представить при помощи уровнями поверхностями  $T=\text{const}$ . Их сечение другой поверхностью  $S$  (плоскостью чертежа, поверхностью Земли) даёт изолинии  $T=\text{const}$  скалярного поля  $T$  на поверхности  $S$  (рис. 1.4,а). В некоторых случаях оказывается удобнее наглядно показать распределение поля  $T$  на поверхности  $S$  при помощи чисел в точках, расположенных на  $S$  (рис. 1.4,б).

2). **Векторное поле**  $\vec{M}(a)$  в каждой точке  $a$  характеризует вектор  $\vec{M}$ . Примеры векторных полей: напряжённости гравитационного ( $\vec{G}$ ), электрического ( $\vec{E}$ ), магнитного ( $\vec{H}$ ) полей. Понятно, что, как и векторную величину  $\vec{M}$  (см. выше), векторное поле  $\vec{M}(a)$  в каждой точке  $a$  пространства (в области  $V$ ) характеризуют



**Рис. 1.5.**  
Векторные линии  $l_M$   
поля  $\vec{M}$ .

абсолютная величина  $|\vec{M}|(a)=M(a)$  и направление вектора  $\vec{M}(a)$ , либо три скалярных поля - скалярные компоненты  $M_1(a)$ ,  $M_2(a)$ ,  $M_3(a)$  поля  $\vec{M}(a)$  в системе координат. Для наглядного отражения некоторых особенностей того или иного векторного поля  $\vec{M}$  удобно воспользоваться таким понятием, как векторные линии  $l_M$  поля  $\vec{M}$  (рис. 1.5). Векторы  $\vec{M}$  направлены по касательным к линиям  $l_M$ , а "густота" этих линий (в некоторой степени) отражает абсолютные величины  $M$  векторов  $\vec{M}$ . Если  $\vec{M}$  - "силовая" характеристика, то линии  $l_M$  называют силовыми линиями.

3). **Тензорное поле** в каждой точке  $a$  характеризуют тензоры. Тензор (истинный тензор 2-го ранга) определяют (в общем случае) 9 скалярных величин в системе координат. С тензорами мы "встретимся" в разделах 4 и 7 этого курса. Там и определим это понятие. Примерами тензорных полей являются параметры анизотропных сред (см. раздел 4.3), упругие напряжения, упругие деформации (см. раздел 7).

Есть и другие "классификации" полей. Различают, например, такие векторные поля, как потенциальные, вихревые, чисто-вихревые (соленоидальные). Но дать определения таким полям мы сможем после того, как рассмотрим следующий вопрос.

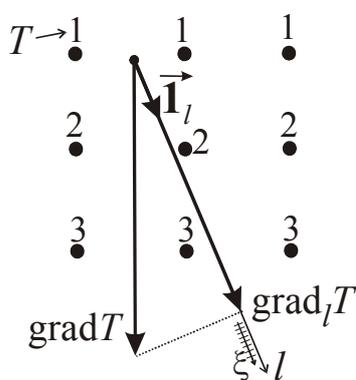
### 1.3. Пространственные производные. Поток вектора, напряжение, циркуляция

Пространственные производные скалярного поля  $T(a)$  и векторного поля  $\vec{M}(a)$  характеризуют некоторые особенности изменения полей в окрестности точки  $a$ . Как убедимся ниже, при рассмотрении уравнений векторных полей, пространственные производные таких полей тесно связаны с плотностями их возбудителей.

1). **Градиент** ( $\text{grad}$ ) - первая пространственная производная скалярного поля  $T$ . Производная  $\text{grad}T(a)$  - векторное поле.  $\text{grad}T(a)$  - вектор, имеющий направление наиболее резкого (интенсивного) возрастания поля  $T$  в окрестности точки  $a$  и абсолютную величину, равную производной поля  $T$  по направлению  $\text{grad}T$ . Если, например, вектор  $\text{grad}T$  направлен по оси  $X$ , то  $|\text{grad}T| = dT/dx$ , а если  $\text{grad}T$  направлен по линии  $l$ , то  $|\text{grad}T| = dT/dl$ .

Понятно, что вектор  $-\text{grad}T$  направлен в сторону наиболее резкого убывания ("падения") поля  $T$ . Если в области пространства  $V$  поле  $T$  однородно (одинаково во всех точках  $a$ ), то в этой области  $\text{grad}T=0$ .

На рис. 1.6 (для случая, когда  $\text{grad}T$  лежит в плоскости чертежа) показана векторная компонента  $\text{grad}_l T$  по направлению  $l$ . Эта компонента



**Рис. 1.6.** Вектор  $\text{grad}T$  и его векторная компонента  $\text{grad}_l T$  по направлению  $l$ .

$\text{grad}_l T = \vec{i}_l \text{grad}_l T$ , где  $\vec{i}_l$  единичный вектор по направлению  $l$ , а  $\text{grad}_l T$  - скалярная компонента вектора  $\text{grad}T$  по направлению  $l$ . Согласно (1.3),  $\text{grad}_l T = (\vec{i}_l, \text{grad}T)$ . Отсюда следует (см. [1], с. 14, 15), что  $\text{grad}_l T = \partial T / \partial l$ . Если  $l$  - координатная линия, по которой перемещается точка при увеличении координаты  $\xi$ , то  $\partial l = h_\xi \partial \xi$ , где  $h_\xi$  - коэффициент Ламэ для координаты  $\xi$  (см. [1], с. 9, 10; [5], с. 10- 15). В этом случае скалярная и векторные компоненты  $\text{grad}T$  определяют выражения:  $\text{grad}_l T = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}$ ,

$\text{grad}_l T = \frac{\vec{i}_\xi}{h_\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi}$ . Складывая векторные компоненты, получаем выражения

для вектора  $\text{grad}T$  в произвольных ортогональных координатах  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , и, в частности, в декартовых координатах  $x, y, z$ :

$$\text{grad}T = \frac{\vec{i}_1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \frac{\vec{i}_2}{h_2} \frac{\partial T}{\partial \xi_2} + \frac{\vec{i}_3}{h_3} \frac{\partial T}{\partial \xi_3}, \quad \text{grad}T = \vec{i}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Для записи пространственных производных удобно пользоваться оператором набла  $\nabla$  (оператором Гамильтона). В декартовых координатах

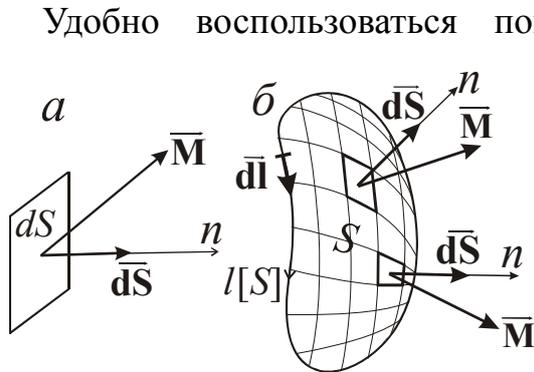
$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.5)$$

При сравнении выражений (1.4), (1.5) видим, что

$$\text{grad}T = \nabla T. \quad (1.5, a)$$

2). **Поток вектора.** Определим сначала понятие (скалярного) потока  $d\Psi$  вектора (векторного поля)  $\vec{M}$  через бесконечно малый элемент

поверхности (ориентированную элементарную площадку)  $dS$  с выбранным направлением нормали  $n$  к  $dS$  (рис. 1.7,а).  $d\Psi = M \cdot dS \cdot \cos(\vec{M}, n)$ . Отсюда следует, что  $d\Psi$  - скалярная величина, знак которой совпадает со знаком косинуса угла между направлениями  $\vec{M}$  и нормали  $n$ .



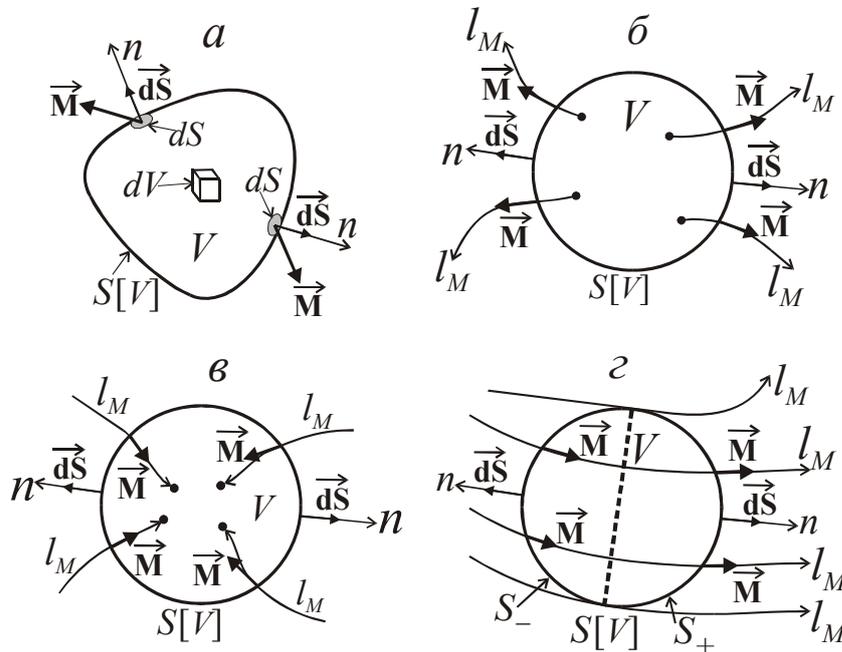
**Рис. 1.7.** К определению потока вектора  $\vec{M}$  через элементарную площадку  $dS$  с нормалью  $n$  (а) и потока вектора  $\vec{M}$  через поверхность  $S$ , ограниченную (замкнутой) линией  $l[S]$  (б).

удобно воспользоваться понятием ориентированной элементарной площадки, как вектора  $\vec{dS}$  с абсолютной величиной  $dS$  и направлением по нормали  $n$  ( $|\vec{dS}| = dS, \vec{dS} \parallel n$ ). Тогда поток  $d\Psi$  можно выразить скалярным произведением:  $d\Psi = (\vec{M} \vec{dS})$ .

Поток  $\Psi$  вектора  $\vec{M}$  через поверхность  $S$  (рис. 1.7,б) определяет интеграл по этой поверхности:  $\Psi = \int_S d\Psi$ , то есть  $\Psi = \int_S (\vec{M} \vec{dS})$ . Из

этого определения следует, что поток  $\Psi$  - скалярная величина, которая может быть положительной, отрицательной

или равной нулю. Если, например, как это показано на рис. 1.7,б, углы между



**Рис. 1.8.** К потоку вектора  $\vec{M}$  через замкнутую поверхность  $S[V]$ .

направлениями векторов  $\vec{M}$  на  $S$  и направлениями нормалей  $n$  к  $S$ -острые (или нулевые) на всей поверхности  $S$ , то  $\Psi > 0$ .

Поток  $\Psi$  поля  $\vec{M}$  через замкнутую поверхность  $S[V]$ , ограничивающую область пространства  $V$ , будем обозначать следующим образом:  $\Psi = \oint_{S[V]} (\vec{M} \vec{dS})$ . В

этом случае будем

полагать, что нормали  $n$  к  $S[V]$  и, соответственно, векторы  $\vec{dS}$  направлены наружу относительно области пространства  $V$  (рис. 1.8,а). Как убедимся позже, поток  $\Psi$  через  $S[V]$  тесно связан с расположенными в  $V$  источниками

поля  $\vec{M}$ . Во многих случаях знак потока  $\Psi$  через  $S[V]$  отражает некоторые "геометрические" особенности поля  $\vec{M}$  в области  $V$  и на её границе  $S[V]$ .

На рис. 1.8,б показаны возможные направления векторов  $\vec{M}$  на поверхности  $S[V]$  и векторных линий  $l_M$  в окрестности области  $V$  при положительном потоке  $\Psi$ . Видно, что в этом случае линии  $l_M$  имеют начало в точках, расположенных в области  $V$ , и "выходят" из этой области. На рис. 1.8,в показаны возможные направления линий  $l_M$  в том случае, когда поток  $\Psi$  через  $S[V]$ - отрицателен. При этом линии  $l_M$  "входят" в область  $V$  и оканчиваются внутри этой области. На рис. 1.8,г линии  $l_M$  "проходят" через область  $V$ , не начинаясь и не оканчиваясь в этой области. В этом случае поток  $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ , где  $\Psi_+ > 0$  и  $\Psi_- < 0$ - потоки вектора  $\vec{M}$  через две части  $S_+$  и  $S_-$  поверхности  $S[V]$  (см. рис. 1.8,г). Если  $\Psi_+ = -\Psi_-$ , то поток через  $S[V]$   $\Psi = 0$ .

3). **Дивергенция** ( $\text{div}$ )- первая пространственная (скалярная) производная векторного поля  $\vec{M}$ . Производная  $\text{div} \vec{M}(a)$ - скалярное поле. По определению

$$\text{div} \vec{M}(a) = \frac{\oint_{S[dV]} (\vec{M} d\vec{S})}{dV}, \quad (1.6)$$

где точка  $a$ - центр бесконечно-малой области пространства с объёмом  $dV$ , а  $S[dV]$ - ограничивающая эту область замкнутая поверхность (рис. 1.9,а).

Так как величина  $dV > 0$ , то в (1.6) знаки  $\text{div} \vec{M}$  и потока  $\oint_{S[dV]} (\vec{M} d\vec{S})$ -

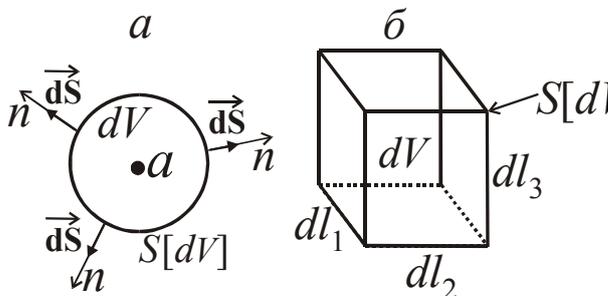


Рис. 1.9. К определению  $\text{div} \vec{M}$ .

одинаковы. Поэтому если, например, на рис. 1.8,б,в заменить области  $V$  на элементарные объёмы  $dV$  с центрами в точках  $a$ , то первый из этих рисунков будет иллюстрировать возможные особенности "поведения" поля  $\vec{M}$  в окрестности точки  $a$  при  $\text{div} \vec{M}(a) > 0$ , а второй- при

$\text{div} \vec{M}(a) < 0$ . Позже убедимся, что производная  $\text{div} \vec{M}$  тесно связана с плотностью источников поля  $\vec{M}$ . Иногда говорят, что в тех точках  $a$ , где  $\text{div} \vec{M}(a) \neq 0$ , ( $\text{div} \vec{M}(a) > 0$ ,  $\text{div} \vec{M}(a) < 0$ ), находятся *источники* (истоки, стоки) поля  $\vec{M}$ .

Выражение (1.6) наглядно показывает то, какие особенности поля  $\vec{M}(a)$  характеризует  $\text{div} \vec{M}(a)$ , но не совсем удобно для расчёта этой производной. Применяя выражение (1.6) к координатному элементу объёма-прямоугольному параллелепипеду с рёбрами  $dl_1$ ,  $dl_2$ ,  $dl_3$  в ортогональных

координатах (рис. 1.9,б), можно выразить  $\operatorname{div} \vec{M}$  через производные (см. [1], с. 24- 25). В частности, в декартовых координатах, где  $dl_1=dx$ ,  $dl_2=dy$ ,  $dl_3=dz$ ,  $\vec{M} = \vec{1}_x M_x + \vec{1}_y M_y + \vec{1}_z M_z$ , пространственная производная

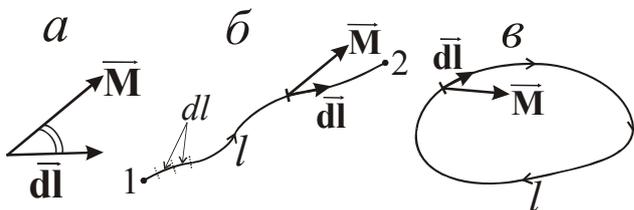
$$\operatorname{div} \vec{M} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z}. \quad (1.7)$$

Из (1.5), (1.7) следует, что производная  $\operatorname{div} \vec{M}$  равна скалярному произведению оператора набла  $\nabla$  и вектора  $\vec{M} = \vec{1}_x M_x + \vec{1}_y M_y + \vec{1}_z M_z$ :

$$\operatorname{div} \vec{M} = (\nabla \vec{M}). \quad (1.7, a)$$

#### 4). Напряжение поля, циркуляция.

По определению напряжение  $d\mathcal{E}$  поля  $\vec{M}$  на элементарном ориентированном отрезке



**Рис. 1.10.** Напряжение поля  $\vec{M}$  на элементарном отрезке ("пути")  $d\vec{l}$  (а), по линии ("пути")  $l$  (б), циркуляция - напряжение по замкнутой линии  $l$  (в).

("пути")  $d\vec{l}$  определяет выражение:

$$d\mathcal{E} = M \cdot dl \cdot \cos(\vec{M}, d\vec{l}) = (\vec{M} d\vec{l})$$

(рис. 1.10,а), где  $dl = |d\vec{l}|$  - длина этого отрезка. При остром (или нулевом) угле  $\vec{M}$ ,  $d\vec{l}$  напряжение  $d\mathcal{E} > 0$ , при тупом (или равном  $\pi$ ) угле  $\vec{M}$ ,  $d\vec{l}$  напряжение  $d\mathcal{E} < 0$ , а,

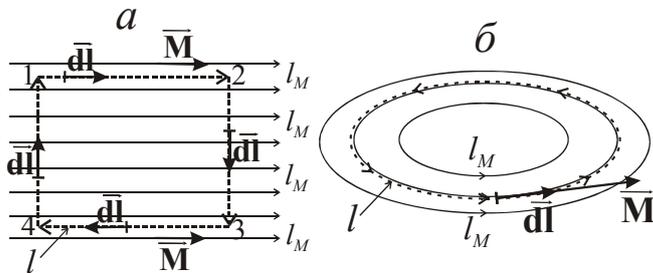
если этот угол - прямой, то  $d\mathcal{E} = 0$ .

Напряжение  $\mathcal{E}_{12}$  на пути  $l$  из точки "1" в точку "2" (направленной линии  $l$  с началом в точке "1" и концом в точке "2", см. рис. 1.10,б) определяет криволинейный интеграл:  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{M} d\vec{l})$ . Понятно, что в зависимости от

направлений поля  $\vec{M}$  в точках линии  $l$  и направлений её элементарных отрезков  $d\vec{l}$  скалярная величина  $\mathcal{E}_{12}$  может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Циркуляция  $\mathcal{C}$ - напряжение векторного поля на замкнутой направленной линии  $l$ , (то есть при заданном направлении перемещения точки по этой линии):  $\mathcal{C} = \oint_l (\vec{M} d\vec{l})$ . Подобно такому понятию, как "поток вектора через замкнутую поверхность", циркуляция  $\mathcal{C}$  характеризует, в частности, некоторые "геометрические особенности" поля  $\vec{M}$ . На рис. 1.11,а приведен пример, когда поле  $\vec{M}$ - однородно, то есть векторы  $\vec{M}$  одинаковы во всех точках рассматриваемой области пространства, а векторные линии  $l_M$ - взаимно параллельные прямые. Пунктиром показана замкнутая направленная линия  $l$  в форме прямоугольника с вершинами в точках "1", "2", "3", "4". На

сторонах  $l_{23}$  и  $l_{41}$  прямоугольника отрезки  $d\vec{l} \perp \vec{M}$  и  $(\vec{M} d\vec{l}) = 0$ , на стороне  $l_{12}$   $d\vec{l} \parallel \vec{M}$  и  $(\vec{M} d\vec{l}) = M \cdot dl$ , а на стороне  $l_{34}$   $d\vec{l} \updownarrow \vec{M}$  и  $(\vec{M} d\vec{l}) = -M \cdot dl$ . Ясно, что циркуляция по линии  $l$ :  $\oint_l (\vec{M} d\vec{l}) = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{34} + \varepsilon_{41} = M \cdot l_{12} + 0 - M \cdot l_{34} + 0 = 0$ , так как длины отрезков  $l_{12}$  и  $l_{34}$  - одинаковы.



**Рис. 1.11.** Примеры полей  $\vec{M}$  с нулевой (а) и ненулевой (б), циркуляцией.

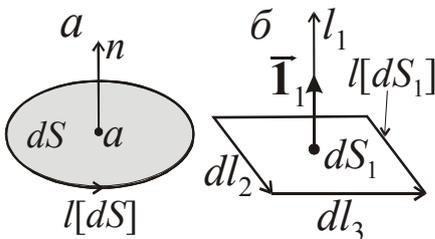
На рис. 1.11,б векторные линии  $l_M$  поля  $\vec{M}$  - замкнутые. Понятно, что, (по крайней мере) по линиям  $l_M$  циркуляция  $\mathcal{C} = \oint_{l_M} (\vec{M} d\vec{l}) \neq 0$ , так как, в зависимости от выбранного направления обхода линии  $l_M$ , углы между направлениями  $\vec{M}$  и  $d\vec{l}$  равны нулю либо  $\pi$ .

При показанном на рисунке направлении обхода линии  $l$  (пунктирная линия) по этой линии  $\mathcal{C} > 0$ .

5). **Ротор** (rot, а в связанных с теорией поля работах на английском языке- curl)- первая пространственная (векторная) производная векторного поля  $\vec{M}$ . Производная  $rot \vec{M}(a)$  - векторное поле. По определению скалярная компонента вектора  $rot \vec{M}(a)$  по направлению  $n$ :

$$rot_n \vec{M}(a) = \frac{\oint_{l[dS]} (\vec{M} d\vec{l})}{dS}, \tag{1.8}$$

где  $n$ - нормаль к элементарной площадке  $dS$  (с центром в точке  $a$ ), ограниченной замкнутой линией  $l[dS]$  (рис. 1.12,а). Направление обхода по линии  $l[dS]$  образует правовинтовую систему с направлением  $n$ . Из (1.8) следует, что компонента  $rot_n \vec{M}(a)$  имеет тот же знак, что циркуляция  $\mathcal{C} = \oint_{l[dS]} (\vec{M} d\vec{l})$ . При  $\mathcal{C}=0$  компонента  $rot_n \vec{M}(a)=0$ .



**Рис. 1.12.** К определению компоненты вектора  $rot \vec{M}$ .

В системе координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  можем получить более простые, чем (1.8), выражения для компонент вектора  $rot \vec{M}$ . Пусть на координатной поверхности  $\xi_1 = const$  лежит координатная площадка  $dS_1$  в виде бесконечно-малого прямоугольника со сторонами  $dl_2, dl_3$  и нормалью  $\vec{I}_1$  (рис. 1.12,б). Применяя выражение (1.8) к  $dS_1 = dl_2 \cdot dl_3$ , можем выразить компоненту  $rot_1 \vec{M}$  через

производные компонент  $\vec{M}$  (см. [1], с. 21- 22). В частности, в декартовых

координатах, где  $dl_2=dy$ ,  $dl_3=dz$ ,  $dS_1=dS_x=dy \cdot dz$ ,  $\vec{\mathbf{1}}_1 = \vec{\mathbf{1}}_x$ ,  
 $\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{1}}_x M_x + \vec{\mathbf{1}}_y M_y + \vec{\mathbf{1}}_z M_z$ , для скалярной и векторной компонент поля  
 $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$  по направлению оси  $X$  получаем:  $\text{rot}_x \vec{\mathbf{M}} = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$ ,

$\text{rot}_x \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{1}}_x \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right)$ . Подобным образом можем определить две другие  
 компоненты  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$ . Складывая векторные компоненты, получаем выражение  
 для  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$  в декартовых координатах:

$$\text{rot } \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{1}}_x \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) + \vec{\mathbf{1}}_y \left( \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) + \vec{\mathbf{1}}_z \left( \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right). \quad (1.9)$$

Из (1.5), (1.9) следует, что производная  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$  равна векторному  
 произведению оператора набла  $\nabla$  и вектора  $\vec{\mathbf{M}}$ :

$$\text{rot } \vec{\mathbf{M}} = [\nabla \vec{\mathbf{M}}]. \quad (1.9, a).$$

Говорят, что в тех областях пространства (линиях, поверхностях), где  
 $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$ , находятся "вихри" поля  $\vec{\mathbf{M}}$  (источники поля  $\vec{\mathbf{M}}$  вихревого типа).

#### б). *Потенциальные, соленоидальные и другие векторные поля.*

Выражения для производных  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}$  и  $\text{div } \vec{\mathbf{M}}$  составляют систему  
 уравнений поля  $\vec{\mathbf{M}}$  в дифференциальной форме. Для (любого по физической  
 природе) поля  $\vec{\mathbf{M}}$  в зависимости от того, равны или не равны эти  
 производные нулю, применяют следующую терминологию.

Если  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ ,  $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$ , то поле  $\vec{\mathbf{M}}$  - *потенциальное (безвихревое)*.  
 Применяя обозначение " $\neq 0$ " здесь и ниже будем понимать это так, что  
 производная поля  $\vec{\mathbf{M}}$  не равна нулю хотя бы в некоторых областях или точках  
 пространства.

Если  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$ ,  $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ , то поле  $\vec{\mathbf{M}}$  - *соленоидальное (чисто  
 вихревое)*.

При  $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$ ,  $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \neq 0$  поле  $\vec{\mathbf{M}}$  обычно называют *вихревым*, а при  
 $\text{rot } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$ ,  $\text{div } \vec{\mathbf{M}} \equiv 0$  - *лапласовым*.

В соответствии с *теоремой разложения Гельмгольца* [12, с. 173- 174] при  
 выполнении некоторых "не обременительных" условий любое векторное поле  
 $\vec{\mathbf{M}}(a)$  может быть представлено в виде суммы:  $\vec{\mathbf{M}}(a) = \vec{\mathbf{M}}_1(a) + \vec{\mathbf{M}}_2(a)$ , где  
 $\text{rot } \vec{\mathbf{M}}_1 \equiv 0$ ,  $\text{div } \vec{\mathbf{M}}_2 \equiv 0$ . То есть *поле  $\vec{\mathbf{M}}(a)$  можно выразить, как сумму  
 безвихревого и соленоидального полей*.

#### 7). *Вторые производные* скалярного и векторного полей.

Итак, первые пространственные производные скалярного поля  $T(a)$  и  
 векторного поля  $\vec{\mathbf{M}}(a)$  это: векторное поле.  $\text{grad } T(a)$ , скалярное поле

$\operatorname{div} \vec{M}(a)$ , векторное поле  $\operatorname{rot} \vec{M}(a)$ . Понятно эти поля тоже имеют пространственные производные.

У скалярного поля  $T$  это- две следующие производные. Во- первых,  $\operatorname{div} \operatorname{grad} T = (\nabla \nabla T) = \nabla^2 T = \Delta T$ , где  $\nabla^2 = \Delta$  - оператор Лапласа. В декартовых координатах оператор  $\nabla^2$  и производную  $\nabla^2 T$  (лапласиан поля  $T$ ) определяют равенства:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (1.10)$$

Во- вторых, ещё одна вторая производная скалярного поля  $T$  тождественно равна нулю:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} T = [\nabla \nabla T] \equiv 0. \quad (1.10, a)$$

Вторые производные поля  $\vec{M}$  это:  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{M}$ ,  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{M}$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M}$ ,  $\nabla^2 \vec{M}$ . Последнюю из этих производных можно, например, определить равенством:

$$\nabla^2 \vec{M} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{M} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{M}. \quad (1.11)$$

Лапласианы декартовых компонент  $M_x, M_y, M_z$  ( $\nabla^2 M_x, \dots$ ) определяют выражения, аналогичные равенству (1.10) для лапласиана  $T$ . Одна из вторых производных поля  $\vec{M}$  тождественно равна нулю:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{M} = (\nabla[\vec{M}]) \equiv 0. \quad (1.11, a)$$

### 8). *Формулы Стокса и Гаусса- Остроградского.*

Эти формулы нам потребуются для перехода от одних форм уравнений поля к другим формам их записи, а также и для некоторых других целей. Вывод этих формул (теорем) имеется в [1], стр. 20- 21, 23- 24.

По формуле Стокса, иллюстрацией к которой может служить рис. 1.7,б,

$$\oint_{l[S]} (\vec{M} \, d\vec{l}) = \int_S (\operatorname{rot} \vec{M} \, d\vec{S}). \quad (1.12)$$

Согласно (1.12), циркуляция поля  $\vec{M}$  по линии  $l[S]$ , ограничивающей поверхность  $S$ , равна потоку вектора  $\operatorname{rot} \vec{M}$  через поверхность  $S$ . В (1.12) направление обхода по линии  $l[S]$  образует правовинтовую систему с направлением нормали  $n$  к поверхности  $S$ . Чтобы формула (1.12) имела смысл, поле  $\vec{M}$  на поверхности  $S$  должно быть ограниченным и дифференцируемым (производная  $\operatorname{rot} \vec{M}$  имеет смысл).

В соответствии с формулой Гаусса - Остроградского

$$\oint_{S[V]} (\vec{M} \, d\vec{S}) = \int_V \operatorname{div} \vec{M} \, dV, \quad (1.13)$$

см. рис. 1.8,а. Согласно (1.13), поток вектора  $\vec{M}$  через границу  $S[V]$  области пространства  $V$  равен интегралу по области  $V$  от  $\operatorname{div} \vec{M}$ . Нормали  $n$  к  $S[V]$  (и векторы  $d\vec{S}$  на  $S[V]$ ) направлены наружу относительно области  $V$ . В области

$V$  поле  $\vec{M}$ - ограничено и дифференцируемо (производная  $\text{div} \vec{M}$  имеет смысл).

## 2. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Статическое поле- постоянное поле, источники которого неподвижны. В данном случае, употребляя термин "в вакууме", будем подразумевать отсутствие среды- таких тел (объектов), которые оказывают влияние на поле, а сами по себе (в отсутствие поля) эти тела могут поля не создавать.

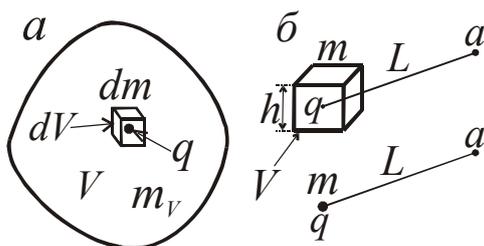
В этой теме будем рассматривать общие закономерности, присущие трём различным по физической природе полям. Это- гравитационное поле с напряжённостью  $\vec{G}$ , создаваемое массами; электростатическое поле с напряжённостью  $\vec{E}$  (в отсутствие проводников и диэлектриков), которое создают неподвижные электрические заряды; магнитостатическое поле с напряжённостью  $\vec{H}$  (в отсутствие магнетиков), которое создают неподвижные магнитные полюса (физически фиктивные "магнитные массы"). Источники всех этих полей будем условно называть "массы" (или заряды).

### 2.1. Массы

При рассмотрении масс и их поля будем применять "макроскопический" подход, отвлекаясь от атомарно- молекулярного строения вещества. При этом физически реальной массой будет "сплошная", объёмная масса с конечной объёмной плотностью  $\delta$ .

Пусть элементарный объём  $dV$  с центром в точке  $q$  расположен в области пространства  $V$ , а  $dm$ - масса в объёме  $dV$  (рис. 2.1,а). Объёмную плотность  $\delta$  массы  $dm$  в  $dV$  и элементарную объёмную массу  $dm$  определяют выражения:

$$\delta = dm / dV, \quad dm = \delta dV. \quad (2.1)$$



**Рис. 2.1.** Объёмная масса (а); к определению понятия "точечная масса" (б).

Скалярное поле  $\delta = \delta(q)$  характеризует распределение массы в области пространства  $V$ .

Заметим, что в общем случае, если, например,  $\delta$  - плотность электрических зарядов, то  $\delta = \delta^+ + \delta^-$ , где  $\delta^+$  и  $\delta^-$  - плотности положительных и отрицательных зарядов. При  $\delta^- = -\delta^+$  имеем  $\delta = 0$ , то есть элементарный объём  $dV$ - электрически нейтрален.

Массу  $m_V$  в области пространства  $V$  определяет сумма  $dm$ :

$$m_V = \int_V dm = \int_V \delta dV. \quad (2.1, a)$$

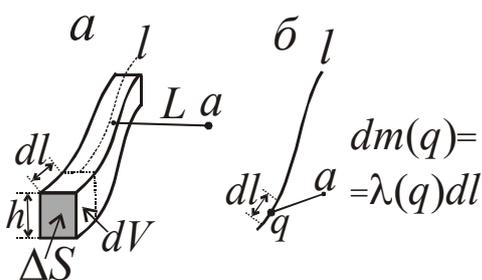
Если в области  $V$  - однородная масса (однородное поле  $\delta(q)$  в области  $V$ ), то при интегрировании по области  $V$  можем вынести постоянный множитель  $\delta$

из под интеграла. В этом случае  $m_V = \int_V \delta dV = \delta \int_V dV = \delta \cdot V$ , где  $V$  объём этой области.

Кроме физически реальных объёмных масс с конечной объёмной плотностью  $\delta$ , иногда можно (и удобно) рассматривать *необъёмные* массы-точечные, линейные, поверхностные, имеющие бесконечно большую величину  $\delta$ .

1). **Точечная масса.** Пусть объёмная масса  $m$  с "центром тяжести" в точке  $q$  имеет (максимальный) линейный размер  $h$ , а точка наблюдения  $a$  находится на расстоянии  $L=L_{qa}$  от расположенной внутри массы  $m$  точки  $q$  (рис. 2.1,б). Экспериментальные и расчётные результаты показывают, что при  $L \gg h$  поле, создаваемое в точке  $a$  массой  $m$ , практически не зависит от формы и размеров массы  $m$ , распределения плотности  $\delta$  в этой массе. Это поле будут определять положение в пространстве точки  $q$  и величина массы  $m$ . Тогда (например, при расчётах поля этой массы) будет проще абстрагироваться от тех характеристик массы, которые (при  $L \gg h$ ) не оказывают существенного влияния на поле в точке  $a$  и ввести понятие "точечная масса". Для этого примем допущение, что при неизменной величине  $m$  её линейные размеры  $h \rightarrow 0$ , и, соответственно, объёмная плотность  $\delta \rightarrow \infty$  как  $(1/h^3)$ . Тогда, вместо объёмной массы  $m$ , в точке  $q$  будет расположена точечная масса  $m$ , конечная по величине, но имеющая бесконечно малые размеры (рис. 2.1,б).

2). **Линейная масса.** Пусть объёмная масса  $m_V$  имеет большую протяжённость вдоль линии  $l$  по сравнению с линейными размерами  $h$  её



**Рис. 2.2.** Объёмная масса с относительно большой протяжённостью ("вытянутостью") вдоль линии  $l$  (а); линейная масса (б).

поперечного сечения  $\Delta S$  (рис. 2.2,а). Массу  $dm$  в объёме  $dV = \Delta S \cdot dl$  определяет выражение  $dm = \delta \cdot dV = \delta \cdot \Delta S \cdot dl$ , где  $\delta$  - средняя объёмная плотность в  $dV$ . Для такой массы удобно воспользоваться понятием "линейная плотность"  $\lambda = \delta \cdot \Delta S = dm/dl$ , а масса  $dm = \lambda \cdot dl$ .

Кратчайшее расстояние от этой массы до точки наблюдения  $a$  обозначим  $L$ . Расчёты показывают, что при  $L \gg h$  поле, создаваемое в точке  $a$  такой массой, не зависит от формы и размеров сечения  $\Delta S$ , некоторых других характеристик такой массы. Практически это поле определяют лишь положение в пространстве линии  $l$  и распределение по  $l$  линейной плотности  $\lambda$ . Поэтому (при  $L \gg h$ ), отвлекаясь от не существенных деталей, можем заменить поле объёмной массы с большой протяжённостью вдоль линии  $l$  линейной массой на линии  $l$  (рис. 2.2,б). Для этого, не меняя

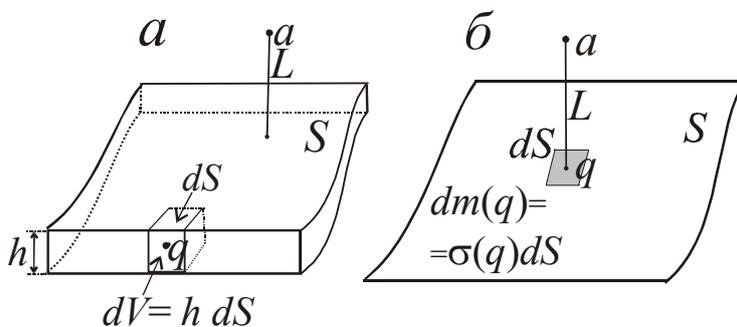
положения  $l$  и распределения  $\lambda$  на  $l$ , перейдем к пределам:  $h \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow \infty$  как  $(1/h^2)$ . Элемент  $dm$  линейной массы на отрезке  $dl$ :  $dm = \lambda \cdot dl$ .

3). **Поверхностная масса** (в виде простого слоя). Рассмотрим случай, когда объемная масса (или заряд) представляет собой слой, один из линейных размеров которого - толщина слоя  $h$  - много меньше двух других размеров, а  $S$ - проходящая внутри слоя (по его "простирацию") поверхность (рис. 2.3,а).

Масса показанного на этом рисунке элемента объема  $dV$  с центром в точке  $q$ :  $dm = \delta \cdot dV = \delta \cdot h \cdot dS = \sigma \cdot dS$ , где  $\delta$ - средняя объемная плотность в  $dV$ , а  $\sigma = \delta \cdot h = (dm/dS)$ - поверхностная плотность массы. Для однородной массы в виде плоскопараллельного слоя  $\sigma$  численно равна массе прямого цилиндра или прямоугольного параллелепипеда с основаниями единичной площади ( $1 \text{ м}^2$ ) на границах слоя.

Если (кратчайшее) расстояние от слоя до точки  $a$   $L \gg h$ , то поле,

создаваемое в точке  $a$  такой массой, зависит практически только от положения в пространстве поверхности  $S$  и распределения на  $S$  поверхностной плотности  $\sigma$ . При этих условиях можем заменить такую объемную массу (в виде тонкого слоя) поверхностной массой с поверхностной



**Рис. 2.3.** Объемная масса с относительно большой протяженностью (относительно  $h$ ) вдоль поверхности  $S$  (а); поверхностная масса (в виде простого слоя) (б).

плотностью  $\sigma$  (рис. 2.3,б). При этом элементарную массу  $dm$  на площадке  $dS$  определяет выражение:  $dm = \sigma \cdot dS$ . Поверхностную массу с поверхностной плотностью  $\sigma$  называют "простой слой".

Итак, элементарные объемные, линейные и поверхностные (элемента простого слоя) массы  $dm$  определяют выражения:

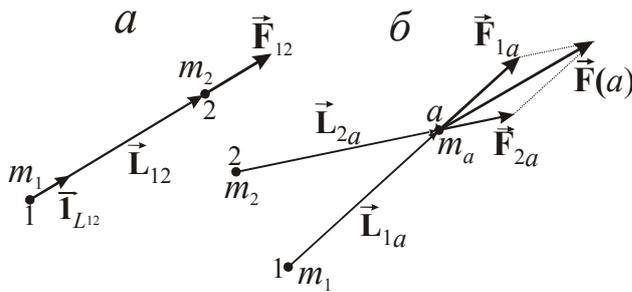
$$dm = \delta dV, \quad dm = \lambda dl, \quad dm = \sigma dS. \quad (2.2)$$

## 2.2. Поле кулоновых сил

Массы, одинаковые по физической природе, взаимодействуют по закону Кулона-Ньютона. Если  $m_1$ ,  $m_2$ - точечные массы (либо точечные электрические заряды, точечные магнитные полюса) то сила действия массы  $m_1$  на массу  $m_2$ :

$$\vec{F}_{12} = \vec{1}_{L_{12}} v \frac{m_1 \cdot m_2}{L_{12}^2} = v \frac{m_1 \cdot m_2}{L_{12}^3} \vec{L}_{12}, \quad (2.3)$$

где единичный вектор  $\vec{1}_{L_{12}} = \vec{L}_{12}/L_{12}$ , а  $v$ - константа, зависящая от физической природы масс (а также системы физических единиц), рис. 2.4,а.



**Рис. 2.4.** К закону Кулона-Ньютона для точечных масс (а) и принципу суперпозиции (б).

Если  $m_1, m_2$ - гравитационные массы, то в СИ  $\nu = -\gamma$ , где  $\gamma \approx 6,67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  - гравитационная постоянная. Если  $m_1, m_2$ - электрические заряды, то  $\nu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , где  $\epsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$  - электрическая постоянная.

Понятие "магнитная масса"- физически фиктивное и в международной системе физических единиц (СИ) не определено. Но, если определить это понятие так, как это сделано в учебнике [1], то для точечных магнитных масс в (2.3) множитель  $\nu = \frac{\mu_0}{4\pi}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  - магнитная постоянная.

Отметим, что для гравитационных масс в (2.3) множитель  $\nu < 0$ , а для электрических зарядов, либо магнитных масс (полюсов)  $\nu < 0$ . Это связано с тем, что гравитационные массы притягиваются, а электрические заряды, одинаковые по знаку, (либо одноимённые магнитные полюса) отталкиваются. Направление силы  $\vec{F}_{12}$  на рис. 2.4,а показано для случая, когда произведение  $\nu \cdot m_1 \cdot m_2 > 0$ . Закон Кулона-Ньютона (2.3) справедлив для точечных масс  $m_1, m_2$ , для элементарных масс (с заменой  $m_1, m_2$  на  $dm_1, dm_2$  и  $\vec{F}_{12}$  на  $d\vec{F}_{12}$ ), а также для физически реальных объёмных масс  $m_1, m_2$ , если расстояние между этими массами- много больше их размеров.

Можем перейти от (2.3) к более общей записи закона Кулона-Ньютона на основе принципа суперпозиции. Пусть на массу  $m_a$ , находящуюся в точке  $a$ , действуют силы  $\vec{F}_{1a}, \vec{F}_{2a}$ , обусловленные наличием масс  $m_1, m_2$  (рис. 2.4,б). Тогда сила  $\vec{F}(a)$ , действующая на  $m_a$ , равна сумме сил  $\vec{F}_{1a}$  и  $\vec{F}_{2a}$ . В соответствии с (2.3)  $\vec{F}(a) = \vec{F}_{1a} + \vec{F}_{2a} = \nu \frac{m_1 \cdot m_a}{L_{1a}^3} \vec{L}_{1a} + \nu \frac{m_2 \cdot m_a}{L_{2a}^3} \vec{L}_{2a}$  или  $\vec{F}(a) = \nu m_a \vec{f}(a)$ , где  $\vec{f}(a) = \frac{m_1}{L_{1a}^3} \vec{L}_{1a} + \frac{m_2}{L_{2a}^3} \vec{L}_{2a}$  - поле  $\vec{f}$  масс  $m_1, m_2$  в точке  $a$ .

Присутствие такого поля мы обнаружим по его силовому действию на ("пробную" точечную) массу  $m_a$ , если поместим её в точку  $a$ .

Пусть теперь множество различных масс (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) оказывает силовое действие на точечную массу

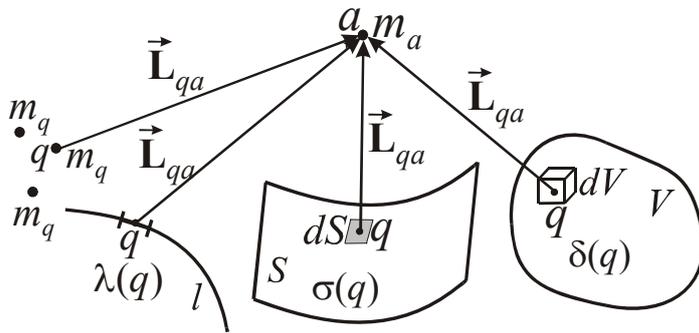
Пусть теперь множество различных масс (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) оказывает силовое действие на точечную массу

Пусть теперь множество различных масс (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) оказывает силовое действие на точечную массу

Пусть теперь множество различных масс (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) оказывает силовое действие на точечную массу

Пусть теперь множество различных масс (точечных, линейных, поверхностных, объёмных) оказывает силовое действие на точечную массу

$m_a$  (рис. 2.5). Согласно (2.3), каждая точечная масса  $m_q$  будет действовать на массу  $m_a$  с силой  $\vec{F}_{qa} = \nu \frac{m_q \cdot m_a}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa}$ .



**Рис. 2.5.** К определению поля  $\vec{f}(a)$ , создаваемого точечными, линейными, поверхностными и объёмными массами.

Остальные массы можем представить множеством элементарных масс  $dm_q$  с центрами в точках  $q$ . Массы  $dm_q$  определяют выражения (2.2):

$$dm_q = \delta dV, \quad \sigma dS, \quad \lambda dl.$$

Каждая элементарная масса  $dm_q$  действует на массу  $m_a$  с силой

$$d\vec{F}_{qa} = \nu \frac{dm_q \cdot m_a}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa}.$$

Суммируя все силы  $\vec{F}_{qa}$  и  $d\vec{F}_{qa}$ , получаем выражение для силы, действующей на  $m_a$ :  $\vec{F}(a) = \nu m_a \vec{f}(a)$ , где поле

$$\vec{f}(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa} + \int_V \frac{\delta(q) \vec{L}_{qa} dV}{L_{qa}^3} + \int_S \frac{\sigma(q) \vec{L}_{qa} dS}{L_{qa}^3} + \int_l \frac{\lambda(q) \vec{L}_{qa} dl}{L_{qa}^3}. \quad (2.4)$$

В частности, поле  $\vec{f}(a)$  одной точечной массы  $m_q$  определяет выражение:  $\vec{f}(a) = \frac{m_q}{L_{qa}^3} \vec{L}_{qa}$ . Скалярная компонента  $f_k(a)$  такого поля по

направлению (линии)  $k$   $f_k(a) = f(a) \cdot \cos(\vec{f}, \vec{1}_k) = \frac{|m_q|}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{f}, \vec{1}_k)$ , где  $\vec{1}_k$  -

единичный вектор в точке  $a$ , касательный к линии  $k$ . Примем во внимание, что при  $m_q > 0$   $\vec{f}(a) \parallel \vec{L}_{qa}$ , а при  $m_q < 0$   $\vec{f}(a) \updownarrow \vec{L}_{qa}$ . Следовательно,

$\cos(\vec{f}, \vec{1}_k) = \frac{m_q}{|m_q|} \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_k)$  и  $f_k(a) = \frac{m_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_k)$ . Аналогично для

компоненты  $df_k(a)$  поля  $d\vec{f}(a)$  элементарной массы

$dm_q = \delta(q) dV, \quad \sigma(q) dS, \quad \lambda(q) dl$  получаем:  $df_k(a) = \frac{dm_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{1}_k)$ .

Отсюда следует, что в соответствии с (2.4) скалярную компоненту  $f_k(a)$  поля  $\vec{f}(a)$ , создаваемого совокупностью различных масс, определяет выражение:

$$f_k(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_k) + \int_V \frac{\delta(q)}{L_{qa}^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_k) dV + \\ + \int_S \frac{\sigma(q)}{L_{qa}^2} \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_k) dS + \int_l \frac{\lambda(q)}{L_{qa}^3} \cos(\vec{\mathbf{L}}_{qa}, \vec{\mathbf{I}}_k) dl. \quad (2.4, a)$$

В (2.4), (2.4,a) интегрирование проводится по тем областям пространства  $V$ , поверхностям  $S$ , линиям  $l$ , где имеются соответственно объёмные ( $\delta$ ), поверхностные ( $\sigma$ ), линейные ( $\lambda$ ) массы. Понятно что при суммировании и интегрировании в (2.4), (2.4,a) положение точки  $a$  не меняется.

Напряжённости гравитационного поля  $\vec{\mathbf{G}}$  и электрического поля  $\vec{\mathbf{E}}$  в точке  $a$  равны силе  $\vec{\mathbf{F}}(a)$ , делённой на массу (заряд)  $m_a$ . То есть напряжённости этих полей численно равны силе, которая действовала бы на единичную точечную массу (единичный положительный точечный заряд), если её (его) "поместить" в точку  $a$ . Из пояснений, приведенных после выражения (2.3), следует, что  $\vec{\mathbf{G}}(a) = v\vec{\mathbf{f}}(a) = -\gamma\vec{\mathbf{f}}(a)$ , а  $\vec{\mathbf{E}}(a) = v\vec{\mathbf{f}}(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\mathbf{f}}(a)$ . При учёте того, что силовой характеристикой

магнитного поля является не напряжённость  $\vec{\mathbf{H}}$ , а вектор магнитной индукции  $\vec{\mathbf{B}}$ , а, в отсутствии магнетиков,  $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{H}}$ , получаем следующие равенства для полей  $\vec{\mathbf{H}}$  и  $\vec{\mathbf{f}}$ :  $\mu_0\vec{\mathbf{H}}(a) = v\vec{\mathbf{f}}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\mathbf{f}}(a)$ . То есть

$\vec{\mathbf{H}}(a) = \frac{1}{4\pi}\vec{\mathbf{f}}(a)$ . Далее в этой теме будем рассматривать поле  $\vec{\mathbf{f}}(a)$ , условно называя его "статическим полем в вакууме". Для перехода от поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  к полям  $\vec{\mathbf{G}}(a)$ ,  $\vec{\mathbf{E}}(a)$ ,  $\vec{\mathbf{H}}(a)$  следует воспользоваться равенствами:

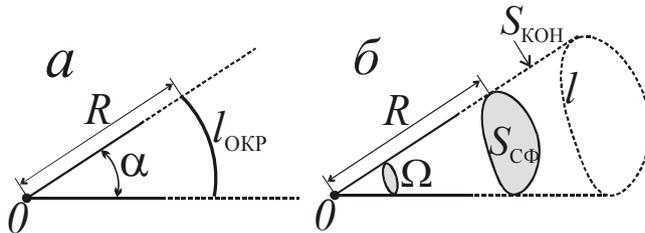
$$\vec{\mathbf{G}} = -\gamma\vec{\mathbf{f}}, \quad \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{\mathbf{f}}, \quad \vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi}\vec{\mathbf{f}}. \quad (2.4, б)$$

### 2.3. Телесный угол. Угол видимости

Вспомним сначала определение (образуемого двумя выходящими из точки  $0$  лучами) плоского угла  $\alpha$  в радианах (рис.2.6,a). Если  $l_{\text{ОКР}}$  - длина ограниченной этими лучами дуги окружности с радиусом  $R$  и с центром в точке  $0$ , то центральный угол  $\alpha = l_{\text{ОКР}}/R$ , рад. Пределы изменения такого угла:  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Отношение  $\alpha/2\pi$  определяет то, какая часть плоскости ограничена ("вырезана") этими лучами.

Определим теперь понятие "телесный угол  $\Omega$ ". Представим себе коническую поверхность  $S_{\text{кон}}$  с вершиной в точке  $0$  и направляющей в виде замкнутой линии  $l$  (рис.2.6,б). Такая поверхность  $S_{\text{кон}}$  содержит все точки лучей с вершиной в точке  $0$  и пересекающихся с линией  $l$ . Показанная на

рис.2.6,б серым цветом  $S_{\text{СФ}}$ - это ограниченная поверхностью  $S_{\text{КОН}}$  часть сферической поверхности с центром в точке  $O$  и с радиусом  $R$ . Телесный угол при вершине  $O$  конической поверхности  $\Omega = S_{\text{СФ}}/R^2$ .



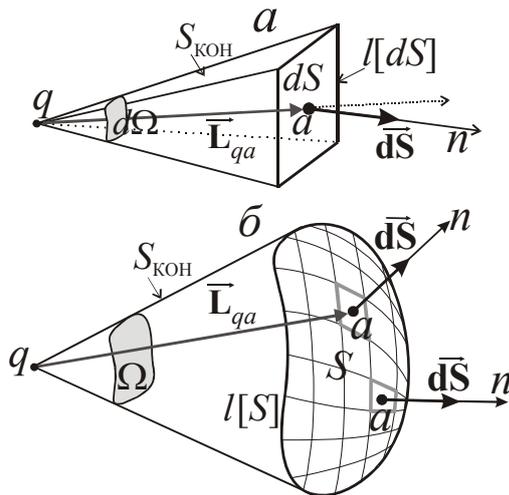
**Рис. 2.6.** Плоский угол  $\alpha$  (а) и телесный угол  $\Omega$  (б).

Безразмерные единицы, в которых определяют углы  $\Omega$ , называют стерадиан (ср). Пределы изменения этого угла:  $0 \leq \Omega \leq 4\pi$ .

Отношение  $\Omega/4\pi$  определяет то, какая часть пространства ограничена поверхностью  $S_{\text{КОН}}$ .

Для полного телесного угла, "ограничивающего" всё пространство,  $S_{\text{СФ}} = 4\pi R^2$ ,  $\Omega = 4\pi$ ,  $\Omega/4\pi = 1$ . Поэтому иногда говорят "4-х пийное" пространство. Если поверхность  $S_{\text{КОН}}$  станет плоскостью, то она будет ограничивать половину пространства (полупространство). В этом случае  $S_{\text{СФ}} = 2\pi R^2$ ,  $\Omega = 2\pi$ ,  $\Omega/4\pi = 0.5$ . Отсюда- термин "2-х пийное"

полупространство.



**Рис. 2.7.** К определению угла видимости  $d\omega$  ориентированной площадки  $dS$  (а) и угла видимости  $\omega$  поверхности  $S$  (б).

Угол видимости  $d\omega(q)$  ориентированной элементарной площадки  $dS$  с центром в точке  $a$  из точки  $q$  определяет выражение:

$$d\omega(q) = \frac{dS}{L_{qa}^2} \cos(\vec{L}_{qa}, n),$$

где  $n$ - нормаль к площадке  $dS$ . Из определения  $d\omega(q)$  следует, что при нулевом или остром (как это показано на рис. 2.7,а) угле между направлениями  $\vec{L}_{qa}, n$  величина  $d\omega > 0$ .

Если этот угол- тупой или равен  $\pi$ , то  $d\omega < 0$ , а если он прямой, то  $d\omega = 0$ . Пользуясь, как и раньше, понятием вектора  $d\vec{S}$  с абсолютной величиной  $dS$  и направлением по нормали  $n$ , можем записать выражение для угла видимости

$$d\omega(q) \text{ в виде: } d\omega(q) = \frac{(\vec{L}_{qa} \cdot d\vec{S})}{L_{qa}^3}.$$

На рис. 2.7,а схематично показан бесконечно малый телесный угол  $d\Omega$  при вершине конической поверхности  $S_{\text{КОН}}$  с вершиной в точке  $q$  и направляющей  $l[dS]$ - замкнутой линией, ограничивающей площадку  $dS$ . Можно доказать, что абсолютная величина  $|d\omega(q)| = d\Omega$ . Действительно,

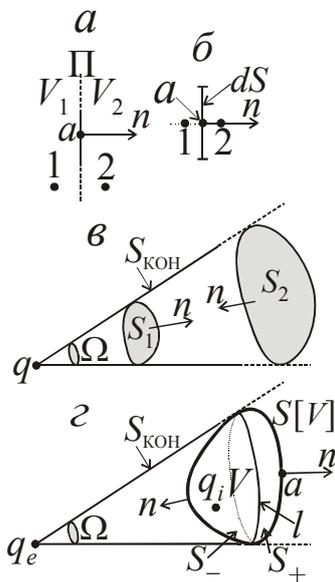
$|d\omega(q)| = \frac{dS}{L_{qa}^2} |\cos(\vec{L}_{qa}, n)|$ , но  $dS \cdot |\cos(\vec{L}_{qa}, n)| = dS_{\text{сф}}$ , где  $dS_{\text{сф}}$ - элемент сферической поверхности с радиусом  $R = L_{qa}$ , ограниченный поверхностью  $S_{\text{кон}}$ . То есть  $|d\omega(q)| = \frac{dS_{\text{сф}}}{R^2} = d\Omega$ .

Угол видимости  $\omega(q)$  из точки  $q$  (ориентированной- с выбранным направлением нормали  $n$ ) поверхности  $S$  это сумма углов видимости  $d\omega(q)$  всех образующих эту поверхность элементарных площадок  $dS$  :

$$\omega(q) = \int_S d\omega(q) = \int_S \frac{(\vec{L}_{qa} \cdot d\vec{S})}{L_{qa}^3}. \quad (2.5)$$

Понятно, что  $\omega(q)$  - скалярная величина (в стерадианах), которая может быть положительной, отрицательной или равной нулю. При показанных на рис. 2.7,б положении точки  $q$  и направлениях нормалей  $n$  к поверхности  $S$  величина  $\omega(q) > 0$ . Можно доказать, что для не замкнутой поверхности  $S$  абсолютная величина  $|\omega(q)|$  равна телесному углу  $\Omega$  при вершине конической поверхности  $S_{\text{кон}}$  с вершиной в точке  $q$  и направляющей  $l[S]$ - замкнутой линией, ограничивающей поверхность  $S$  (рис. 2.7,б).

Какими будут углы видимости  $\omega$  некоторых поверхностей  $S$  с заданными направлениями нормалей  $n$ ? Рассмотрим несколько примеров.



**Рис. 2.8.** К определению углов видимости  $\omega$  в нескольких частных случаях.

**а).**  $S$ - плоскость  $\Pi$ , разграничивающая две области (полупространства)  $V_1$  и  $V_2$ . Будем полагать, что нормаль  $n$  к  $\Pi$  направлена в сторону области  $V_2$  (рис. 2.8,а). Определим углы видимости  $\omega(1)$ ,  $\omega(2)$  плоскости  $\Pi$  из точек 1, 2, расположенных соответственно в полупространствах  $V_1$ ,  $V_2$ . Если эти точки-вершины конических поверхностей с направляющими в виде бесконечно удалённой "границы" плоскости  $\Pi$ , то фактически эти конические поверхности будут параллельными  $\Pi$  плоскостями и телесные углы при вершинах 1, 2:  $\Omega_{1,2} = 2\pi$ . Иначе говоря, плоскость  $\Pi$  "закроет от наблюдателя" в точке 1 или в точке 2 полупространство. В связи со сказанным выше это означает, что абсолютные величины  $|\omega(1,2)| = 2\pi$ . Но, если  $a$ - произвольная точка на плоскости  $\Pi$ , то при выбранном направлении  $n$   $\cos(\vec{L}_{1a}, n) > 0$ ,  $\cos(\vec{L}_{2a}, n) < 0$ . Поэтому, в соответствии с (2.5),

$\omega(1) > 0$ ,  $\omega(2) < 0$ , следовательно углы видимости плоскости  $\Pi$  из точек 1, 2:  $\omega(1) = 2\pi$ ,  $\omega(2) = -2\pi$ .

б).  $S$ - лежащая на плоскости  $\Pi$  бесконечно малая площадка  $dS$  с центром  $a$  и с нормалью  $n$ . Определим углы видимости  $\omega(1)$ ,  $\omega(2)$  площадки  $dS$  из (расположенных по разные стороны от  $\Pi$ ) точек 1, 2 при условии, что расстояния  $L_{1a} \rightarrow 0$ ,  $L_{2a} \rightarrow 0$  (рис. 2.8,б). При указанных условиях, как и в предыдущем примере, площадка  $dS$  "закроет от наблюдателя" в точке 1 или в точке 2 полупространство. Следовательно, при  $L_{1a} \rightarrow 0$ ,  $L_{2a} \rightarrow 0$  абсолютные величины  $|\omega(1,2)| \rightarrow 2\pi$ . Так как (при показанном на рис. 2.8,б направлении  $n$ )  $\cos(\vec{L}_{1a}, n) > 0$ ,  $\cos(\vec{L}_{2a}, n) < 0$ , то  $\omega(1) > 0$ ,  $\omega(2) < 0$ . Следовательно,

$$\text{при } L_{1a} \rightarrow 0, L_{2a} \rightarrow 0: \omega(1) \rightarrow 2\pi, \omega(2) \rightarrow -2\pi. \quad (2.6)$$

в).  $S_1, S_2$  - поверхности, границы  $l[S_{1,2}]$  которых лежат на одной и той же конической поверхности с вершиной в точке  $q$  и с телесным углом  $\Omega$  при вершине  $q$  (рис. 2.8,в). В соответствии с изложенным выше абсолютные величины углов видимости поверхностей  $S_1, S_2$  из точки  $q$  - одинаковы и равны  $\Omega$ . Но при показанных на рис. 2.8,в направлениях нормалей  $n$  угол видимости поверхности  $S_1$  из точки  $q$   $\omega_1(q) > 0$ , а для поверхности  $S_2$   $\omega_2(q) < 0$ . Тогда  $\omega_1(q) = \Omega$ , а  $\omega_2(q) = -\Omega$ .

г).  $S[V]$  - замкнутая поверхность, ограничивающая область пространства  $V$ . Определим углы видимости  $\omega$  поверхности  $S[V]$  их 2-х точек:  $\omega(q_i)$  из точки  $q_i$ , находящейся в области  $V$ ;  $\omega(q_e)$  из точки  $q_e$ , находящейся вне области  $V$  (рис. 2.8,г). Поверхность  $S[V]$  "закроет от наблюдателя" в точке  $q_i$  всё (4-х "пийное") пространство. Следовательно, абсолютная величина  $|\omega(q_i)| = 4\pi$ . При направлениях нормалей  $n$  к  $S[V]$  наружу относительно  $V$  углы между направлениями векторов  $\vec{L}_{q_i a}$  и направлениями  $n$  - острые и, в соответствии с (2.5),  $\omega(q_i) > 0$ . Тогда  $\omega(q_i) = 4\pi$ . Теперь представим себе коническую поверхность  $S_{\text{кон}}$  с вершиной в точке  $q_i$ , телесным углом  $\Omega$  при вершине и направляющей в виде замкнутой линии  $l$ , лежащей на поверхности  $S[V]$  (рис. 2.8,г). Образующие линию  $l$  точки - это точки, общие для поверхностей  $S[V]$  и  $S_{\text{кон}}$ . Линия  $l$  делит поверхность  $S[V]$  на две части:  $S_+$  и  $S_-$  (см. рис. 2.8,г). В соответствии с рассмотренным выше примером углы видимости поверхностей  $S_+$  и  $S_-$  из точки  $q_e$ :  $\omega_+(q_e) = \Omega$ ,  $\omega_-(q_e) = -\Omega$ . Так как угол видимости поверхности  $S[V]$   $\omega(q_e) = \omega_+(q_e) + \omega_-(q_e)$ , то  $\omega(q_e) = \Omega - \Omega = 0$ . Итак, угол видимости замкнутой поверхности  $S[V]$  из точки  $q$ :

$$\omega(q) = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } q \text{ - в области } V, \\ 0, & \text{если } q \text{ - вне области } V. \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.4. Уравнения статического поля $\vec{f}$

Система уравнений некоторого векторного поля  $\vec{M}$  может быть представлена в дифференциальной, интегральной, а также в поверхностной форме. Система уравнений поля  $\vec{M}$  в дифференциальной форме определяет



$$\Psi_f = \oint_{S[V]} (\vec{f} \, d\vec{S}) = 4\pi \cdot m_V. \quad (2.8)$$

Согласно (2.8), поток  $\Psi_f$  поля  $\vec{f}$  через  $S[V]$  пропорционален сумме масс, находящихся в области  $V$ . Фактически (2.8) - это следствие закона Кулона-Ньютона, на основе которого было получено выражение (2.4) для поля  $\vec{f}$ . Заметим, что, например, для источников электростатического поля  $m_V$  - это алгебраическая сумма зарядов разного знака.

Из уравнения Гаусса (2.8) следует, что, если на рис. 1.8 заменить векторные линии  $l_M$  некоторого поля  $\vec{M}$  векторными линиями  $l_f$  рассматриваемого здесь статического поля  $\vec{f}$ , то особенностям "геометрии" поля  $\vec{f}$  на рис. 1.8, б, в, г отвечают случаи, когда, соответственно,  $m_V > 0$ ,  $m_V < 0$ ,  $m_V = 0$ .

Получим дифференциальную форму уравнения (2.8). Если в области  $V$  - только объёмные массы  $m_V$  с конечной объёмной плотностью  $\delta$ , то, согласно (2.1,а),  $m_V = \int_V \delta \, dV$ . Подставляя это выражение в правую часть (2.8), получаем:  $\oint_{S[V]} (\vec{f} \, d\vec{S}) = 4\pi \int_V \delta \, dV$ . Преобразуем левую часть этого равенства, пользуясь формулой Гаусса - Остроградского (1.13). Получаем равенство интегралов по (одной и той же) области  $V$ :  $\int_V \operatorname{div} \vec{f} \, dV = \int_V 4\pi \delta \, dV$ . Так как область  $V$  - произвольная, то из равенства таких интегралов следует равенство подынтегральных функций:

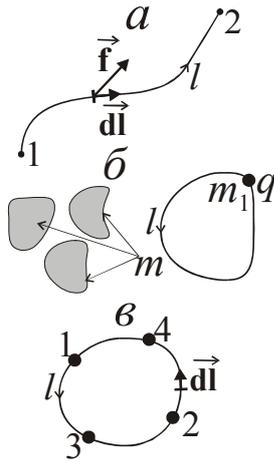
$$\operatorname{div} \vec{f} = 4\pi \delta. \quad (2.9)$$

То есть  $\operatorname{div} \vec{f}$  пропорциональна плотности  $\delta$ . В соответствии с изложенным в разделе (1.3) в тех точках, в окрестности которых,  $\operatorname{div} \vec{f} \neq 0$  ( $\operatorname{div} \vec{f} > 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{f} < 0$ ) находятся источники (истоки, стоки) поля  $\vec{f}$ . В тех областях пространства, где  $\delta > 0$ , начинаются векторные линии  $l_f$  поля  $\vec{f}$ , а там, где  $\delta < 0$ , линии  $l_f$  оканчиваются.

Другое уравнение статического поля  $\vec{f}$  можем получить на основе закона сохранения энергии. В разделе (1.3) определили понятия "напряжение поля" и "циркуляция".

Напряжение  $\mathcal{E}_{12}$  поля  $\vec{f}$  на пути  $l$  из точки "1" в точку "2" (рис. 2.10,а) определяет криволинейный интеграл:  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{f} \, d\vec{l})$ . Если в этом выражении заменить поле  $\vec{f}$  на силу  $\vec{F}$ , то такой интеграл будет иметь смысл работы, совершаемой силой  $\vec{F}$  на пути  $l$ . Для силовой характеристики  $\vec{f}$  статического поля напряжение  $\mathcal{E}_{12}$  (численно) пропорционально работе, совершаемой

такой силой при перемещении точечной массы  $m$  по линии  $l$ . Циркуляция пропорциональна такой работе, если линия (путь)  $l$  - замкнутая.



**Рис. 2.10.** К определению циркуляции поля  $\vec{f}$ .

Пусть статическое поле  $\vec{f}$ , потенциальная энергия которого не меняется со временем, создают некоторая совокупность масс  $m$ , а также расположенная в точке  $q$  точечная масса  $m_1$  (рис. 2.10,б). Проведем следующий мысленный эксперимент. Переместим массу  $m_1$  вдоль замкнутой линии  $l$ , вернув её в точку  $q$ . При этом будет совершена работа, пропорциональная циркуляции  $C_f = \oint_l (\vec{f} d\vec{l})$ . Но в результате перемещения  $m_1$  и возвращения её в точку  $q$  положение всех источников поля  $\vec{f}$  и потенциальная энергия поля  $\vec{f}$  не изменятся. Следовательно совершённая работа и пропорциональная ей циркуляция  $C_f$  равны нулю. Итак, для статического

поля  $\vec{f}$  циркуляция по любой линии  $l$ :

$$\oint_l (\vec{f} d\vec{l}) = 0. \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, в частности, что напряжение статического поля  $\vec{f}$  на пути между двумя точками (на соединяющей эти точки линии) не зависит от формы этой линии, а (при заданном поле  $\vec{f}$ ) полностью определяется положением этих точек. Действительно, запишем равенство (2.10) для показанной на рис. 2.10,в замкнутой линии  $l$ :  $0 = \oint_l (\vec{f} d\vec{l}) = \varepsilon_{13241} = \varepsilon_{132} + \varepsilon_{241} = \varepsilon_{132} - \varepsilon_{142}$ , так как  $\varepsilon_{241} = -\varepsilon_{142}$ . То есть  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{142}$  и напряжение  $\varepsilon_{12}$  зависит только от положения точек "1" и "2".

Для того, чтобы получить дифференциальную форму уравнения (2.10), применим к полю  $\vec{f}$  формулу Стокса (1.12):  $\oint_{[S]} (\vec{f} d\vec{l}) = \int_S (\text{rot } \vec{f} d\vec{S})$ . Но, согласно (2.10), левая часть этого равенства равна нулю, следовательно и  $\int_S (\text{rot } \vec{f} d\vec{S}) = 0$ . Это означает, что поток вектора  $\text{rot } \vec{f}$  через любую поверхность  $S$  равен нулю, что возможно лишь в том случае, если

$$\text{rot } \vec{f} = 0. \quad (2.11)$$

Получили уравнения поля  $\vec{f}$ . Условно назовём (2.10), (2.11) I-ым, а (2.8), (2.9) II-ым уравнением поля  $\vec{f}$ . Итак, системы уравнений поля  $\vec{f}$  в интегральной и дифференциальной формах:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \oint_l (\vec{f} \, d\vec{l}) = 0, \\ \text{II. } \oint_{S[V]} (\vec{f} \, d\vec{S}) = 4\pi \cdot m_V; \end{array} \right\} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{f} = 0, \\ \text{II. } \operatorname{div} \vec{f} = 4\pi\delta. \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

На основе изложенного в разделе 1.3 можем утверждать, что, согласно уравнению I системы (2.12), у поля  $\vec{f}$  не может быть замкнутых векторных линий  $l_f$ . То, в каких местах начинаются и оканчиваются эти линии, видно из II-го уравнения системы (2.13), о чём уже было сказано выше. Это уравнение определяет связь производной  $\operatorname{div} \vec{f}$  с плотностью  $\delta$  источников поля  $\vec{f}$ .

## 2.5. Потенциал $U$ статического поля $\vec{f}$

Может показаться, что в отличие от II-го уравнения в (2.13), связывающего производную  $\operatorname{div} \vec{f}$  поля  $\vec{f}$  с его источниками, в I-ом уравнении в (2.13) таких связей нет и оно - бесполезно. Но напомним, что по одной из классификаций полей, о которой шла речь в разделе 1.3, поле  $\vec{f}$  - потенциальное, так как производная  $\operatorname{rot} \vec{f}$  всюду равна нулю. Это связано с тем, что равенство нулю ротора векторного поля  $\vec{f}$  это условие, необходимое и достаточное, для того, чтобы такое поле можно было выразить через скалярное поле  $U$ , называемое потенциалом:  $\vec{f} = \pm \operatorname{grad} U$ . Далее, как это принято для электростатического и магнитостатического полей, выберем нижний знак в этом равенстве:

$$\vec{f} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U. \quad (2.14)$$

Показать необходимость уравнения  $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$  для того, чтобы было справедливо равенство (2.14) совсем не сложно. Действительно, если бы мы имели уравнение  $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{X} \neq 0$ , то это противоречило бы последнему уравнению, так как  $\operatorname{rot} \vec{f} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} U \equiv 0$  (см. "Вторые производные скалярного и векторного полей" в разделе 1.3), а  $\vec{X} \neq 0$ . Но можно доказать, что уравнение  $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$  не только необходимо, но и достаточно для (2.14) (см [1], с. 34). Это означает, что при  $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$  мы всегда можем выразить поле  $\vec{f}$  через поле  $U$  в соответствии с (2.14).

Из (2.14) следует, что векторы  $\vec{f}(a)$  направлены в сторону наиболее резкого убывания (падения) потенциала  $U(a)$  в окрестности точки  $a$ . Области пространства  $V$ , поверхности  $S$  и линии  $l$ , во всех точках которых  $U = \text{const}$ , называют эквипотенциальными. Из (2.14) следует, что в эквипотенциальных областях  $V$  поле  $\vec{f} = 0$ , а также то что векторы  $\vec{f}$

ортогональны эквипотенциальным поверхностям  $U=\text{const}$  и ориентированы в направлениях наиболее интенсивного уменьшения поля  $U(a)$ .

Так как скалярная компонента векторного поля  $\text{grad}U$  по направлению  $l$ :  $\text{grad}_l U = \partial U / \partial l$ , то, согласно (2.14), компонента  $f_l = -\partial U / \partial l$ . Если  $l$  - координатная линия, по которой перемещается точка при увеличении координаты  $\xi$ , то  $\partial l = h_\xi \partial \xi$ , где  $h_\xi$  - коэффициент Ламэ для координаты  $\xi$ . Следовательно скалярная компонента поля  $\vec{f}$  по координатной линии  $l$

$$f_l = -\frac{\partial U}{\partial l} = -\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (2.15)$$

Выражения (2.14), (2.15) позволяют однозначно определить поле  $\vec{f}$  или его компоненты при известном поле  $U$ .

А можем ли мы однозначно определить потенциал  $U$  при известном поле  $\vec{f}$ ? Пусть  $U$  - потенциал поля  $\vec{f}$ , то есть  $\vec{f} = -\text{grad}U$ . Но тогда потенциалом поля  $\vec{f}$  будет также скалярное поле  $U+C$ , где  $C=\text{const}$  - произвольное однородное скалярное поле. Действительно,  $-\text{grad}(U+C) = -\text{grad}U - \text{grad}C = -\text{grad}U + 0 = -\text{grad}U = \vec{f}$ .

То есть по заданному полю  $\vec{f}$  потенциал  $U$  может быть определён с точностью до произвольного слагаемого  $C=\text{const}$ . Что требуется для однозначного определения потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  выясним позже.

Покажем, что напряжение  $\mathcal{E}_{12}$  поля  $\vec{f}$  на "пути" из точки "1" в точку "2" по линии  $l$  (рис. 2.10,а) равно разности потенциалов  $U_1 - U_2$  в этих точках. Согласно (2.14), напряжение

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{f} \cdot d\vec{l}) = -\int_1^2 (\text{grad}U \cdot d\vec{l}) = -\int_1^2 \text{grad}_l U dl = -\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial l} dl = -\int_1^2 dU = U_1 - U_2. \quad (2.16)$$

Здесь было принято во внимание, что скалярное произведение  $(\text{grad}U \cdot d\vec{l}) = |\text{grad}U| \cos(\text{grad}U, d\vec{l}) dl = \text{grad}_l U dl$ ,  $\text{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial l}$ , а  $\frac{\partial U}{\partial l} dl = dU$  - полный дифференциал.

Пусть нам известно поле  $\vec{f}$ , а в (2.16) "1" - произвольная точка  $a$ , с искомым потенциалом  $U_a$ , "2" - некоторая фиксированная точка  $\Phi$  с известным потенциалом  $U_\Phi$ . Из (2.16) следует, что  $\mathcal{E}_{a\Phi} = U_a - U_\Phi$  или

$$U_a = \mathcal{E}_{a\Phi} + U_\Phi = \int_a^\Phi (\vec{f} \cdot d\vec{l}) + U_\Phi. \quad (2.17)$$

То есть при известных  $\vec{f}$  и  $U_\Phi$  мы можем определить потенциал  $U_a$ , прибавляя к потенциалу  $U_\Phi$  напряжение  $\mathcal{E}_{a\Phi}$  поля  $\vec{f}$  на пути из точки  $a$  в точку  $\Phi$ . Обычно (но не всегда) можно полагать, что  $\Phi$  - бесконечно

удалённая точка и  $U_\phi = U_\infty = 0$ . В этом случае, как следует из (2.17),

$$U_a = \int_a^\infty (\vec{\mathbf{f}} d\vec{\mathbf{l}}).$$

Получим выражение для потенциала  $U$  поля  $\vec{\mathbf{f}}$ , создаваемого различными массами. На практических занятиях (пользуясь записью поля  $\vec{\mathbf{f}}$  и потенциала  $U$ ) в системе координат на основе (2.14), (2.15) мы доказали, что в точке  $a$  потенциал  $U(a)$  поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  точечной массы  $m_q$  (с точностью до произвольного слагаемого  $C$  - однородного скалярного поля) определяет выражение:

$$U(a) = \frac{m_q}{L_{qa}} + C. \quad (2.18)$$

Если "в бесконечности" (при  $L_{qa} \rightarrow \infty$ ) потенциал  $U(a) \rightarrow 0$ , то  $C=0$  и  $U(a) = m_q / L_{qa}$ .

По аналогии с (2.18) потенциал  $dU(a)$  поля  $d\vec{\mathbf{f}}(a)$  элементарной массы  $dm_q = \delta dV, \sigma dS, \lambda dl$ :  $dU(a) = \frac{dm_q}{L_{qa}}$ . Суммируя потенциалы  $U(a)$ ,  $dU(a)$

полей  $\vec{\mathbf{f}}(a)$ ,  $d\vec{\mathbf{f}}(a)$  всех точечных и элементарных масс (рис. 2.5), аналогично выражению (2.4) для поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  получаем:

$$U(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}} + \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}} + \int_S \frac{\sigma(q)dS}{L_{qa}} + \int_l \frac{\lambda(q)dl}{L_{qa}} + C. \quad (2.19)$$

В частности, потенциал  $U(a)$  поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  физически реальных объёмных масс с объёмной плотностью  $\delta(q)$  при  $C=0$  определяет выражение:

$$U(a) = \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}}. \quad (2.19, a)$$

Получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет потенциал  $U$  поля  $\vec{\mathbf{f}}$  объёмных масс. Согласно уравнению II в системе (2.13), и уравнению (2.14),  $\text{div} \vec{\mathbf{f}} = (\nabla \vec{\mathbf{f}}) = -(\nabla \nabla U) = -\nabla^2 U = 4\pi\delta$ , то есть

$$\nabla^2 U(a) = -4\pi\delta(a). \quad (2.20)$$

Уравнение вида (2.20) для  $U$  называют *уравнением Пуассона*. Если поле  $\vec{\mathbf{f}}$  с потенциалом  $U$  создают заданные (известные) объёмные массы, расположенные в области пространства  $V$ , то решением уравнения (2.20) является выражение (2.19, a). Согласно (1.10), в декартовых координатах из (2.20) получаем:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\delta. \quad (2.20, a)$$

Если в точках  $a$  области пространства  $V$  нет источников поля  $\vec{f}$  ( $\delta(a) = 0$ ), то из (2.20) получаем для потенциала  $U$  в области  $V$  уравнение Лапласа:

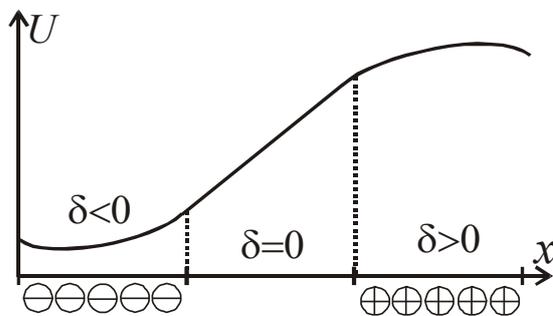
$$\text{При } \delta(a) = 0: \nabla^2 U(a) = 0. \quad (2.21)$$

Решения уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*. Функциям этим присущи некоторые специфические особенности. В частности, в декартовых координатах, согласно (1.10), уравнение Лапласа для

потенциала  $U$ :  $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$ . То есть у удовлетворяющего (вне

источников поля) уравнению Лапласа потенциала  $U$  сумма вторых производных по трём взаимно-ортогональным направлениям всегда равна нулю. Если поле  $U$  - гармоническая функция, то ему присущи и некоторые другие свойства (см. [1], с. 37, 38).

Рассмотрим один простейший пример. Пусть в декартовых координатах



**Рис. 2.11.** Пример зависимости  $U(x)$  при  $\delta = \delta(x)$ .

плотность  $\delta$  и потенциал  $U$  зависят только от координаты  $x$ :  $\delta = \delta(x)$ ,  $U = U(x)$ . При этом из (2.20,а) получаем:  $d^2U/dx^2 = -4\pi\delta(x)$ . Если  $\delta(x) < 0$ ,  $\delta(x) > 0$ , имеем соответственно  $d^2U/dx^2 > 0$ ,  $d^2U/dx^2 < 0$ . В первом случае функция  $U(x)$  будет "вогнутой", а во втором - "выпуклой" (рис. 2.11). При  $\delta(x) = 0$  вторая производная

$d^2U/dx^2 = 0$  и  $U(x)$  - линейная функция. То есть, если  $U = U(x)$ , то решение уравнения Лапласа (2.21) для  $U$  - линейная функция аргумента  $x$ .

Итак, согласно I-ым уравнениям систем (2.12) (2.13), статическое поле  $\vec{f}$  - потенциальное и всегда может быть выражено через потенциал (скалярное поле  $U$ ) на основе равенств (2.14), (2.15). При этом (для потенциального поля, в отличие от не потенциальных полей) существуют условия, позволяющие, в частности, упростить расчёты полей, что обусловлено следующим.

1). Определить скалярное поле  $U$  - обычно проще, чем векторное поле  $\vec{f}$ , а при известном  $U$ , пользуясь (2.15), не сложно перейти к выражениям для компонент поля  $\vec{f}$ .

2). При заданном распределении масс (заданном поле  $\delta$ ) уравнение Пуассона (2.20) это - уравнение с одним неизвестным - полем  $U$ . При тех же условиях II-е уравнение в (2.13) для поля  $\vec{f}$ :  $\text{div } \vec{f} = 4\pi\delta$  - это фактически уравнение с 3-мя неизвестными (например,  $f_x, f_y, f_z$  в декартовых координатах).

Кроме того, потенциал  $U$  может понадобиться не только для расчёта поля  $\vec{f}$ , а интересен и сам по себе. Разность потенциалов  $U_2 - U_1$  в точках "2", "1" характеризует разность потенциальных энергий поля  $\vec{f}$  в этих точках.

\*\*\*\*\*

Рассмотрим теперь несколько примеров полей  $\vec{f}$  некоторых источников или потенциалов  $U$  таких полей  $\vec{f}$ .

## 2.6. Поле плоской массы (простого слоя на части $S$ плоскости $\Pi$ )

Пусть плоскость  $\Pi$  разграничивает полупространства  $V_1, V_2$ , а поверхностная масса (в виде простого слоя с поверхностной плотностью  $\sigma$ ) занимает часть  $S$  плоскости  $\Pi$  (рис. 2.12,а). Определим компоненту  $f_n$  поля  $\vec{f}$  по направлению нормали  $n$  к плоскости  $\Pi$ . Согласно (2.2), элементарная поверхностная масса  $dm$  на элементарной площадке  $dS$  с центром в точке  $q$ :  $dm = \sigma(q) dS$ . В соответствии с (2.4) поле  $d\vec{f}$  такой массы в точке  $a$ :

$$d\vec{f}(a) = \frac{dm \vec{L}_{qa}}{L_{qa}^3} = \frac{\sigma(q) \vec{L}_{qa} dS}{L_{qa}^3}. \text{ По определению скалярная компонента } df_n$$

такого поля  $df_n = df \cdot \cos(d\vec{f}, n) = \frac{|dm|}{L_{qa}^2} \cdot \cos(d\vec{f}, n)$ . Так как при  $dm > 0$

$$d\vec{f} \parallel \vec{L}_{qa}, \text{ а при } dm < 0 \text{ } d\vec{f} \uparrow \downarrow \vec{L}_{qa}, \text{ то } df_n = \frac{|dm|}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, n) \frac{dm}{|dm|} =$$

$$= \frac{dm}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, n) \quad (\text{см. (2.4,а)}). \quad \text{То есть}$$

$$df_n = \frac{\sigma(q) dS}{L_{qa}^2} \cdot \cos(\vec{L}_{qa}, n) = \sigma(q) \frac{(\vec{L}_{qa} d\vec{S})}{L_{qa}^3}, \text{ где } d\vec{S} - \text{ вектор с абсолютной}$$

величиной  $dS$  направленный по нормали  $n$ . В полученном для  $df_n$  выражении заменим радиус-вектор  $\vec{L}_{qa}$  имеющим противоположное направление

$$\text{вектором } \vec{L}_{aq} \text{ и изменим знак: } df_n(a) = -\sigma(q) \frac{(\vec{L}_{aq} d\vec{S})}{L_{aq}^3} = -\sigma(q) d\omega(a). \text{ Здесь,}$$

в соответствии с (2.5),  $d\omega(a)$  - угол видимости площадки  $dS$  из точки  $a$ .

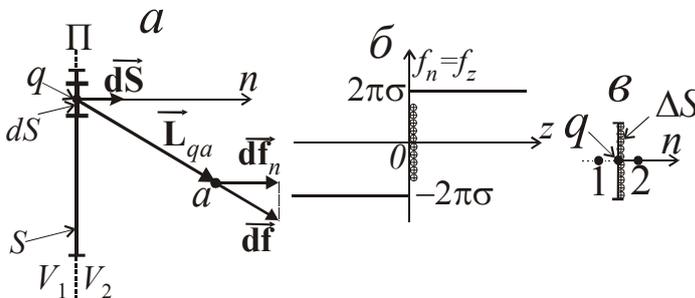
Суммируя компоненты  $df_n(a)$  поля всех элементарных масс, лежащих на части  $S$  плоскости  $\Pi$ , получаем:

$$f_n(a) = -\int_S \sigma(q) d\omega(a) = -\int_S \sigma(q) \frac{(\vec{L}_{aq} d\vec{S})}{L_{aq}^3}. \quad (2.22)$$

Если лежащая на  $S$  поверхностная масса в виде простого слоя - однородна ( $\sigma(q) = \sigma = \text{const}$ ), то можем упростить выражение (2.22):

$$f_n(a) = -\sigma \int_S d\omega(a) = -\sigma \cdot \omega(a), \quad \omega(a) = \int_S \frac{(\vec{L}_{aq} \cdot d\vec{S})}{L_{aq}^3}, \quad (2.22, a)$$

где  $\omega(a)$  - угол видимости поверхности  $S$  из точки  $a$ . Рассмотрим два примера для компоненты  $f_n(a)$  поля однородного простого слоя.



**Рис. 2.12.** К определению компоненты  $f_n$  поля "плоской массы".

а). Пусть  $S$  - это вся плоскость  $\Pi$ . Это может быть, например, одна из обкладок рассматриваемого в теории плоского конденсатора. Нормаль  $n$  к  $\Pi$  направлена в сторону области  $V_2$  (см. рис. 2.12,а). В соответствии с тем, что было нами рассмотрено в разделе 2.3 (см. пример "а" и рис. 2.8,а), при указанном направлении нормали  $n$  угол видимости плоскости  $\Pi$  из любой точки "1" в области  $V_1$   $\omega(1) = 2\pi$ . Угол видимости плоскости  $\Pi$  из любой точки "2" в области  $V_2$   $\omega(2) = -2\pi$ . Тогда, согласно (2.22,а),  $f_n(1) = -2\pi\sigma$ ,  $f_n(2) = 2\pi\sigma$ . Пусть направление оси  $Z$  совпадает с направлением нормали  $n$ , а начало  $0$  отсчёта координаты  $z$  лежит в плоскости  $\Pi$ . Для этого случая на рис. 2.12,б показана зависимость компоненты  $f_n = f_z$  поля "плоскости" (однородного простого слоя на  $\Pi$ ) от координаты  $z$  для случая, когда  $\sigma > 0$ . При переходе точки наблюдения через  $\Pi$  нормальная к  $\Pi$  компонента  $f_z$  терпит разрыв, равный  $4\pi\sigma$ .

б). Пусть  $S$  - это лежащая на плоскости  $\Pi$  площадка  $\Delta S$  сколь угодно малых размеров с центром в точке  $q$ . На  $\Delta S$  находится однородная поверхностная масса с плотностью  $\sigma(q)$ . Точки "1", "2" лежат по разные стороны от  $\Pi$  на бесконечно-малом расстоянии от  $q$  (рис. 2.12,б), то есть  $L_{1q} \rightarrow 0$ ,  $L_{2q} \rightarrow 0$ . Тогда, в соответствии с (2.6), (2.22,а),

$$f_n^{(1)} \rightarrow -2\pi\sigma(q), \quad f_n^{(2)} \rightarrow 2\pi\sigma(q), \quad f_n^{(2)} - f_n^{(1)} = 4\pi\sigma(q), \quad (2.23)$$

то есть при перемещении точки наблюдения  $a$  через (расположенные на бесконечно-малых расстояниях друг от друга) точки "1",  $q$ , "2" компонента  $f_n$  терпит разрыв, равный  $4\pi\sigma(q)$ .

## 2.7. Поле диполя

Диполь, как источник статического поля  $\vec{f}$ , можно представить, как совокупность двух точечных масс (зарядов)  $m > 0$  и  $-m$  при условии, что расстояние между этими массами - много меньше, чем расстояния от них до точки наблюдения  $a$  (рис. 2.13). Массы  $-m$  и  $m$  (или точки "1" и "2", в которых расположены эти массы) - *полюса* диполя;  $L_{12}$  - *длина* диполя; центр  $0$  отрезка  $L_{12}$  - *центр* диполя; прямая  $l$ , на которой лежат массы  $-m$  и  $m$ , - *ось* диполя; проходящая через центр  $0$  плоскость, ортогональная оси  $l$ , - *экваториальная*

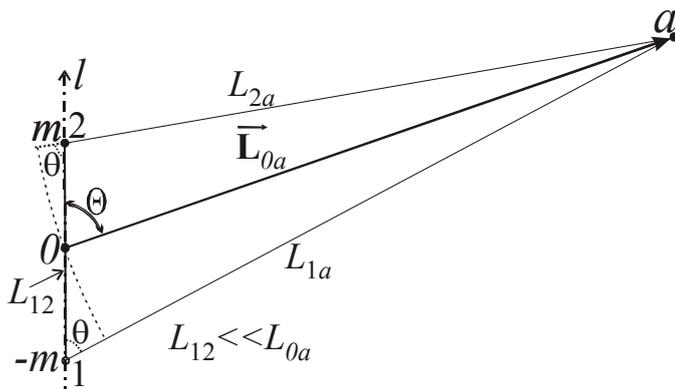
плоскость. Если  $\vec{L}_{12}$  - радиус вектор с началом в точке "1" (массе  $-m$ ), концом в точке "2" (массе  $m$ ) и абсолютной величиной  $L_{12}$ , то момент диполя  $\vec{p} = m\vec{L}_{12}$ , а абсолютная величина момента  $|\vec{p}| = p = mL_{12}$ .

Определим потенциал  $U$  поля  $\vec{f}$  диполя. В соответствии с (2.19),  $U(a) = \frac{m}{L_{2a}} + \frac{-m}{L_{1a}} = m \left( \frac{1}{L_{2a}} - \frac{1}{L_{1a}} \right)$ . Штриховой линией на рис. 2.13 показана дуга окружности с радиусом  $L_{0a}$  и с центром в точке  $a$ . Если  $L_{12} \ll L_{0a}$ , то можем принять допущение, что показанные на рис. 2.13 отрезки  $L_{1a}$  и  $L_{2a}$  - взаимно параллельными. При этом можно (приблизённо) полагать, что показанные на этом рисунке углы  $\theta \approx \Theta$ , где  $\Theta$  - угол между векторами  $\vec{L}_{12}$  (или параллельным этому радиусу-вектору моментом  $\vec{p}$ ) и  $\vec{L}_{0a}$ . При этих условиях  $L_{2a} \approx L_{0a} - \frac{L_{12}}{2} \cos \Theta$ ,  $L_{1a} \approx L_{0a} + \frac{L_{12}}{2} \cos \Theta$ . Тогда  $U(a) \approx$

$$\approx m \left( \frac{1}{L_{0a} - \frac{L_{12}}{2} \cos \Theta} - \frac{1}{L_{0a} + \frac{L_{12}}{2} \cos \Theta} \right) = m \left( \frac{\frac{L_{12}}{2} \cos \Theta + \frac{L_{12}}{2} \cos \Theta}{L_{0a}^2 - \left( \frac{L_{12}}{2} \cos \Theta \right)^2} \right). \quad \text{При}$$

$L_{12} \ll L_{0a}$  потенциал  $U(a) \approx \frac{m L_{12}}{L_{0a}^2} \cos \Theta = \frac{p}{L_{0a}^2} \cos \Theta$ , где  $p = mL_{12}$  - модуль момента  $\vec{p}$  диполя. Отсюда следует, что выражение для потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  диполя можем записать в следующем виде:

$$U(a) = \frac{p \cos \Theta}{L_{0a}^2} = \frac{(\vec{p} \vec{L}_{0a})}{L_{0a}^3}. \quad (2.24)$$



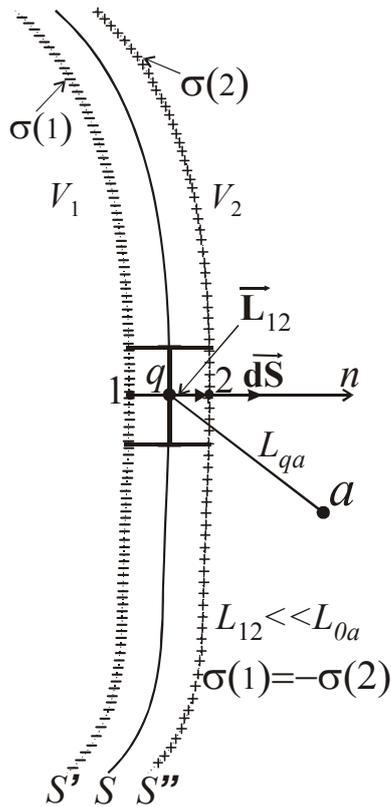
**Рис. 2.13.** К определению потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  диполя.

Из (2.24) следует, что потенциал  $U(a)$  (а, следовательно, и поле  $\vec{f}(a)$ ) диполя полностью определяют момент  $\vec{p}$  (его направление и абсолютная величина) и положение центра диполя  $\theta$ . Поэтому при теоретическом рассмотрении или расчёте поля диполя понятию "диполь" придают

следующий предельный смысл. При конечной величине  $p = mL_{12}$  полагают, что длина диполя  $L_{12} \rightarrow 0$ , а  $m \rightarrow \infty$ . При этом полюса диполя  $\pm m$  находятся на бесконечно-малых расстояниях от центра диполя  $O$ .

Некоторые особенности, присущие полю диполя, детальнее рассмотрим на лабораторных занятиях.

## 2.8. Поле двойного слоя



**Рис. 2.14.** К определению потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  двойного слоя.

Представим себе две поверхности  $S'$ ,  $S''$ , расположенные по разные стороны поверхности  $S$  на малых расстояниях  $L_{12}/2$  от  $S$ , а эта поверхность - граница областей пространства  $V_1, V_2$  (рис. 2.14). Каждой точке  $q$  поверхности  $S$  соответствуют точки "1", "2" на поверхностях  $S'$ ,  $S''$ , расположенные на одной с точкой  $q$  нормали  $n$  к  $S$ . На поверхностях  $S'$ ,  $S''$  расположены поверхностные массы в виде простых слоёв, причём в точках "1", "2" поверхностные плотности различаются знаком:  $\sigma(1) = -\sigma$ ,  $\sigma(2) = \sigma$ , где  $\sigma$  может зависеть от положения точки  $q$  на  $S$ . Если расстояние  $L_{qa}$  от точки наблюдения  $a$  до любой точки  $q$  на  $S$  много больше  $L_{12}$ , то такую совокупность масс на  $S'$ ,  $S''$  называют *двойным слоем*. Поверхности  $S'$ ,  $S''$  - "обкладки" двойного слоя,  $S$  - поверхность, "несущая" двойной слой, а  $L_{12}$  - толщина двойного слоя. Определим потенциал  $U$  поля  $\vec{f}$  двойного слоя.

Пусть  $dS$  - лежащая на  $S$  элементарная площадка с центром в точке  $q$ , а на соответствующих площадках  $dS'$ ,  $dS''$  с центрами в точках "1", "2" лежат элементарные поверхностные массы  $dm_1 = -\sigma \cdot dS$  и  $dm_2 = \sigma \cdot dS$ . При  $L_{qa} \gg L_{12}$  поле масс  $dm_1 = -dm$ ,  $dm_2 = dm$  идентично полю диполя с моментом  $d\vec{p} = dm \vec{L}_{12} = \sigma \cdot dS \vec{L}_{12}$ . Тогда, по аналогии с (2.24), потенциал поля этих масс  $dU(a) = \frac{(d\vec{p} \vec{L}_{qa})}{L_{qa}^3} = \sigma \cdot dS \frac{(\vec{L}_{12} \vec{L}_{qa})}{L_{qa}^3}$ . Так как  $\vec{L}_{12} \parallel d\vec{S}$ , то  $dS \cdot \vec{L}_{12} = L_{12} \cdot d\vec{S}$ .

Следовательно,

$$dU(a) = \sigma \cdot L_{12} \frac{(\vec{L}_{qa} d\vec{S})}{L_{qa}^3} = -\eta(q) \frac{(\vec{L}_{aq} d\vec{S})}{L_{aq}^3} =$$

$$= -\eta(q) \frac{(\vec{L}_{aq} \cdot d\vec{S})}{L_{aq}^3} = -\eta(q) d\omega(a), \quad \text{где } d\omega(a) \text{ - угол видимости}$$

ориентированной элементарной площадки  $dS$  из точки  $a$ , а  $\eta(q)$  - поверхностная плотность дипольных моментов:  $\eta(q) = \sigma \cdot L_{12} = dp/dS$  ( $dp = |d\vec{p}|$ ). Интегрируя  $dU(a)$  по поверхности  $S$ , получаем выражение для потенциала  $U$  поля двойного слоя:

$$U(a) = -\int_S \eta(q) d\omega(a) = -\int_S \eta(q) \frac{(\vec{L}_{aq} \cdot d\vec{S})}{L_{aq}^3}. \quad (2.25)$$

В случае однородного двойного слоя на поверхности  $S$  ( $\eta(q) = \eta = \text{const}$ ) можем упростить выражение (2.25):

$$U(a) = -\eta \int_S d\omega(a) = -\eta \cdot \omega(a), \quad \omega(a) = \int_S \frac{(\vec{L}_{aq} \cdot d\vec{S})}{L_{aq}^3}, \quad (2.25, a)$$

где  $\omega(a)$  - угол видимости поверхности  $S$  из точки  $a$ .

Из (2.25), (2.25,a) следует, что потенциал  $U(a)$ , а, следовательно, и поле  $\vec{f}(a)$  двойного слоя полностью определяют положение в пространстве несущей двойной слой поверхности  $S$  и поверхностная плотность дипольных моментов  $\eta$ . Поэтому при теоретическом рассмотрении или расчёте поля понятию "двойной слой" придают следующий предельный смысл. При конечной величине  $\eta = \sigma L_{12}$  полагают, что толщина двойного слоя  $L_{12} \rightarrow 0$ , а  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим три примера для потенциалов  $U(a)$  поля  $\vec{f}$  однородных двойных слоёв.

*а).* Пусть несущая однородный двойной слой поверхность  $S$  - это плоскость  $\Pi$ , разграничивающая области пространства  $V_1, V_2$ . Нормаль  $n$  к  $\Pi$  направлена в сторону области  $V_2$ . В сторону  $V_2$  "обращена" положительная обкладка двойного слоя. В соответствии с тем, что было рассмотрено в разделе 2.3 (см. пример "а" и рис. 2.8,а), при указанном направлении нормали  $n$  угол видимости плоскости  $\Pi$  из любой точки "1" в области  $V_1$   $\omega(1) = 2\pi$ . Угол видимости плоскости  $\Pi$  из любой точки "2" в области  $V_2$   $\omega(2) = -2\pi$ . Тогда, согласно (2.25,a),  $U(1) = -2\pi\eta$ ,  $U(2) = 2\pi\eta$ . Пусть направление оси  $Z$  совпадает с направлением нормали  $n$ , а начало  $0$  отсчёта координаты  $z$  лежит в плоскости  $\Pi$ .

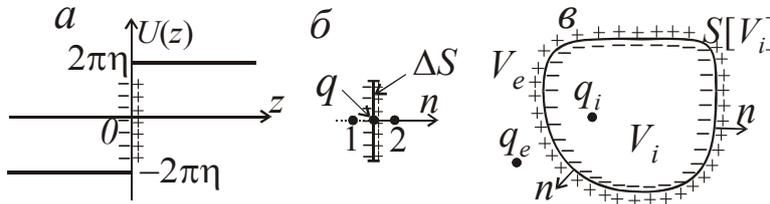
Для этого случая на рис. 2.15,а показана зависимость  $U(z)$ . При переходе точки наблюдения через  $\Pi$  потенциал  $U$  терпит разрыв, равный  $4\pi\eta$  и не убывает при удалении точки наблюдения от такого двойного слоя.

*б).* Рассмотрим теперь случай, когда  $S$  - это площадка  $\Delta S$  сколь угодно малых размеров с центром в точке  $q$ . На  $\Delta S$  находится однородный двойной слой с поверхностной плотностью дипольных моментов  $\eta(q)$  (рис. 2.15,б). На этом рисунке показаны также точки "1", "2" расположенные на

бесконечно-малом расстоянии от  $q$ , то есть  $L_{1q} \rightarrow 0$ ,  $L_{2q} \rightarrow 0$ . Тогда, в соответствии с (2.6), (2.25,a),

$$U(1) \rightarrow -2\pi\eta(q), \quad U(2) \rightarrow 2\pi\eta(q), \quad U(2) - U(1) = 4\pi\eta(q), \quad (2.26)$$

то есть при перемещении точки наблюдения  $a$  через (расположенные на бесконечно-малых



**Рис. 2.15.** К определению потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  однородных двойных слоёв.

расстояниях друг от друга) точки "1",  $q$ , "2" потенциал  $U$  терпит разрыв, равный  $4\pi\eta(q)$ .

в). Пусть теперь однородный двойной слой лежит на замкнутой

поверхности  $S[V_i]$ , ограничивающей область пространства  $V_i$ . К области  $V_i$  обращена отрицательная обкладка двойного слоя (рис. 2.15,в). В соответствии с рассмотренным в примере "з" раздела 2.3 (см. рис. 2.8,з и выражение (2.7)) угол видимости поверхности  $S[V_i]$  из любой точки  $q_i$  области  $V_i$   $\omega(q_i) = 4\pi$ . Угол видимости этой поверхности из любой точки  $q_e$  области  $V_e$   $\omega(q_e) = 0$ . Поэтому из (2.25,a) для потенциалов в этих точках получаем:  $U(q_i) = -4\pi\eta$ ,  $\omega(q_e) = 0$ . Так как, в соответствии с (2.14),  $\vec{f}_{i,e} = -\text{grad}U_{i,e}$ , а градиент однородного скалярного поля равен нулю, то в областях  $V_i$ ,  $V_e$  поле  $\vec{f}_{i,e} = 0$ . То есть однородный двойной слой на замкнутой поверхности не создает поля  $\vec{f}$  в  $V_i$ ,  $V_e$ . Поле  $\vec{f}$  имеется только между обкладками двойного слоя.

## 2.9. Поле нейтральной совокупности масс

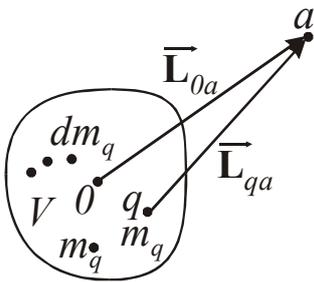
Пусть множество точечных масс  $m_q$  и элементарных масс  $dm_q = \delta(q)dV$ ,  $\sigma(q)dS$ ,  $\lambda(q)dl$  расположены в точках  $q$  области пространства  $V$  (рис. 2.16). В соответствии с (2.19), выражение для потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  этих масс можем представить в виде:

$$U(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}} + \sum \frac{dm_q}{L_{qa}}. \quad (2.27)$$

Здесь рассматриваем случай, когда совокупность масс - нейтральная, то есть  $\sum m_q + \sum dm_q = 0$ . Такая ситуация - типична для источников магнитостатического поля, а иногда и для источников электростатического поля.

Пусть  $\theta$  - произвольная точка, в области  $V$ , и выполняется условие  $L_{\theta a} \gg L_{\theta q}$ . Это означает, что линейные размеры области  $V$ , в которой находятся источники поля, много меньше, чем расстояние от этой области до точки наблюдения  $a$ . Можно доказать, что при выполнении этого неравенства выражение для потенциала  $U(a)$  можно представить в виде:

$$U(a) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{L_{0a}^{n+1}} = \frac{C_0}{L_{0a}} + \frac{C_1}{L_{0a}^2} + \frac{C_2}{L_{0a}^3} + \dots, \quad (2.27, a)$$

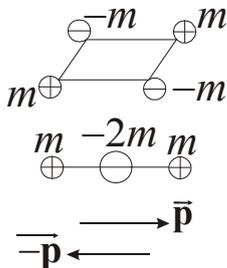


**Рис. 2.16.** К полю нейтральной совокупности масс.

где множители  $C_n$  не зависят от расстояния  $L_{0a}$ , но могут зависеть от направления радиуса-вектора  $\vec{L}_{0a}$ . Правая часть в (2.27,a) - сумма потенциалов полей мультиполей порядка  $n$ . Для мультиполя нулевого порядка  $C_0 = \sum m_q + \sum dm_q$ . Его поле идентично полю расположенной в точке  $0$  точечной массы  $C_0$ . Для нейтральной совокупности масс  $C_0 = 0$ .

Второй член ряда в (2.27,a) (потенциал поля мультиполя 1-го порядка) определяют выражения:

$$U_1 = \frac{(\vec{M} \vec{L}_{0a})}{L_{0a}^3}, \quad \vec{M} = \sum m_q \vec{L}_{0q} + \sum dm_q \vec{L}_{0q}.$$



**Рис. 2.17.** Квадруполи.

этих выражений с (2.24) видим, что потенциал  $U_1$  идентичен потенциалу поля диполя с моментом  $\vec{M}$ .

Слагаемое  $U_3 = C_2/L_{0a}^3$  в (2.27,a) - потенциал поля мультиполя 2-го порядка - квадруполь. Примеры квадруполей приведены на рис. 2.17. Мультиполь 3-го порядка - октуполь. Из (2.27,a) следует, что чем выше порядок мультиполя, тем быстрее убывает его поле при удалении точки наблюдения от области  $V$ .

## 2.10. Непрерывность статического поля и её нарушение

Скалярное поле  $T$  непрерывно в точке  $q$ , если любому (по любому направлению) бесконечно малому перемещению точки  $q$  соответствует бесконечно малое изменение  $T$ . Векторное поле  $\vec{M}$  непрерывно в точке  $q$ , если непрерывна скалярная компонента  $M_l$  этого поля по любому направлению (гладкой линии)  $l$ . В противном случае (конечное или бесконечно большое изменение  $T$  или  $M_l$ ) поле терпит разрыв в точке  $q$  и эта точка - особая точка  $q_{oc}$  поля. Точки  $q_{oc}$  могут образовывать особые линии  $l_{oc}$  или особые поверхности  $S_{oc}$  полей  $T, \vec{M}$ .

В каких местах рассматриваемое нами поле  $\vec{f}$  и его потенциал  $U$  имеют особые точки, линии или поверхности? Представим выражение (2.4) для поля  $\vec{f}$ , создаваемого различными массами, в следующем виде:

$$\vec{f}(a) = \sum \frac{m_q}{L_{qa}^2} \vec{1}_{Lqa} + \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}^2} \vec{1}_{Lqa} + \int_S \frac{\sigma(q)dS}{L_{qa}^2} \vec{1}_{Lqa} + \int_l \frac{\lambda(q)dl}{L_{qa}^2} \vec{1}_{Lqa}, \quad (2.28)$$

где  $\vec{\mathbf{1}}_{L_{qa}} = \vec{\mathbf{L}}_{qa} / L_{qa}$  - единичный вектор по направлению радиуса-вектора  $\vec{\mathbf{L}}_{qa}$ . В (2.28) точечные массы  $m_q$  и плотности  $\delta, \sigma, \lambda$  соответственно объёмных масс, поверхностных масс (в виде простых слоёв) и линейных масс - конечные величины. Но расстояния  $L_{qa}$  от точечных и элементарных масс до точки  $a$  могут быть бесконечно малыми. Рассмотрим случаи различного положения точки наблюдения  $a$  относительно создающих поле  $\vec{\mathbf{f}}$  масс.

1). Точка  $a$  расположена вне масс. Тогда  $L_{qa} \neq 0$  и все слагаемые в правой части (2.28), а также в выражении (2.19) для потенциала  $U(a)$  - непрерывные функции точки  $a$ . При бесконечно малом перемещении этой точки компоненты поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  и поле  $U(a)$  меняются на бесконечно малую величину.

2). Точка  $a$  расположена в объёмной массе с конечной объёмной плотностью  $\delta$ . В этом случае поле  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  определяет 2-е слагаемое в правой части (2.28), а потенциал  $U(a) = \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}}$ . Расстояние  $L_{qa}$  до некоторых бесконечно малых объёмов  $dV$  может быть бесконечно малой величиной, а  $L_{qa}^2$  - бесконечно малой величиной 2-го порядка. Но тогда множитель  $dV$  (в числителе) в выражениях для  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  и  $U(a)$  - бесконечно малая величина 3-го порядка. Поэтому при расположении точки  $a$  в объёмной массе поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  и  $U(a)$  меняются непрерывно. Это подтвердят и примеры расчёта поля некоторых объёмных масс на лабораторных занятиях.

Так как (при применяемом нами "макроскопическом" подходе) физически реальной является масса объёмная, то в реальности поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  и  $U(a)$  - непрерывны. Но так как при решениях прямых задач, расчётах полей пользуются такими понятиями, как точечные, линейные, поверхностные массы, то следует представлять себе особенности "поведения" полей  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  и  $U(a)$  вблизи таких масс.

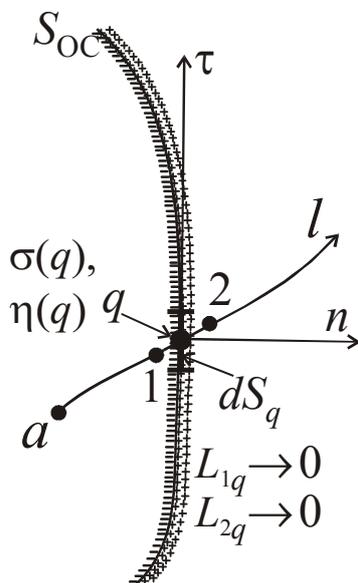
3). Точка  $a$  расположена в окрестности точечной массы  $m_q$ . в этом случае  $\vec{\mathbf{f}}(a) = \frac{m_q}{L_{qa}^2} \vec{\mathbf{1}}_{L_{qa}}$ ,  $U(a) = \frac{m_q}{L_{qa}}$ . Понятно, что при  $L_{qa} \rightarrow 0$  величины  $f(a)$  и  $U(a)$  принимают неограниченные значения. В частности, при  $L_{qa} \rightarrow 0$  потенциал  $U(a) \rightarrow \infty$  как  $m_q / L_{qa}$  (то есть - известным нам образом). В соответствии с выражением (2.24) для потенциала поля диполя, в окрестности центра  $0$  диполя при  $L_{0a} \rightarrow 0$  потенциал  $U(a) \rightarrow \infty$  как  $(\vec{\mathbf{p}} \vec{\mathbf{L}}_{0a}) / L_{0a}^3$ . То есть те точки, в которых находятся точечные массы  $m_q$  или центры диполей, являются особыми точками  $q_{oc}$  полей  $\vec{\mathbf{f}}$  и  $U$ .

4). Точка  $a$  расположена в окрестности расположенной на линии  $l$  линейной массы с линейной плотностью  $\lambda$ . При рассмотрении соответствующей задачи на лабораторных занятиях могли убедиться, в частности, что если точка наблюдения находится на расстоянии  $r = L_{qa}$  от линейной массы, то при  $r \rightarrow 0$   $U(a) \rightarrow \infty$  как  $2\lambda \ln(C/r)$ , где  $C = \text{const}$ . То есть в окрестности такой массы потенциал  $U$  имеет "логарифмическую особенность". Линии, на которых лежат линейные массы, являются особыми линиями  $l_{oc}$  полей  $\vec{f}$  и  $U$ .

5). Точка  $a$  расположена в окрестности расположенной на поверхности  $S$  поверхностной массы (простого слоя с поверхностной плотностью  $\sigma$  или двойного слоя с поверхностной плотностью дипольных моментов  $\eta$ ). Для простого слоя, согласно (2.28), поле  $\vec{f}(a)$  определяет выражение:

$$\vec{f}(a) = \int_S \frac{\sigma(q) dS}{L_{qa}^2} \vec{1}_{L_{qa}}. \text{ В подынтегральной функции}$$

в этом выражении при  $L_{qa} \rightarrow 0$  знаменатель  $L_{qa}^2$  - бесконечно малая величина 2-го порядка. Но в числителе этой функции  $dS$  - также бесконечно малая величина 2-го порядка. Поэтому "поведение" полей  $\vec{f}$  и  $U$  в окрестности поверхностных масс придётся рассмотреть детальнее.



**Рис. 2.17.** Поле у особой поверхности  $S_{oc}$ .

Пусть на поверхности  $S$  ( $S_{oc}$ ) лежат (в общем случае) простой и двойной слои, которые характеризуют, соответственно, плотности  $\sigma(q)$  и  $\eta(q)$  (рис. 2.17). Точка  $a$ , перемещаясь по линии  $l$ , пересекает поверхность  $S$  в точке  $q$  - центре элементарной площадке  $dS_q$ . Точки "1" и "2" расположены по разные стороны от  $S$  на бесконечно малых расстояниях от точки  $q$ ,  $n$  - нормаль к  $S$  в точке  $q$ , а  $\tau$  - одно из тангенциальных (касательных) к  $S$  направлений в точке  $q$ . Определим то, как меняются при переходе точки  $a$  из точки "1" в точку "2" потенциал  $U$  поля  $\vec{f}$  и скалярные компоненты  $f_n$ ,  $f_\tau$  этого поля по направлениям  $n$  и  $\tau$ .

5,а). Потенциал  $U$ . Представим потенциал  $U$  в виде суммы:  $U = U^q + U^*$ , где  $U^q$  - потенциал поля  $\vec{f}$  масс, лежащих на площадке  $dS_q$ , а  $U^*$  - потенциал поля всех остальных масс. Соответственно в точках "1", "2"  $U_1 = U_1^q + U_1^*$ ,  $U_2 = U_2^q + U_2^*$ . Но поле с потенциалом  $U^*$  создают массы, расположенные вне окрестности точки  $q$ . В соответствии с изложенным выше потенциал  $U^*$  непрерывен в окрестности точки  $q$ , то есть (при  $L_{1q} \rightarrow 0$ ,

$L_{2q} \rightarrow 0$ )  $U_1^* = U_2^* = U_q^*$ . Тогда разность  $U_2 - U_1 = U_2^q + U_q^* - U_1^q - U_q^* = U_2^q - U_1^q$ . В соответствии с (2.26), эта разность потенциалов равна  $4\pi\eta(q)$ . Итак,

$$U_2 - U_1 = 4\pi\eta(q). \quad (2.29)$$

Отсюда следует, что, если на поверхности  $S$  есть двойной слой, то при переходе точки наблюдения  $a$ , через эту поверхность, потенциал  $U$  поля  $\vec{f}$  терпит разрыв, равный  $4\pi\eta(q)$ , где  $q$  - точка, в которой  $a$  пересекает поверхность  $S$ . Такая поверхность  $S$  - это особая поверхность  $S_{oc}$  для потенциала  $U$ . Если на  $S$  нет двойного слоя ( $\eta=0$ ), то потенциал  $U$  непрерывен на  $S$ .

5,б). Нормальная к  $S$  компонента  $f_n$  поля  $\vec{f}$ . Применим тот же подход, что и при получении выражения (2.29) для потенциала  $U$ .

Представим компоненту  $f_n$  как сумму  $f_n = f_n^q + f_n^*$ , где  $f_n^q$  - компонента поля  $\vec{f}$  масс, лежащих на площадке  $dS_q$ , а  $f_n^*$  - компонента поля всех остальных масс. В точках "1", "2"  $f_n^{(1)} = f_n^{(1)q} + f_n^{(1)*}$ ,  $f_n^{(2)} = f_n^{(2)q} + f_n^{(2)*}$ . Так как компонента  $f_n^*$  непрерывна в окрестности точки  $q$ , то есть (при  $L_{1q} \rightarrow 0$ ,  $L_{2q} \rightarrow 0$ )  $f_n^{(1)*} = f_n^{(2)*}$ , то разность  $f_n^{(2)} - f_n^{(1)} = f_n^{(2)q} - f_n^{(1)q}$ . Из (2.23) следует, что эта разность равна  $4\pi\sigma(q)$ : то есть

$$f_n^{(2)} - f_n^{(1)} = 4\pi\sigma(q). \quad (2.30)$$

Если на поверхности  $S$  есть простой слой, то значения компоненты  $f_n$  в точках "1" и "2" отличаются на величину, равную  $4\pi\sigma(q)$ . Такая поверхность  $S$  - особая поверхность  $S_{oc}$  для поля  $\vec{f}$ .

5,б). Тангенциальная к  $S$  компонента  $f_\tau$  поля  $\vec{f}$ . Здесь можем воспользоваться уже полученным выражением (2.29) для потенциала  $U$ . Дифференцируя левую и правые части этого равенства по касательному к  $S$

направлению  $\tau$ , получаем:  $\frac{\partial U_2}{\partial \tau} - \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 4\pi \frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau}$ . Но, согласно (2.15),

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = -f_\tau, \text{ следовательно,}$$

$$f_\tau^{(2)} - f_\tau^{(1)} = -4\pi \frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau}. \quad (2.31)$$

Из (2.31) следует, что компонента  $f_\tau$  терпит разрыв на поверхностях  $S_{oc}$ , где производная  $\partial \eta / \partial \tau \neq 0$ , то есть на тех поверхностях, на которых находятся неоднородные двойные слои и поверхностная плотность дипольных моментов  $\eta$  меняется в касательном к  $S_{oc}$  направлении  $\tau$ .

Ранее мы получили уравнения поля  $\vec{f}$  в интегральной (2.12) и дифференциальной (2.13) формах. Равенства (2.30), (2.31) можно рассматривать, как запись (хотя и не для общего случая) уравнений поля  $\vec{f}$  в поверхностной форме, которые могут быть применены на особых поверхностях  $S_{oc}$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } Rot_{\tau} \vec{f} &= f_{\tau}^{(2)} - f_{\tau}^{(1)} + 4\pi \frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau} = 0, \\ \text{II. } Div \vec{f} &= f_n^{(2)} - f_n^{(1)} = 4\pi \sigma(q). \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

где  $Div \vec{f}$  - поверхностная дивергенция, а  $Rot_{\tau} \vec{f}$  - скалярная компонента по направлению  $\tau$  поверхностного ротора  $Rot \vec{f}$ . См. [1], с. 28- 32.

### 2.11. Решение прямой задачи теории статического поля в вакууме

Различают прямую и обратную задачи "теории поля". Прямая задача теории статического поля в вакууме - это расчёт поля при заданных его возбудителях (источниках), а обратная задача - определение источников поля при известном поле. Для полей в присутствии среды (которые будем рассматривать в следующих темах) прямая задача - это, например, расчет поля при заданных модели среды и части источников (первичного) поля, которые можно полагать не зависящими от модели среды. В этом вопросе кратко рассмотрим возможные подходы к решению прямой задачи теории статического поля в вакууме. Примеры применения таких подходов - на лабораторных занятиях.

1. Расчёт поля  $\vec{f}$ , его компонент или потенциала  $U$  на основе выражений (2.4), (2.4,a), (2.19). Применение такого подхода не вызывает принципиальных затруднений, если все источники поля  $\vec{f}$  - заданы (известны).

2. Расчёт поля  $\vec{f}$  на основе закона Гаусса (2.8):  $\oint_{S[V]} (\vec{f} \cdot d\vec{S}) = 4\pi \cdot m_V$ . При заданных массах  $m_V$  в области пространства  $V$  это - интегральное уравнение для поля  $\vec{f}$  (искомое поле  $\vec{f}$  - под интегралом). Получить аналитическое решение такого уравнения часто не представляется возможным. Но в некоторых случаях, когда создающие поле  $\vec{f}$  массы имеют простую (симметричную) форму, при соответствующем выборе поверхности  $S[V]$  можно получить из (2.8) простые выражения для расчёта поля  $\vec{f}$ . Примеры применения такого подхода рассмотрим на лабораторных занятиях.

3. В некоторых случаях возможен также расчёт поля  $\vec{f}$  на основе дифференциальной формы (2.9) закона Гаусса:  $div \vec{f} = 4\pi \delta$ . Но при заданном распределении  $\delta$  в общем случае это одно уравнение с тремя неизвестными, например  $f_x, f_y, f_z$  (см. (1.7)). Поэтому пользоваться уравнением

$\operatorname{div} \vec{f} = 4\pi\delta$  для расчёта поля  $\vec{f}$  можно в тех случаях, когда в некоторой системе координат это поле имеет лишь одну ненулевую компоненту. Соответствующие этому примеры также рассмотрим на лабораторных занятиях.

4. Расчёт потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$  на основе уравнения Пуассона (2.20)  $\nabla^2 U(a) = -4\pi\delta(a)$  и определение компонент поля  $\vec{f}$  при помощи равенств (2.15):  $f_i = -\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{-1}{h_\xi} \frac{\partial U}{\partial \xi}$ . При заданном распределении масс (поле  $\delta$ )

уравнение Пуассона - это уравнение с одной неизвестной  $U$ .

Но возникает проблема, когда не все источники поля можно полагать известными при решении прямой задачи. В частности, в присутствии среды (оказывающей влияние на поле) распределение некоторых источников зависит от искомого поля. Обоснование того, как в этом должна быть поставлена прямая задача, рассмотрим в следующем вопросе.

## 2.12. Теорема единственности решения прямой задачи теории постоянного потенциального поля

Эта теорема доказывает, каким условиям должно удовлетворять решение прямой задачи для скалярного поля  $U$  (например, для потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$ ), чтобы оно было единственным (и правильным) решением даже в тех случаях, когда не все источники поля известны. Для того, чтобы доказательство теоремы было справедливо не только для потенциала статического поля в вакууме, но и для некоторых других полей, будем полагать, что поле  $U$  удовлетворяет уравнению, более сложному, чем уравнение Пуассона (2.20).

Пусть в точках  $a$  области пространства  $V$ , ограниченной поверхностью  $S[V]$ , искомое скалярное поле  $U(a)$  удовлетворяет уравнению:

$$(\nabla(\lambda \cdot \nabla U)) = w, \quad (2.33)$$

где  $w(a)$  и  $\lambda(a) > 0$  - известные скалярные поля в области  $V$ , второе из которых - положительное. Заметим, что (внешние) круглые скобки в (2.33) обозначают скалярное произведение, то есть  $(\nabla(\lambda \cdot \nabla U)) = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} U)$ .

Произвольную точку на поверхности  $S[V]$  обозначим  $p$  (рис. 2.18).

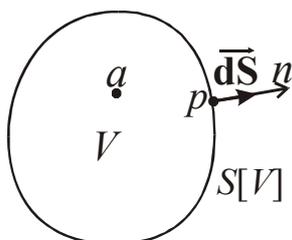


Рис. 2.18. К теореме единственности.

В частных случаях (2.33) - переходит в уравнение Пуассона или уравнение Лапласа. Действительно, при однородном поле  $\lambda$  ( $\lambda = \text{const}$ ) из (2.33) получаем уравнение Пуассона  $\nabla^2 U = w/\lambda$ , а при  $\lambda = \text{const}$  и  $w = 0$  - уравнение Лапласа  $\nabla^2 U = 0$ .

Отметим, что при решении прямых задач могут возникнуть вопросы: 1) о существовании решения и 2) о единственности решения. Вопрос о существовании решения в прямых задачах геофизики обычно не возникает. Если задача физически осуществима, то заданной физической ситуации должно соответствовать

какое-то поле и притом - вполне определённое (только одно). Но уравнение (2.33) может иметь множество решений. Каким ещё (дополняющим это уравнение) условиям должно удовлетворять решение прямой задачи, чтобы это решение было единственным (и правильным)?

Пусть нам требуется получить решение прямой задачи для области пространства  $V$ , а  $U'(a)$  и  $U''(a)$  - два решения уравнения (2.33) для этой области. Обозначим разность этих решений  $U'(a) - U''(a) = U'''(a)$ . Какому уравнению удовлетворяет поле  $U'''(a)$ ? Так как, согласно (2.33),  $(\nabla(\lambda \cdot \nabla U')) = w$ ,  $(\nabla(\lambda \cdot \nabla U'')) = w$ , то для  $U'''(a)$  получаем уравнение

$$(\nabla(\lambda \cdot \nabla U''')) = 0. \quad (2.34)$$

Если  $\vec{f} = -\text{grad } U$ , то для единственности решения прямой задачи для поля  $\vec{f}$  достаточно того, чтобы  $U'''(a) = C$ , где  $C = \text{const}$  - однородное скалярное поле. При этом  $\text{grad } U'(a) = \text{grad } U''(a)$ .

Рассмотрим векторное поле  $\vec{X} = U''' \cdot \lambda \cdot \text{grad } U''' = U''' \cdot \lambda \cdot \nabla U'''$

(1). На первом этапе доказательства теоремы единственности будем полагать, что поля  $U$ ,  $\text{grad } U$  и  $\lambda$  - непрерывны и дифференцируемы во всех точках  $a$  области  $V$ . Тогда этим же условиям будут удовлетворять  $U'''$ ,  $\text{grad } U'''$ , а, следовательно, и векторное поле  $\vec{X}$ . Непрерывность такого поля и существование его производной  $\text{div } \vec{X}$  необходима для того, чтобы для поля  $\vec{X}$  была применима формула Гаусса - Остроградского (1.13):

$$\oint_{S[V]} (\vec{X} \cdot d\vec{S}) = \int_V \text{div } \vec{X} dV.$$

Примем во внимание, что в левой части этого уравнения  $(\vec{X} \cdot d\vec{S}) = X \cdot \cos(\vec{X}, n) \cdot dS = X_n \cdot dS = U''' \cdot \lambda \cdot \text{grad}_n U''' dS = U''' \cdot \lambda \cdot \frac{\partial U'''}{\partial n} dS$ ,

так как направления  $d\vec{S}$  и нормали  $n$  - одинаковы (см. рис. 2.18), а скалярная компонента  $\text{grad}_n U''' = \partial U''' / \partial n$ .

В правой части этого уравнения  $\text{div } \vec{X} = (\nabla \vec{X}) = (\nabla [U''' \cdot (\lambda \cdot \nabla U''')]) = \nabla U''' \cdot \lambda \cdot \nabla U''' + U''' (\nabla(\lambda \cdot \nabla U'''))$ , так как применение дифференциального оператора  $\nabla$  к произведению подчиняется тем же правилам, которые справедливы для функций одной переменной  $((U \cdot V)' = U'V + V'U)$ . Примем во внимание, что  $\nabla U''' \cdot \lambda \cdot \nabla U''' = \lambda \cdot (\nabla U''')^2$ , а, согласно (2.34),  $(\nabla(\lambda \cdot \nabla U''')) = 0$ . Тогда  $\text{div } \vec{X} = \lambda \cdot (\nabla U''')^2 = \lambda \cdot |\text{grad } U'''|^2$  и из формулы Гаусса - Остроградского для  $\vec{X}$  получаем:

$$\oint_{S[V]} U'''(p) \cdot \lambda(p) \cdot \frac{\partial U'''(p)}{\partial n} dS = \int_V \lambda(a) \cdot (\nabla U'''(a))^2 dV. \quad (2.35)$$

Если мы докажем, что при выполнении некоторых условий левая часть равенства (2.35) равна нулю, то (при этих условиях) и правая часть (2.35) равна нулю, то есть  $\int_V \lambda \cdot (\nabla U''')^2 dV = 0$ . Так как скалярное поле  $\lambda > 0$ , а  $(\nabla U''')^2 = |\text{grad} U'''|^2 \geq 0$ , то равенство нулю такого интеграла по области  $V$  возможно лишь в том случае, если  $\text{grad} U''' = 0$ , то есть при  $U'(a) - U''(a) = U'''(a) = C$ , где  $C = \text{const}$  или при  $U'(a) = U''(a) + C$ . Выполнение этого условия, как было уже отмечено, достаточно для единственности решения прямой задачи с целью определения поля  $\vec{f} = -\text{grad} U$ . Выполнение каких условий необходимо для того, чтобы левая часть равенства (2.35) была равна нулю? При постановке и решении прямой задачи выберем область  $V$  не произвольно, а такой, чтобы во всех точках  $p$  на границе  $S[V]$  этой области мы могли задать те или иные краевые условия. Приведём примеры наиболее часто применяемых краевых условий.

*Краевое условие I-го типа.* Пусть из физических условий задачи мы знаем поле  $U$  во всех точках  $p$  границы  $S[V]$ , то есть

$$U(p) = \varphi(p), \quad (2.36)$$

где  $\varphi(p)$  - известная нам функция на  $S[V]$ . Потребуем, чтобы любое решение  $U'$ ,  $U''$  уравнения (2.34) удовлетворяло краевому условию (2.36). Тогда разность этих решений  $U'(p) - U''(p) = U'''(p) = 0$ , а этого достаточно для того, чтобы левая, а, следовательно, и правая части (2.35) были равны нулю и для единственности решения задачи.

*Краевое условие II-го типа.* Пусть область  $V$  выбрана нами так, что на её границе  $S[V]$  известна производная поля  $U$  по направлению нормали  $n$  к  $S[V]$  (см. рис. 2.18). То есть

$$\frac{\partial U(p)}{\partial n} = \psi(p), \quad (2.37)$$

где  $\psi(p)$  - известная нам функция на  $S[V]$ . Потребуем, чтобы любое решение  $U'$ ,  $U''$  уравнения (2.34) удовлетворяло краевому условию (2.37). Тогда разность  $\partial U'(p)/\partial n - \partial U''(p)/\partial n = \partial U'''(p)/\partial n = 0$ . Этого достаточно для того, чтобы левая и правая части (2.35) были равны нулю, что обеспечивает единственность решения прямой задачи.

*Замечания.*

1). При решении прямой задачи в том случае, когда не все источники поля - известны, область пространства  $V$ , для которой мы получаем решение, должна быть выбрана не произвольно, а такой, чтобы на её границе  $S[V]$  могли быть заданы краевые условия. Этим условиям должно удовлетворять решение дифференциального уравнения вида (2.33) для искомого поля  $U$ .

2). Понятно, что на разных частях поверхности  $S[V]$  могут быть заданы краевые условия разного типа. Но эти условия должны быть заданы на всей границе  $S[V]$  области  $V$ .

3). При решении прямых задач теории геофизических методов часто граница  $S[V]$  (или её часть) - это поверхность, "бесконечно удалённая" от тех точек  $a$  области  $V$ , где нас фактически интересует поле  $U$ . В таких случаях краевые условия это - условия "в бесконечности", а областью  $V$  является всё пространство (или, например, полупространство).

4). Если в  $V$  искомое поле  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 U = 0$ , а на границе  $S[V]$  задано краевое условие I-го типа (2.36), то такую прямую задачу называют "краевой задачей Дирихле". В соответствии с изложенным выше каждая задача Дирихле имеет единственное решение для  $U$ . Если в  $V$  искомое  $U$  тоже удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 U = 0$ , но на границе  $S[V]$  задано краевое условие II-го типа (2.37), то это - "краевая задача Неймана". Её решение для  $U$  может быть найдено с точностью до слагаемого  $C = \text{const}$  - однородного скалярного поля  $C$ .

(2). На втором этапе доказательства теоремы единственности будем полагать, что в области  $V$  есть особая поверхность  $S_{oc}$ , на которой могут терпеть разрыв поля  $U$ ,  $\text{grad}U$  или  $\lambda$ . При разрыве  $U$ ,  $\text{grad}U$  или  $\lambda$  на этой поверхности не будут непрерывны  $U'''$ ,  $\text{grad}U'''$  и поле  $\vec{X}$ . В этом случае для того, чтобы к полю  $\vec{X}$  можно было применить формулу Гаусса - Остроградского (1.13), необходимо исключить из области  $V$  ограниченный поверхностями  $S_1$ ,  $S_2$  слой с толщиной  $h \rightarrow 0$  (рис. 2.19,а). Тогда формулу Гаусса- Остроградского можно применить к полю  $\vec{X}$  в области  $V^* = V_1 + V_2$ , ограниченной поверхностями  $S[V]$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ . В этом случае вместо (2.35) получаем:

$$\oint_{S[V]} U'''' \cdot \lambda \cdot \frac{\partial U''''}{\partial n} dS + \int_{S_{1,2}} U'''' \cdot \lambda \cdot \frac{\partial U''''}{\partial n_{1,2}} dS = \int_V \lambda \cdot (\nabla U'''' )^2 dV, \quad (2.38)$$

где  $n_{1,2}$  - нормали к поверхностям  $S_{1,2}$  ( $S_1$  и  $S_2$ ), "наружные" по отношению к области  $V^*$  (см. рис. 2.19,а).

Мы уже знаем, что для обеспечения единственности решения прямой задачи, требуется, чтобы левая часть этого равенства была равна нулю. Для равенства нулю интеграла по  $S[V]$  требуется, чтобы любое решение уравнения (2.33) удовлетворяло краевым условиям. А что нужно для того, чтобы обеспечить равенство нулю интегралов по поверхностям  $S_1$ ,  $S_2$  в левой части (2.38)? Для этого требуется, чтобы в любой паре точек "1", "2" (расположенных на бесконечно малых расстояниях от точки  $p$  на  $S_{oc}$ )

выполнялось равенство:  $U_1'''' \cdot \lambda_1 \cdot \frac{\partial U_1''''}{\partial n_1} + U_2'''' \cdot \lambda_2 \cdot \frac{\partial U_2''''}{\partial n_2} = 0$ . При показанном

направлении нормали  $n$  к  $S_{oc}$  (в сторону области  $V_2$ ) имеем:  $n_1 \parallel n$ ,  $n_2 \uparrow \downarrow n$

и  $\frac{\partial U_1''''}{\partial n_1} = \frac{\partial U_1''''}{\partial n}$ ,  $\frac{\partial U_2''''}{\partial n_2} = -\frac{\partial U_2''''}{\partial n}$ .

Следовательно, для единственности решения прямой задачи в присутствии в области  $V$  особой поверхности требуется, чтобы в окрестности всех точек  $p$  на "двух сторонах"  $S_{1,2}$  поверхности  $S_{oc}$  выполнялось условие  $U_2'''' \cdot \lambda_2 \cdot \frac{\partial U_2''''}{\partial n} = U_1'''' \cdot \lambda_1 \cdot \frac{\partial U_1''''}{\partial n}$ , которое (исходя из физических условий соответствующих прямых задач для некоторых рассматриваемых ниже полей) целесообразно представить в виде двух равенств. На  $S_{oc}$ :

$$a) U_2'''' = U_1'''' , \quad б) \lambda_2 \cdot \frac{\partial U_2''''}{\partial n} = \lambda_1 \cdot \frac{\partial U_1''''}{\partial n} . \quad (2.39)$$

Для выполнения (2.39) на  $S_{oc}$  служат граничные условия (условия сопряжения).

Пусть из физических условий задачи нам известно "поведение" функций  $U$  и  $\lambda \frac{\partial U}{\partial n} = \lambda \cdot grad_n U$  на поверхности  $S_{oc}$  - при перемещении точки наблюдения  $a$  через точку  $p$  (из точки "1" в точку "2"). То есть

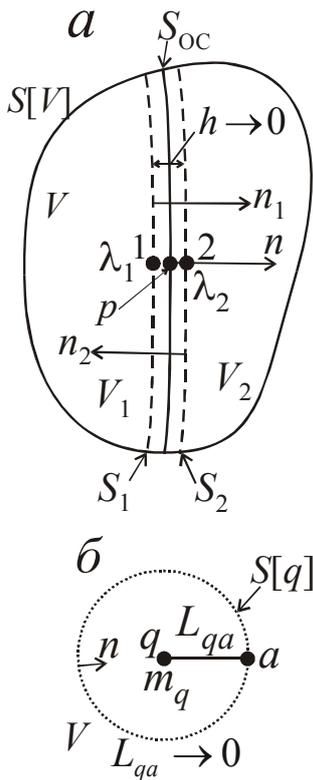
$$\left. \begin{aligned} a) U_2 - U_1 &= \Phi_{12}(p), \\ б) \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} &= \Psi_{12}(p), \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

где  $\Phi_{12}(p)$ ,  $\Psi_{12}(p)$  - известные функции (положения) точки  $p$  на  $S_{oc}$ .

Потребуем, чтобы любое решение  $U'$ ,  $U''$  уравнения (2.34) (кроме краевых условий (2.36), либо (2.37)) удовлетворяло также условиям сопряжения (2.40). Тогда для разности  $U''''(p) = U'(p) - U''(p)$  этих решений на  $S_{oc}$  будут справедливы равенства (2.39). Этого достаточно, чтобы интеграл по поверхностям  $S_{1,2}$  в левой части (2.38) был равен нулю, что обеспечит единственность решения прямой задачи для области  $V$ , в которой есть особая

поверхность  $S_{oc}$ . Понятно, что если в области  $V$  есть несколько поверхностей  $S_{oc}$ , то на каждой из них решение уравнения (2.34) должно удовлетворять условиям сопряжения (2.40).

Если  $U$  - потенциал статического поля  $\vec{f}$  в вакууме, то, в соответствии с (2.29), (2.30), при  $\lambda_{1,2}=1$  и учитывая, что  $\partial U / \partial n = grad_n U = -f_n$  имеем:  $\Phi_{12}(p) = 4\pi\eta(p)$ ,  $\Psi_{12}(p) = -4\pi\sigma(p)$ . В частности, если на  $S_{oc}$  нет двойного слоя ( $\eta(p)=0$ ), то в (2.40)  $\Phi_{12}(p)=0$  и первое условие сопряжения - это непрерывность на  $S_{oc}$  потенциала  $U$ :  $U_2 = U_1$ .



**Рис. 2.19.** К граничным условиям (а) и условию у особой точки (б).

(3). В области пространства  $V$ , для которой мы решаем прямую задачу, могут быть особые точки и особые линии, в окрестности которых поле  $U$  и его производная  $\text{grad}U$  принимают неограниченные значения. Например, в точке  $q$  может находиться точечная масса  $m_q$  (рис. 2.19,б). В таких случаях для того, чтобы к полю  $\vec{X}$  в области  $V$  можно было применить формулу Гаусса - Остроградского (1.13), необходимо исключить из этой области бесконечно малую окрестность таких точек и линий при помощи поверхностей  $S[q]$  и  $S[l]$ . При этом в левых частях равенств (2.35) или (2.38)

появятся слагаемые вида: 
$$\oint_{S[q]} U'''(a) \cdot \lambda(a) \cdot \frac{\partial U'''(a)}{\partial n} dS,$$

$$\oint_{S[l]} U'''(a) \cdot \lambda(a) \cdot \frac{\partial U'''(a)}{\partial n} dS,$$
 где  $a$  - точки, расположенные на бесконечно

малом расстоянии от особых точек или линий. Для обеспечения единственности решение прямой задачи требуется, чтобы эти интегралы были равны нулю. Потребуем, чтобы любое решение  $U'$ ,  $U''$  уравнения (2.34) (кроме краевых условий на  $S[V]$  и условий сопряжения на  $S_{oc}$ ) удовлетворяло также условиям в окрестности особых точек или линий. Если, например, в точке  $q$  находится точечная масса  $m_q$  (см. рис. 2.19,б), а  $U$  - потенциал статического поля  $\vec{f}$ , потребуем, чтобы, в соответствии с (2.18), при  $L_{qa} \rightarrow 0$   $U' \rightarrow \infty$  как  $m_q/L_{qa}$ ,  $U'' \rightarrow \infty$  как  $m_q/L_{qa}$ . Тогда в окрестности точки  $q$  разность  $U'''(a)$  этих решений будет равна нулю и записанный выше интеграл по поверхности  $S[q]$  будет равен нулю. Это обеспечит единственность решения прямой задачи при наличии в области  $V$  особой точки.

Итак, мы рассмотрели теорему единственности решения прямой задачи для скалярного поля  $U$ . Для обеспечения единственности решения уравнение (2.33) следует дополнить некоторыми условиями. Иначе говоря, в тех случаях, когда не все источники поля известны прямая задача должна быть поставлена, как *краевая задача* для области пространства  $V$ . Краевая задача включает следующее.

1). Дифференциальное уравнение вида (2.33) для тех частей области  $V$ , где нет особых поверхностей, точек или линий. В частных случаях это может быть уравнение Лапласа или уравнение Пуассона.

2). Краевые условия вида (2.36) или (2.37) на границе  $S[V]$  области  $V$ .

3). Граничные условия (условия сопряжения) вида (2.40) на особых поверхностях  $S_{oc}$  (если в  $V$  есть такие поверхности).

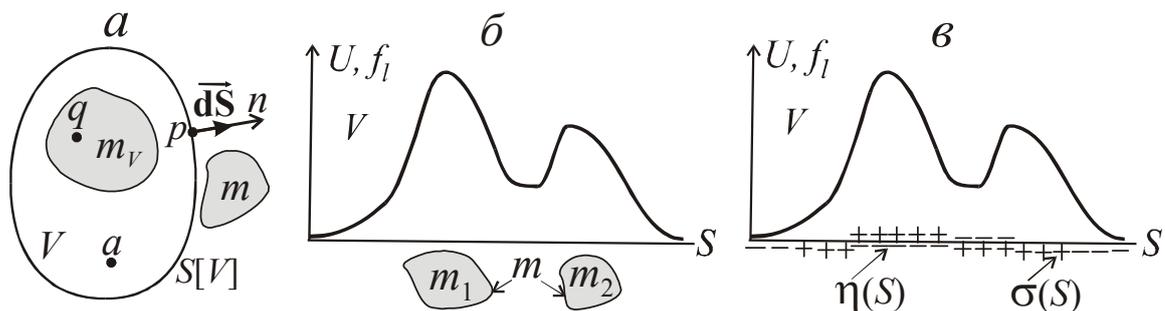
4) Условия в окрестностях особых точек и линий (если в  $V$  есть такие точки или линии).

В соответствии с теоремой единственности правильно поставленная (сформулированная) краевая задача может иметь только одно решение, отвечающее решению соответствующей прямой задачи. Теорема

единственности обосновывает возможность получения решения задачи путём *подбора* этого решения. Решение может быть получено на основе интуиции, опыта решения других задач. Главное то, чтобы это решение удовлетворяло всем условиям правильно поставленной краевой задачи. При подборе решения нередко применяют следующий подход. Решают записанное в соответствующей условиям задачи системе координат уравнение вида (2.33) и из возможных вариантов решения уравнения подбирают те, которые удовлетворяют всем условиям краевой задачи.

### 2.13. Формулы Грина

Пусть нам известно распределение объёмных масс  $m_V$  (их плотности  $\delta(q)$ ) в области пространства  $V$ , но не известны массы  $m$ , находящиеся вне этой области (рис. 2.20,а). Согласно (2.20), потенциал  $U$  поля  $\vec{f}$  связан с плотностью  $\delta$  уравнением Пуассона:  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ , а решение этого уравнения (2.19,а):  $U(a) = \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}}$ . В случае, если расположенные вне области  $V$  массы  $m$  нам не известны, то это выражение для  $U(a)$  определяет потенциал с точностью до слагаемого, отвечающего потенциалу поля,



**Рис. 2.20.** К формулам Грина (а) и неоднозначности решения обратной задачи (б, в).

создаваемого массами  $m$ . В точках  $a$  области  $V$  этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (2.21)  $\nabla^2 U = 0$ , то есть является гармонической функцией. То есть в этом случае мы можем определить  $U(a)$  с точностью до слагаемого, являющегося любой гармонической функцией.

Но, в соответствии с рассмотренной ранее теоремой единственности, при отсутствии в области  $V$  особых поверхностей, точек и линий поле  $U(a)$  может быть определено однозначно (единственным образом), если решение уравнения вида (2.33) (в частных случаях - уравнения Пуассона или Лапласа), если оно удовлетворяет также краевым условиям (2.36) I-го типа:  $U(p) = \varphi(p)$  во всех точках  $p$  границы  $S[V]$  области  $V$ . Попробуем выразить  $U(a)$  через поле  $\delta(q)$  и значения  $U(p)$ . Для этого получим сначала одну из формул Грина.

Рассмотрим векторное поле  $\vec{X}(q) = \varphi(q)\nabla\psi(q) - \psi(q)\nabla\varphi(q) = \varphi(q)\text{grad}\psi(q) - \psi(q)\text{grad}\varphi(q)$ . Применим к  $\vec{X}$  формулу Гаусса -

Остроградского (1.13) для области  $V$ :  $\oint_{S[V]} (\vec{X} d\vec{S}) = \int_V \text{div } \vec{X} dV$ . Примем во

внимание, что в правой части этого уравнения  $\text{div } \vec{X} = (\nabla \cdot \vec{X}) = (\nabla \cdot [\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi]) = \varphi \nabla^2 \psi + (\nabla \varphi \nabla \psi) -$

$-\psi \nabla^2 \varphi - (\nabla \varphi \nabla \psi) = \varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi$ . В левой части этого уравнения скалярное

произведение  $(\vec{X} d\vec{S}) = \varphi (\text{grad } \psi d\vec{S}) - \psi (\text{grad } \varphi d\vec{S}) = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$ .

Таким образом, получаем одну из формул Грина:

$$\oint_{S[V]} \left( \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV. \quad (2.41)$$

В этом выражении скалярные поля  $\varphi$ ,  $\psi$  и их производные в области  $V$  связаны с этими полями и их производными по направлениям нормалей  $n$  на границе  $S[V]$  области  $V$  (см. рис. 2.20,а).

Допустим, что в выражении (2.41)  $\varphi(q) = 1/L_{qa}$ , а  $\psi(q) = U$ . Но при таком выборе выражения для поля  $\varphi(q)$  существует одна проблема. У поля  $\varphi(q) = 1/L_{qa}$  есть особая точка: при  $L_{qa} \rightarrow 0$  имеем  $\varphi(q) \rightarrow \infty$ , то есть для того, чтобы выражение (2.41) имело смысл, бесконечно малую окрестность точки  $a$  необходимо исключить из той области  $V$ , к которой применяем формулу (2.41). После ряда преобразований (см. [1], стр. 120- 122) получаем из (2.41) следующее выражение:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} U(p) d\omega + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla^2 U(q) dV}{L_{qa}}, \quad (2.42)$$

где, в соответствии с (2.5),  $d\omega = \frac{(\vec{L}_{ap} d\vec{S})}{L_{ap}^3}$  - угол видимости ориентированной

элементарной площадки  $dS$  из точки  $a$  (см. рис. 2.20,а). Выражение (2.42) иногда называют "основная формула Грина". Оно определяет поле  $U(a)$  в произвольной точке  $a$  области  $V$  при известных значениях производной  $\nabla^2 U(q)$  в точках  $q$  этой области и величинах  $U(p)$  и  $\partial U(p)/\partial n$  на границе  $S[V]$  области  $V$ .

Если  $U$  - потенциал статического поля  $\vec{f}$ , то  $\nabla^2 U(q) = -4\pi\delta(q)$  и из (2.42) получаем:

$$U(a) = \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qa}} + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} U(p) d\omega + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} dS. \quad (2.43)$$

В соответствии с (2.19,а) первое слагаемое в правой части этого выражения - это потенциал поля  $\vec{f}$  масс, находящихся в области  $V$ . Из (2.43) следует, что при неизвестных массах  $m$ , находящиеся вне области  $V$  сведения о них могут заменить известные значения  $U(p)$  и  $\partial U(p)/\partial n$  на границе  $S[V]$ . Если в

области  $V$  нет источников поля  $\vec{f}$  ( $\delta(q) = 0$ ), то есть область  $V$  - вакуум (или воздух), то из (2.43) получаем:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} U(p) d\omega. \quad (2.44)$$

То есть значения  $U(a)$  в точках  $a$  области  $V$ , где нет источников поля полностью определяют величины  $U(p)$  и  $\partial U(p)/\partial n$  на границе  $S[V]$ .

Так как угол видимости  $d\omega = dS \cos(\vec{L}_{ap}, n)/L_{ap}^2$ , а  $\cos(\vec{L}_{ap}, n) = \partial L_{ap}/\partial n$ , то выражение (2.44) можем представить в виде:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \left[ \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} + \frac{1}{L_{ap}^2} \frac{\partial L_{ap}}{\partial n} U(p) \right] dS. \quad (2.44, a)$$

Обозначая в правой части (2.44)  $\sigma(p) = (\partial U(p)/\partial n)/(4\pi)$   $\eta(p) = -U(p)/(4\pi)$ , получаем:

$$U(a) = \oint_{S[V]} \frac{\sigma(p) dS}{L_{ap}} + \left( - \oint_{S[V]} \eta(p) d\omega \right). \quad (2.45)$$

Сравним это равенство с выражениями (2.19), (2.25) для потенциалов поля  $\vec{f}$  простого слоя (с поверхностной плотностью  $\sigma$ ) и двойного слоя (с поверхностной плотностью дипольных моментов  $\eta$ ):  $U(a) = \int_S \frac{\sigma(q) dS}{L_{qa}}$ ,

$U(a) = - \int_S \eta(q) d\omega(a)$ . Видно, что первое и второе слагаемые в правой части

(2.45) - это потенциалы полей  $\vec{f}$ , создаваемых соответственно простым слоем и двойным слоем на границе  $S[V]$  области  $V$ . Отсюда следует что поле  $\vec{f}$  любых источников, расположенных вне области  $V$  можно заменить в этой области полями простого и двойного слоёв на границе  $S[V]$ .

На рис. 2.20,б,в сделана попытка проиллюстрировать то, что, в принципе, наблюдаемое у поверхности Земли поле любых находящихся в Земле масс можно заменить полем простого и двойного слоёв на поверхности Земли. Это показывает, что решение обратных задач геофизики для поля  $\vec{f}$  (определение источников поля по измеренным у поверхности Земли характеристикам поля)- не однозначно. С этим связана необходимость применения некоторых специальных методов при решении обратных задач в ряде геофизических методов.

#### 2.14. Функция Грина. Интеграл Пуассона для полупространства

Пусть в области пространства  $V$  (см. рис. 2.20,а) нет масс  $m_V$ , то есть плотность  $\delta(q)=0$ . Тогда в точках  $a$  области  $V$  потенциал  $U$  поля  $\vec{f}$  удовлетворяет уравнению Лапласа (2.21)  $\nabla^2 U = 0$  и для него справедливо выражение (2.44). Согласно этому выражению, потенциал  $U(a)$  в точках  $a$

полностью определяют значения потенциала  $U(p)$  и его нормальной производной  $\partial U(p)/\partial n$  на границе  $S[V]$ . Но, согласно рассмотренной выше теореме единственности, если в  $V$  имеем  $\nabla^2 U = 0$ , то поле  $U(a)$  однозначно определяют только лишь значения  $U(p)$ , то есть заданные краевые условия I-го типа (2.36). Это - имеющая единственное решение (для данной области  $V$  при заданных  $U(p)$ ) краевая задача Дирихле. Можно ли выразить в таком случае  $U(a)$  через значения  $U(p)$  на границе  $S[V]$  области  $V$  (а не через  $U(p)$  и  $\partial U(p)/\partial n$ )? В принципе - можно, но для этого требуется знать для этой области функцию Грина, зависящую от формы области  $V$  (или поверхности  $S[V]$ ). Кратко рассмотрим применение такого подхода. Детальнее этот вопрос рассмотрен в [1] (стр. 123- 125). Идея - следующая.

Пусть в выражении (2.41), как и при получении (2.42)- (2.44),  $\psi = U$ , но (вместо  $\varphi = 1/L_{qa}$ ) имеем:

$$\varphi = G(a, q) = 1/L_{qa} + h(a, q), \quad (2.46)$$

где  $G(a, q)$  - функция Грина, а слагаемое  $h(a, q)$  этой функции удовлетворяет следующим условиям.

- 1). В области  $V$   $h(a, q)$  - гармоническая функция, то есть  $\nabla^2 h = 0$ .
- 2). На поверхности  $S[V]$   $h(a, p) = -1/L_{ap}$ .

Так как при  $L_{qa} \neq 0$   $\nabla^2 \frac{1}{L_{qa}} = 0$ , то функция  $G(a, q)$  будет

удовлетворять условиям следующей краевой задачи.

- 1). В области  $V$  при  $L_{qa} \neq 0$   $\nabla^2 G = 0$ .
- 2). На поверхности  $S[V]$   $G(a, p) = 0$ .
- 3). При  $L_{qa} \rightarrow 0$   $G(a, q) \rightarrow \infty$  как  $1/L_{qa}$ .

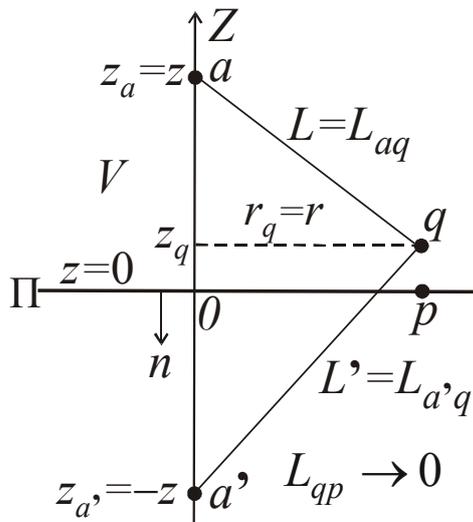
Подставляя в (2.41) выражение (2.46) для  $\varphi$ , после преобразований вместо (2.44) получаем:

$$U(a) = \frac{-1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{\partial G(a, p)}{\partial n} U(p) dS. \quad (2.47)$$

Из (2.47) следует, что при известной функции Грина  $G$  можем выразить  $U(a)$  в любой точке  $a$  области  $V$  через значения  $U(p)$  на границе  $S[V]$  этой области.

Рассмотрим случай, когда область  $V$  - полупространство, границей которого является плоскость  $\Pi$  (рис. 2.21), а также бесконечно удалённая поверхность  $S$  полусферы. При этом можем полагать, что при бесконечно большом радиусе поверхности  $S$  значения  $U(p)$  на  $S$  равны нулю. То есть в (2.47) величину  $U(a)$  определяют только значения  $U(p)$  на плоскости  $\Pi$ .

Не сложно убедиться в том, что функцию Грина  $G$  для этого случая определяет выражение:  $G(a, q) = 1/L_{qa} - 1/L_{qa'} = 1/L - 1/L'$ , где  $a'$  - точка, симметричная точке  $a$  относительно плоскости  $\Pi$  (см. рис. 2.21). Действительно, введём цилиндрические координаты с осью  $Z$ , проходящей через точку  $a$ , ортогональной плоскости  $\Pi$  и началом координат в точке пересечения оси  $Z$  с плоскостью  $\Pi$ . Расстояния  $L$  и  $L'$  и функцию  $G$  определяют выражения:  $L = [r^2 + (z_q - z)^2]^{1/2}$ ,  $L' = [r^2 + (z_q + z)^2]^{1/2}$ ,  $G = [r^2 + (z_q - z)^2]^{-1/2} - [r^2 + (z_q + z)^2]^{-1/2}$ . Проверка показывает, что такая функция  $G$  удовлетворяет всем трём указанным выше требованиям краевой задачи для функции Грина  $G$ .



**Рис. 2.21.** К функции Грина для полупространства  $V$ , ограниченного плоскостью  $\Pi$ .

Принимая во внимание, что наружная по отношению к области  $V$  нормаль  $n \uparrow \downarrow Z$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= -\frac{\partial G}{\partial z_q} = -\frac{\partial [r^2 + (z_q - z)^2]^{-1/2}}{\partial z_q} + \\ &+ \frac{\partial [r^2 + (z_q + z)^2]^{-1/2}}{\partial z_q} = \frac{z_q - z}{[r^2 + (z_q - z)^2]^{3/2}} - \\ &- \frac{z_q + z}{[r^2 + (z_q + z)^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в точках  $p$  плоскости  $\Pi$  (при  $z_q = 0$ )

$$\frac{\partial G(a, p)}{\partial n} = \frac{-2z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-2z}{L_{ap}^3}.$$

Подставляя это выражение в (2.47), получаем интеграл Пуассона для полупространства:

$$U(a) = \frac{z}{2\pi} \int_{\Pi} \frac{U(p) dS}{L_{ap}^3}. \quad (2.48)$$

В соответствии с (2.48), если нам известны значения  $U(p)$  на плоскости  $\Pi$  (практически - на достаточно большом участке этой плоскости), то мы можем вычислить значения  $U(a)$  в произвольной точке  $a$  полупространства  $V$ , в котором нет источников поля. Интеграл Пуассона (2.48) - пример аналитического продолжения гармонической функции, когда при известных значениях поля  $U(p)$  можно определить это поле в произвольной точке  $a$  области  $V$ .

### 3. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ СРЕДЫ

В этой теме рассмотрим уравнения, а также следующие из физических законов и этих уравнений особенности, присущие следующим статическим полям: 1) электростатическое поле  $\vec{E}$  в присутствии проводников; 2)

электростатическое поле  $\vec{E}$  в присутствии диэлектриков; 3) магнитостатическое поле  $\vec{H}$  в присутствии магнетиков. Математическое описание этих полей во втором и третьем случаях - во многом идентично. Поэтому при рассмотрении теории этих полей может быть применён единый подход.

В предыдущей теме были получены некоторые уравнения статического поля  $\vec{f}$  в вакууме. Напомним, что, согласно (2.4,б), статические поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  связаны с полем  $\vec{f}$  равенствами:  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{f}$ ,  $\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \vec{f}$ , где

$\epsilon_0 \approx 10^{-9} / (36 \cdot \pi)$ , Ф/м - электрическая постоянная. Поэтому, например, в соответствии с уравнениями (2.13) поля  $\vec{f}$  в дифференциальной форме (I.  $\text{rot} \vec{f} = 0$ , II.  $\text{div} \vec{f} = 4\pi\delta$ ), для статических полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в вакууме справедливы следующие системы уравнений в дифференциальной форме:

$$\text{I. } \text{rot} \vec{E} = 0, \quad \text{II. } \text{div} \vec{E} = \delta / \epsilon_0; \quad (3.1, a)$$

$$\text{I. } \text{rot} \vec{H} = 0, \quad \text{II. } \text{div} \vec{H} = \delta, \quad (3.1, б)$$

где  $\delta$  - объёмные плотности источников (соответственно) полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ .

В соответствии с (2.32), поверхностные формы уравнений для статических полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в вакууме можем представить в виде:

$$\text{I. } E_\tau^{(2)} - E_\tau^{(1)} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau}, \quad \text{II. } E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(q); \quad (3.2, a)$$

$$\text{I. } H_\tau^{(2)} - H_\tau^{(1)} = -\frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau}, \quad \text{II. } H_n^{(2)} - H_n^{(1)} = \sigma(q). \quad (3.2, б)$$

Согласно (2.12), интегральные формы уравнений для статических полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  в вакууме:

$$\text{I. } \oint_l (\vec{E} d\vec{l}) = 0, \quad \text{II. } \oint_{S[V]} (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} m_V = \frac{1}{\epsilon_0} e_V; \quad (3.3, a)$$

$$\text{I. } \oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = 0, \quad \text{II. } \oint_{S[V]} (\vec{H} d\vec{S}) = m_V = m_V^{\text{магн}}, \quad (3.3, б)$$

где  $e_V$  - электрический заряд в области пространства  $V$ , а  $m_V^{\text{магн}}$  - (физически фиктивная) "магнитная масса" - алгебраическая сумма магнитных полюсов в  $V$ .

Приведём размерности величин, входящих в уравнения (3.1)- (3.3) полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ :  $[E]=\text{В/м}$ ,  $[H]=\text{А/м}$ , где "В"-вольты, "А"- амперы. Размерности источников поля  $\vec{E}$ :  $[e]=\text{Кл}$  (кулоны),  $[\delta]=\text{Кл/м}^3$ ,  $[\sigma]=\text{Кл/м}^2$ . Если определить понятие "физически фиктивной магнитной массы" и её плотностей так, как это сделано в учебнике [1], то размерности источников поля  $\vec{H}$ :  $[m]=\text{А}\cdot\text{м}$ ,  $[\delta]=\text{А/м}^2$ ,  $[\sigma]=\text{А/м}$ ,

### 3.1. Среда. Модели среды

На многие, применяемые в геофизических методах поля, оказывают влияние тела, отличающиеся от других тел по тем или иным физическим свойствам. *Среда* (в теории геофизики)- это совокупность расположенных определённым образом в пространстве тел (объектов), которые оказывают влияние на то или иное физическое поле (а, в отсутствие поля, эти объекты могут и не создавать поля). Для гравитационного поля  $\vec{G}$  такие объекты - неизвестны, поэтому в этой теме поле  $\vec{G}$  не рассматриваем. На электростатическое поле  $\vec{E}$  оказывают влияние проводники и диэлектрики, а на магнитостатическое поле  $\vec{H}$  - тела, называемые магнетиками. Как и в предыдущей теме, будем применять "макроскопический подход" и полагать, что среда - "сплошная" (отвлекаясь от молекулярного строения вещества, а также от многофазности и микроструктуры таких сред, как горные породы). При этом в каждом элементарном объёме  $dV$  среды имеется множество атомов и молекул и их "поведение" можно полагать осреднённым для совокупности таких элементарных "масс" в объёме  $dV$  - возможных источников поля. Для количественной характеристики тех или иных свойств среды, оказывающих влияние на различные поля, служат *параметры среды*  $\lambda = \epsilon, \mu, \gamma, \dots$ .

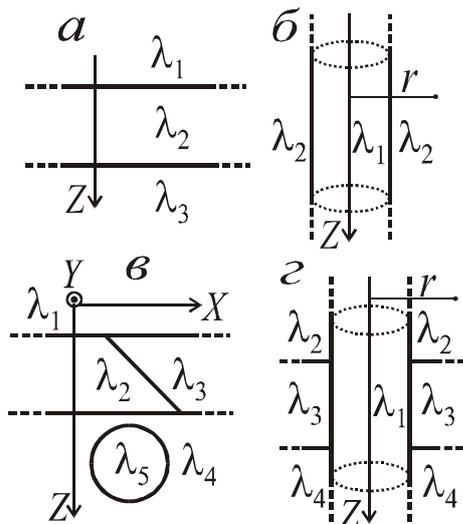
Реальные среды, в частности такие среды, как горные породы, очень сложны. Поэтому в геофизике, как при решении прямых, так и при решении обратных задач, заменяют реальные среды *моделями среды*. Такие модели должны отражать основные характеристики (особенности "строения") среды, оказывающие существенное влияние на поле.

Применяют различные классификации моделей среды. Приведём примеры. Различают, например, *изотропные* и *анизотропные* среды. Анизотропия горных пород может быть обусловлена, например, трещиноватостью, рассланцеванностью или микрослоистостью. В отличие от изотропных моделей среды у анизотропных моделей среды параметры среды  $\lambda$  зависят от направления. Для изотропных моделей среды  $\lambda$  - скалярное поле, а для анизотропных сред -  $\lambda$  - тензорное поле. Далее, за исключением раздела 4.3, будем полагать, что среда - изотропна и  $\lambda$  - скалярное поле.

Применяют также *кусочно-однородные* и *градиентные* модели среды. В первом случае модель среды состоит из порознь однородных областей  $V_n$ , в каждой из которых  $\text{grad } \lambda = \nabla \lambda = 0$ . На границах областей  $V_n$  параметр  $\lambda$  терпит разрыв (рис. 3.1). Реже пользуются градиентными моделями с "плавным" изменением  $\lambda$ . В таких моделях среды  $0 < \text{grad } \lambda < \infty$ . Приведём ещё одну классификацию моделей среды по степени "сложности их геометрического строения".

1). Самая простая модель- безграничная однородная среда. У такой модели среды во всём пространстве  $\text{grad } \lambda = \nabla \lambda = 0$ .

2). 1D- модель среды. Это означает, что может быть выбрана такая система координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , чтобы параметр среды  $\lambda$  зависел только от



**Рис. 3.1.** Примеры 1-D (а, б) и 2-D (в, г) моделей среды.

одной координаты. На рис. 3.1,а приведен пример применяемой в теории "структурных" методов геофизики горизонтально-слоистой модели среды. В декартовых, либо цилиндрических, координатах с осью  $Z$  по нормали к плоско-параллельным границам слоёв параметр среды  $\lambda$  зависит только от координаты  $z$ . На рис. 3.1,б приведен пример применяемой в теории геофизических методов исследований скважин 1D- модели среды с цилиндрической границей. В цилиндрических координатах с осью  $Z$  по оси неограниченного по высоте кругового цилиндра параметр  $\lambda$  зависит только от

координаты  $r$ . Заметим, что для 1D- моделей среды решения прямых задач теории геофизических методов могут быть получены в аналитическом виде. Иными словами искомые характеристики поля могут определены в явном виде (выражены через параметры модели среды и заданного возбудителя поля).

3). 2D- модель среды. Для таких моделей среды может быть выбрана такая система координат, в которой параметр  $\lambda$  зависит от двух координат. На рис. 3.1,в в декартовых координатах  $\lambda = \lambda(x, z)$ , то есть модель среды - одинакова в любой плоскости  $y = \text{const}$ . На рис. 3.1,з для осесимметричной модели среды в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  при соответствующем выборе оси  $Z$  для  $\lambda$  имеем:  $\lambda = \lambda(r, z)$ , то есть  $\lambda$  не зависит от координаты  $\varphi$ ; модель среды - одинакова в любой полуплоскости  $\varphi = \text{const}$ .

3). 3D- модель среды. Параметр  $\lambda$  в любой системе координат зависит от трёх координат. Заметим, что для 2D- и 3D- моделей среды решение прямых задач не может быть получено в аналитическом виде. Для их решения применяют численные методы.

Почему есть тела, оказывающие влияние на статические поля? Проще всего пояснить это на следующем примере.

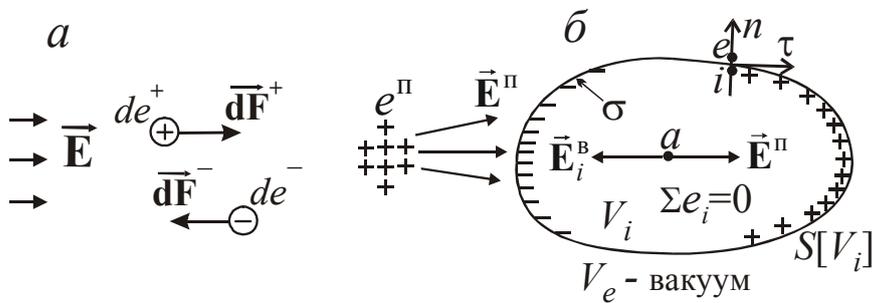
### 3.2. Проводник в электростатическом поле $\vec{E}$

В телах, называемых проводниками, есть свободные микроскопические заряды (ионы, электроны), которые могут совершать направленное (упорядоченное) перемещение под действием приложенных к ним сил. Для удобства рассуждений далее будем полагать, что речь идёт о ионном проводнике, в котором имеются как отрицательные, так и положительные

способные свободно перемещаться микроскопические заряды, например  $\text{Cl}^-$  и  $\text{Na}^+$ .

Напомню, что напряжённость электрического поля  $\vec{E}(a)$  численно равна той силе, которая будет действовать на единичный положительный точечный заряд, если поместить его в точку  $a$ . На находящиеся в поле  $\vec{E}$  положительный и отрицательный микроскопические заряды  $de^+$  и  $de^-$  будут действовать силы  $d\vec{F}^+$  и  $d\vec{F}^-$ , причём  $d\vec{F}^+ \parallel \vec{E}$ , а  $d\vec{F}^- \uparrow \downarrow \vec{E}$  (рис. 3.2,а).

Пусть занимающий область пространства  $V_i$  проводник - электрически нейтрален, его суммарный заряд равен нулю. В отсутствие поля  $\vec{E}$  в каждом элементарном объёме  $dV$  такого проводника алгебраическая сумма микроскопических зарядов равна нулю:  $\sum de^+ + \sum de^- = 0$ . Поэтому (в отсутствие поля  $\vec{E}$ ) такой проводник не будет создавать электрического поля.



**Рис. 3.2.** Свободные микроскопические заряды  $de^+$ ,  $de^-$  в электрическом поле  $\vec{E}$  (а); проводник в первичном электростатическом поле  $\vec{E}^{\text{п}}$  (б).

Допустим теперь, что некоторые электрические заряды  $e^{\text{п}}$  создают в вакууме (в отсутствие среды) первичное электрическое поле  $\vec{E}^{\text{п}}$  (рис.

3.2,б). Если мы поместим в это поле электрически нейтральный проводник, то на микроскопические заряды в проводнике будут действовать силы  $d\vec{F}^+$  и  $d\vec{F}^-$ , в результате чего эти свободные заряды будут перемещаться к поверхности  $S[V_i]$  проводника:  $de^+$  - по направлению электрического поля, а  $de^-$  - в противоположную сторону. Но, если окружающая проводник область  $V_e$  - вакуум (изолятор), то пересечь поверхность  $S[V_i]$  эти заряды не смогут и будут накапливаться в микроскопически тонком слое у поверхности проводника. При применении макроскопического подхода это-поверхностные заряды в виде простого слоя с поверхностной плотностью  $\sigma$ . На одной части границы  $S[V_i]$  проводника образуется избыток положительных зарядов, на другой - избыток отрицательных зарядов. Эти заряды создают вторичное электрическое поле  $\vec{E}^{\text{В}}$  и фактически будет существовать суммарное электрическое поле  $\vec{E} = \vec{E}^{\text{п}} + \vec{E}^{\text{В}}$ , отличающееся от того поля  $\vec{E}^{\text{п}}$ , которое мы наблюдали бы в отсутствие проводника.

Опыт показывает, что при статическом поле  $\vec{E}^{\text{п}}$  через очень короткое время (после "помещения" проводника в поле  $\vec{E}^{\text{п}}$ ) поле  $\vec{E}$  перестанет

меняться со временем. То есть суммарное поле  $\vec{E}$ , а, следовательно, и вторичное поле  $\vec{E}^B = \vec{E} - \vec{E}^n$ , будут статическими полями. Это означает, что на микроскопические заряды внутри проводника перестали действовать силы  $d\vec{F}^+$  и  $d\vec{F}^-$  и эти заряды прекратили упорядоченное движение. Так как фактически на заряды действует суммарное поле  $\vec{E}$ , то, в случае статического поля, это означает, что в каждой точке  $a$  внутри проводника (в области  $V_i$ ) суммарное поле  $\vec{E}_i = 0$ , а вторичное поле  $\vec{E}^B(a) = -\vec{E}^n(a)$  (рис. 3.2,б). Заряды, расположенные в микроскопически тонком слое у поверхности проводника, называют *индуцированными*, а явление, при котором эти заряды распределяются таким образом, что суммарное электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль, называют *электростатической индукцией*. Отметим некоторые особенности, присущие этому явлению.

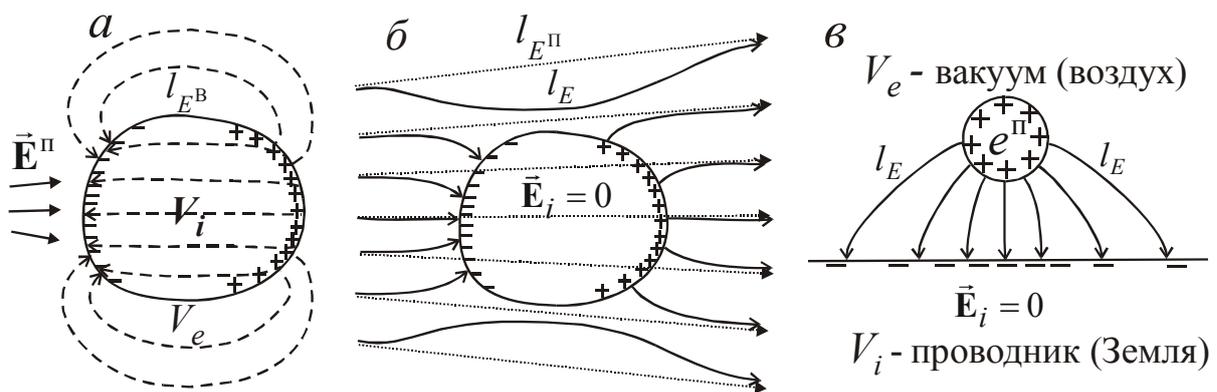
1). Итак, в случае статического поля  $\vec{E}$  в занятой проводником области  $V_i$  суммарное поле  $\vec{E}(a) = \vec{E}^n(a) + \vec{E}^B(a) = 0$ , а вторичное поле индуцированных зарядов  $\vec{E}^B(a) = -\vec{E}^n(a)$ . Из II-го уравнения в (3.1,а)  $\text{div}\vec{E} = \delta / \varepsilon_0$  следует, что в проводнике объёмная плотность электрических зарядов  $\delta_i = \varepsilon_0 \text{div}\vec{E}_i$ . Так как в  $V_i$   $\vec{E}_i = 0$ , то  $\text{div}\vec{E}_i = 0$  и  $\delta_i = 0$ . То есть и в присутствии  $\vec{E}^n$  в каждом элементарном объёме  $dV$  проводника алгебраическая сумма микроскопических зарядов осталась равной нулю. Все источники поля  $\vec{E}^B$  лежат на поверхности проводника.

2). На этой поверхности  $S[V_i]$ - нет двойного слоя ( $\eta=0$ ), но есть индуцированные электрическим полем поверхностные заряды в виде простого слоя с поверхностной плотностью  $\sigma$ . В соответствии с (3.2,а), в точках  $i$ ,  $e$ , лежащих на разных сторонах  $S[V_i]$  (см. рис. 3.2,б), при  $L_{ie} \rightarrow 0$  для тангенциальной и нормальной к  $S[V_i]$  компонент электростатического поля  $\vec{E}$  справедливы равенства: I.  $E_\tau(e) = E_\tau(i)$ , II.  $\sigma = \varepsilon_0(E_n(e) - E_n(i))$ . Но в находящейся в проводнике точке  $i$  поле  $\vec{E}(i) = 0$  и его компоненты  $E_\tau(i) = 0$ ,  $E_n(i) = 0$ . Следовательно, для компонент поля в расположенной вне проводника у его поверхности точки  $e$  получаем: I.  $E_\tau(e) = 0$ , II.  $\sigma = \varepsilon_0 E_n(e)$ . Из I-го равенства следует, что в точках  $e$  у поверхности проводника  $\vec{E}(e) = \vec{E}_n(e)$ , то есть векторы  $\vec{E}(e)$  в этих точках направлены по нормальям к поверхности  $S[V_i]$ . Из II-го равенства следует, что в точках  $e$  у поверхности проводника компонента  $E_n(e)$  и плотность поверхностных зарядов связаны прямой пропорциональной зависимостью.

Но здесь же, на этом простейшем примере, можем увидеть то, какие проблемы существуют при решении прямых задач теории поля в присутствии среды. В равенстве  $\sigma = \varepsilon_0 E_n(e)$  множитель  $E_n(e)$ - это компонента

суммарного поля, то есть  $E_n(e) = E_n^{\text{п}}(e) + E_n^{\text{в}}(e)$ , а поле  $\vec{E}^{\text{в}}$  с компонентой  $E_n^{\text{в}}$  создают поверхностные заряды с плотностью  $\sigma$ , распределение которых на  $S[V_i]$  зависит от суммарного поля поле  $\vec{E} = \vec{E}^{\text{п}} + \vec{E}^{\text{в}}$ . Если, например, прямая задача теории электростатического поля поставлена так, что заданными являются поле  $\vec{E}^{\text{п}}$ , а также - положение в пространстве, форма и размеры проводника в  $V_i$ , а искомым является поле  $\vec{E}^{\text{в}}$ , то нельзя полагать, что известны источники поля  $\vec{E}^{\text{в}}$ . Это обусловлено тем, что распределение плотности  $\sigma$  этих источников на  $S[V_i]$  зависит от искомого поля  $\vec{E}^{\text{в}}$ . При этом, как правило, "прямой" расчёт поля  $\vec{E}^{\text{в}}$  - невозможен и требуется искать решение соответствующей краевой задачи (см. раздел 2.12).

3). Отметим теперь некоторые "геометрические особенности", обычно присущие вторичному ( $\vec{E}^{\text{в}}$ ) и суммарному ( $\vec{E}$ ) электростатическим полям в присутствии проводника. На рис. 3.3,а показаны векторные линии  $l_{E^{\text{в}}}$  поля



**Рис. 3.3.** Проводник в электростатическом поле. Примеры векторных линий  $l_{E^{\text{в}}}$  (а) и векторных линий  $l_{E^{\text{п}}}$ ,  $l_E$  (б). "Неудачная попытка" создать постоянное электрическое поле в Земле при помощи заряда  $e^{\text{п}}$  - источника электростатического поля  $\vec{E}^{\text{п}}$  (в).

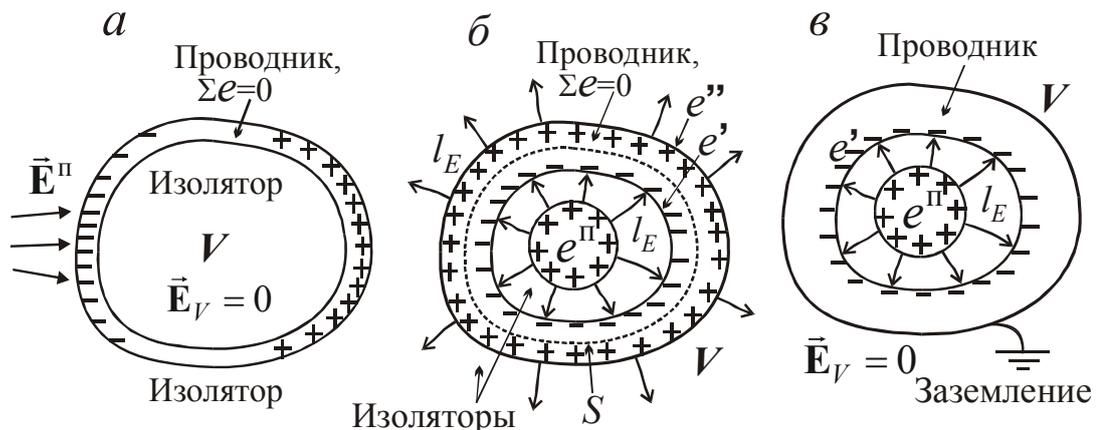
$\vec{E}^{\text{в}}$ , создаваемого индуцированными на поверхности проводника зарядами. Эти линии, конечно, начинаются на положительных индуцированных зарядах и оканчиваются на отрицательных зарядах. Как уже было отмечено для электрически нейтрального проводника алгебраическая сумма этих зарядов равна нулю. Поэтому ясно, что, если расстояние от расположенных вне проводника точек наблюдения до проводника - много больше, чем линейные размеры проводника, то поле  $\vec{E}^{\text{в}}$  - подобно полю диполя (см. раздел 2.6). На рис. 3.3,б пунктиром показаны векторные линии  $l_{E^{\text{п}}}$  первичного поля  $\vec{E}^{\text{п}}$ , а сплошными линиями - то, какими, при этом, будут векторные линии  $l_E$  суммарного поля  $\vec{E}$ . Понятно, что различие этих полей обусловлено

влиянием на  $\vec{E}$  поля  $\vec{E}^B$ . Это различие проявляется не только внутри проводника, но и на большом удалении от него.

Рис. 3.3,в иллюстрирует то, что создать в проводнике (в частности, в Земле) постоянное электрическое поле при помощи расположенных вне проводника зарядов (источников электростатического поля) - невозможно. Этому препятствует явление электростатической индукции. В разделе 4 убедимся, что создать в проводнике постоянное электрическое поле (сопровождающееся постоянным электрическим током) можно про помощи зарядов, находящихся в проводнике или на его поверхности.

### 3.3. Электростатическое экранирование

Тем, что электростатическое поле внутри проводника (в области пространства  $V_i$ ) равно нулю пользуются для экранирования занятой изолятором области пространства  $V_i$  от внешних электростатических полей. Для такого экранирования достаточно, чтобы область  $V_i$  была окружена проводящим "экраном" (практически - тонким слоем проводника). В соответствии с изложенным выше на внешней поверхности такого "экрана" будут существовать индуцированные электростатическим полем заряды и суммарное электростатическое поле в такой области  $V_i$  будет равно нулю (рис. 3.4,а).



**Рис. 3.4.** К электростатическому экранированию: локальной области  $V$  от "внешнего" электростатического поля  $\vec{E}^{\pi}$  (а), неограниченной снаружи "внешней" области  $V$  от поля  $\vec{E}^{\pi}$  локального заряда  $e^{\pi}$  (б, в).

Иной является ситуация, когда требуется экранировать от электростатического поля  $\vec{E}^{\pi}$  заряда  $e^{\pi}$  "внешнюю" область пространства  $V$  (рис. 3.4,б). Если мы "окружим" заряд  $e^{\pi}$  слоем электрически нейтрального проводника, то в присутствии поля  $\vec{E}^{\pi}$  на внутренней и внешней поверхностях этого проводника будут существовать индуцированные поверхностные заряды  $e'$  и  $e''$  (рис. 3.4,б) с поверхностными плотностями  $\sigma'$  и  $\sigma''$ . Если этот проводник- электрически нейтрален, то  $e'' = -e'$ .

Не сложно доказать, что заряд  $e' = -e''$  (а тогда заряд  $e'' = -e' = e''$ ). Применим закон Гаусса (2.8) к области пространства, ограниченной замкнутой поверхностью  $S$  расположенной внутри окружающего заряд  $e''$  слоя проводника. Так как электростатическое поле  $\vec{E} = \vec{f}/(4\pi\epsilon_0)$ , то из (2.8) получаем:  $\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = (e'' + e')/\epsilon_0$ . Но электростатическое поле  $\vec{E}$  на поверхности  $S$  (внутри проводника) равно нулю. Следовательно,  $\oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = 0$ ,  $e'' + e' = 0$ ,  $e' = -e''$  и  $e'' = e''$ . Из этого следует, что (при  $e'' > 0$ ) все векторные линии, начинающиеся на заряде  $e''$ , оканчиваются на заряде  $e'$ , и фактически во внешней области пространства  $V$  будет существовать поле  $\vec{E}$ , создаваемое зарядами  $e''$ , индуцированными на внешней поверхности проводящего слоя (рис. 3.4,б).

Отсюда следует, что для того, чтобы экранировать внешнюю область пространства  $V$  от электростатического поля  $\vec{E}$  заряда  $e''$  при помощи окружающего этот заряд проводящего слоя, требуется "снять" заряд  $e'$ , индуцированный на внешней поверхности этого слоя ("экрана"). Для этого достаточно (электрически) соединить этот слой с проводником, имеющим очень большую ёмкость (по сравнению с ёмкостью "экрана", практически "заземлить" этот проводящий слой (рис. 3.4,в).

\*\*\*\*\*

Рассмотрим теперь ряд вопросов, связанных с теорией электростатического поля  $\vec{E}$  в присутствии диэлектриков и магнитостатического поля  $\vec{H}$  в присутствии магнетиков. В математическом описании этих полей - много общего, что делает удобным рассмотреть "совместно" некоторые закономерности, присущие обоим этим полям.

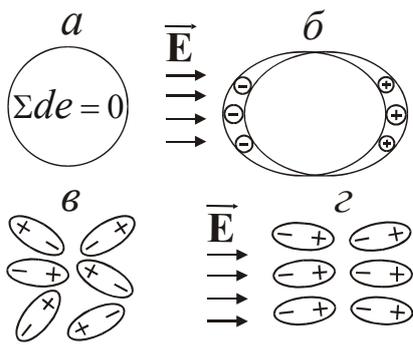
### 3.4. Векторы поляризации и намагниченности

В диэлектриках (или магнетиках) могут находиться источники соответственно электростатического поля  $\vec{E}$  (или магнитостатического поля  $\vec{H}$ ). Существование этих источников обусловлено такими явлениями, как поляризация диэлектриков или намагничение магнетиков.

Различают два основных типа *поляризации диэлектриков*.

1). Поляризация смещения. Электрически нейтральные атомы имеют положительно заряженное ядро и отрицательно заряженную электронную оболочку. У таких атомов суммарный электрический заряд  $\sum de = 0$  (рис. 3.5,а). Но под действием электрического поля  $\vec{E}$ , оказывающем силовое действие на электрические заряды, нарушается симметрия электрических зарядов в атомах, так на положительные и отрицательные микроскопические заряды действуют противоположно направленные силы (рис. 3.2,а). Схематично это явление показано на рис. 3.5,б. В результате каждый атом (и

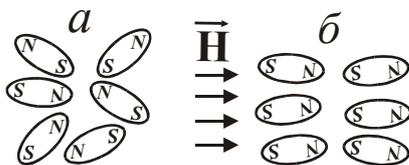
каждый, заполненный такими атомами, элементарный объём  $dV$  поляризованной среды) становится подобным электрическому диполю.



**Рис. 3.5.** Поляризация смещения (а, б) и ориентационная поляризация (в, г).

У электрически нейтральных молекул положительно- и отрицательно заряженные ионы могут быть расположены не симметрично относительно центра таких молекул. Широко распространённым примером такого типа молекул являются молекулы воды  $H^2O$ , которые (в первом приближении) могут быть аппроксимированы элементарными электрическими диполями. В отсутствие поля  $\vec{E}$  такие молекулы расположены "в хаотичном беспорядке" (рис. 3.5,в) и не создают электрического поля. Но в присутствии поля  $\vec{E}$  (рис. 3.5,г) силы, действующие на положительные и отрицательные микроскопические заряды, вызывают некоторую "упорядоченность" в ориентации дипольных моментов таких микроскопических диполей, чему частично препятствует хаотическое (тепловое) движение таких молекул.

Намагничивание магнетиков может быть обусловлено различными физическими явлениями. Но в приближении кулоновой модели магнетизма каждая молекула магнетика (по аналогии со случаем ориентационной поляризации диэлектрика) может быть уподоблена микроскопическому магнитному диполю с полюсами  $N$  и  $S$  (рис. 3.6,а).



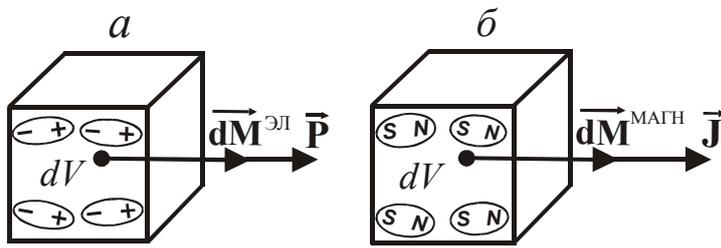
**Рис. 3.6.** Кулонова модель намагничивания.

В отсутствие магнитного поля  $\vec{H}$  и постоянной намагниченности такие (хаотически распределённые в среде) диполи не создают магнитного поля. Но под действием магнитного поля (или при постоянной намагниченности) магнитные моменты микроскопических магнитных диполей ориентированы, преимущественно, в каком либо одном направлении (рис. 3.6,б).

В случаях, показанных на рис. 3.5,б, 3.5,г, 3.6,б, каждый элементарный объём  $dV$  поляризованной или намагниченной среды имеет дипольный момент  $d\vec{M}$ : электрический дипольный момент  $d\vec{M}^{эл}$  в поляризующейся среде (рис. 3.7,а) или магнитный дипольный момент  $d\vec{M}^{магн}$  в намагничивающейся среде (рис. 3.7,б). Поляризацию или намагничивание среды характеризуют вектор поляризации  $\vec{P}$  и вектор намагничивания (намагниченности)  $\vec{J}$ :

$$1. \vec{P} = \frac{d\vec{M}^{эл}}{dV}, \quad 2. \vec{J} = \frac{d\vec{M}^{магн}}{dV}. \quad (3.4)$$

Если область  $V$  среды объёмом в  $1 \text{ м}^3$  поляризована или намагничена однородно, то векторы  $\vec{\mathbf{P}}$  и  $\vec{\mathbf{J}}$  численно равны соответственно электрическому и магнитному дипольным моментам такой области  $V$ .



**Рис. 3.7.** К вектору поляризации  $\vec{\mathbf{P}}$  (а) и вектору намагниченности  $\vec{\mathbf{J}}$  (б).

Различают временную (индуктивную) и постоянную (остаточную) поляризации или намагниченности:  $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}^{\text{вр}} + \vec{\mathbf{P}}^0$ ,  $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}^{\text{вр}} + \vec{\mathbf{J}}^0$ . Временная поляризация  $\vec{\mathbf{P}}^{\text{вр}}$  и индуктивная намагниченность  $\vec{\mathbf{J}}^{\text{вр}}$

существуют под действием полей  $\vec{\mathbf{E}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$ , соответственно, и равны нулю в отсутствие этих полей. Постоянная поляризация  $\vec{\mathbf{P}}^0$  и остаточная намагниченность  $\vec{\mathbf{J}}^0$  присущи некоторым веществам и существуют даже в том случае, когда поля  $\vec{\mathbf{E}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$  равны нулю. Постоянной (остаточной) намагниченностью  $\vec{\mathbf{J}}^0$  обладают многие распространённые в природе вещества, в частности, горные породы. Постоянная поляризация  $\vec{\mathbf{P}}^0$  свойственна не имеющим широкого распространения в природе веществам (электреты, сегнетоэлектрики). Поэтому в теории электрических и электромагнитных методов геофизики принято полагать, что  $\vec{\mathbf{P}}^0 = 0$  и  $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}^{\text{вр}}$ .

### 3.5. Поле, создаваемое поляризованной или намагниченной средой

Напомню вам полученное в предыдущей теме выражение (2.24) для потенциала  $U(a)$  поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$  диполя с центром в точке  $0$ :  $U(a) = (\vec{\mathbf{p}} \vec{\mathbf{L}}_{0a}) / L_{0a}^3$ . При бесконечно малом по абсолютной величине моменте диполя  $\vec{\mathbf{p}} = d\vec{\mathbf{M}}$  с центром в точке  $q$  для потенциала  $dU(a)$  поля  $d\vec{\mathbf{f}}(a)$  из этого выражения получаем:  $dU(a) = (d\vec{\mathbf{M}} \vec{\mathbf{L}}_{qa}) / L_{qa}^3$ . В соответствии с выражением (3.4) для вектора поляризации  $\vec{\mathbf{P}}$  (или математически идентичным ему выражением для вектора намагниченности  $\vec{\mathbf{J}}$ ) момент  $d\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{P}} dV$ . Следовательно,  $dU(a) = (\vec{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{L}}_{qa}) dV / L_{qa}^3$ . Суммируя выражения для потенциалов  $dU(a)$  полей  $d\vec{\mathbf{f}}(a)$ , создаваемых источниками в занятой поляризованной (или намагниченной) средой области пространства  $V$  (рис. 3.8), получаем:

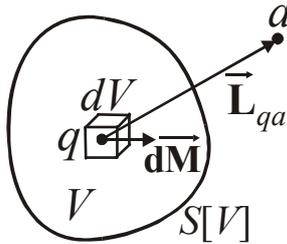
$$U(a) = \int_V \frac{(\vec{\mathbf{P}} \vec{\mathbf{L}}_{qa})}{L_{qa}^3} dV. \quad (3.5)$$

Из равенства (3.5) после некоторых преобразований (см. [1], стр. 137 - 139) можем получить выражение, определяющее потенциал  $U(a)$  поля  $\vec{\mathbf{f}}(a)$ ,

создаваемого занимающей область пространства  $V$  поляризованной (либо намагниченной - с заменой  $\vec{P}$  на  $\vec{J}$ ) средой:

$$U(a) = \int_V \frac{-\operatorname{div} \vec{P}(q) dV}{L_{qa}} + \int_{S_{\text{oc}}} \frac{-(P_n^{(2)} - P_n^{(1)}) dS}{L_{qa}}, \quad (3.6)$$

где  $S_{\text{oc}}$ - особые поверхности, на которых терпит разрыв нормальная к ним компонента  $P_n$  вектора  $\vec{P}$  (либо компонента  $J_n$  вектора  $\vec{J}$ ), а "1", "2" - точки, расположенные на бесконечно малом расстоянии друг от друга на разных сторонах  $S_{\text{oc}}$  (рис. 3.9). В частности, поверхностью  $S_{\text{oc}}$  может быть граница  $S[V]$  области пространства  $V$ .



**Рис. 3.8.** К потенциалу поля, создаваемого поляризованной (или намагниченной) средой.

Согласно (2.19), потенциал  $U(a)$  поля  $\vec{f}(a)$  объёмных масс с объёмной плотностью  $\delta$  и поверхностных масс (в виде простых слоёв) с поверхностной плотностью  $\sigma$  определяет выражение:

$$U(a) = \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qa}} + \int_S \frac{\sigma(q) dS}{L_{qa}}. \quad \text{При сравнении этого}$$

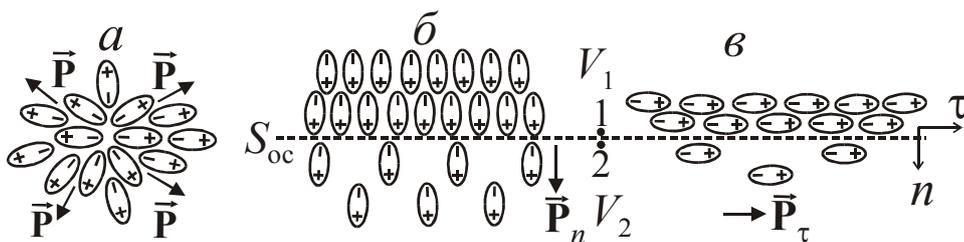
равенства с (3.6) видим, что при определённых условиях в диэлектриках и магнетиках существуют объёмные и поверхностные источники поля, которые называют "связанными" зарядами, массами. Согласно (3.6), объёмную плотность  $\delta_{\text{свз}}$  и поверхностную

плотность  $\sigma_{\text{свз}}$  таких источников электростатического и магнитостатического полей определяют выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{свз}} &= -\operatorname{div} \vec{P}, & \sigma_{\text{свз}} &= -(P_n^{(2)} - P_n^{(1)}) = -\operatorname{Div} \vec{P}, \\ \delta_{\text{свз}} &= -\operatorname{div} \vec{J}, & \sigma_{\text{свз}} &= -(J_n^{(2)} - J_n^{(1)}) = -\operatorname{Div} \vec{J}, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

где  $\operatorname{Div} \vec{P} = P_n^{(2)} - P_n^{(1)}$ ,  $\operatorname{Div} \vec{J} = J_n^{(2)} - J_n^{(1)}$  - поверхностные дивергенции (см. [1], уравнение II в (2.32)).

На рис. 3.9 схематично показано то, по каким причинам в поляризующейся (намагничивающейся) среде существуют связанные источники поля. На рис. 3.9,а видно что, если в малой окрестности точки в поляризованной среде  $\operatorname{div} \vec{P} > 0$ , то в соответствии с (3.7), в этой окрестности существуют связанные заряды с плотностью  $\delta_{\text{свз}} < 0$  (см. также (1.6) и рис. 1.8,б).

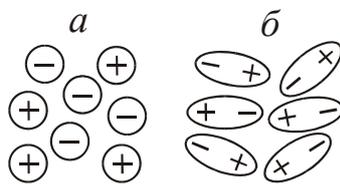


**Рис. 3.9.** Иллюстрации к выражениям (3.7) для плотностей связанных источников поля.

Особая поверхность  $S_{oc}$  на рис. 3.9,б,в разделяет области пространства  $V_1, V_2$ ; нормаль  $n$  к  $S_{oc}$  направлена в область  $V_2$ , а  $\tau$  - любое направление, касательное к  $S_{oc}$ . В показанном на этом рисунке случае абсолютная величина вектора поляризации в области  $V_1$  больше, чем в области  $V_2$ : ( $P^{(1)} > P^{(2)}$ ). В случае, показанном на рис. 3.9,б, векторы поляризации направлены по нормали  $n$ , то есть в точках "1", "2"  $\vec{P}^{(1)} = \vec{P}_n^{(1)}$ ,  $\vec{P}^{(2)} = \vec{P}_n^{(2)}$ , а скалярные компоненты  $P_n^{(1)} > 0$ ,  $P_n^{(2)} > 0$ ,  $P_n^{(1)} > P_n^{(2)}$ . При этом  $P_n^{(2)} - P_n^{(1)} < 0$  и, в соответствии с (3.7), на  $S_{oc}$  существуют связанные поверхностные заряды с плотностью  $\sigma_{свз} > 0$ . На рис. 3.9,в векторы поляризации направлены по касательной к  $S_{oc}$ :  $\vec{P}^{(1)} = \vec{P}_\tau^{(1)}$ ,  $\vec{P}^{(2)} = \vec{P}_\tau^{(2)}$ . В точках "1", "2"  $P_n^{(1)} = 0$ ,  $P_n^{(2)} = 0$  и, в соответствии с (3.7), на  $S_{oc}$  нет связанных поверхностных зарядов.

### 3.6. Полные "массы" (заряды)

Что является источниками электростатического поля? Это - электрические заряды. Электрические микроскопические заряды в проводниках (ионы, электроны) называют *свободными* зарядами (рис. 3.10,а). В ионном проводнике положительные и отрицательные микроскопические заряды при наличии поля  $\vec{E}$  перемещаются (в противоположные стороны) независимо друг от друга. Эти заряды, их объёмную и поверхностную плотности будем обозначать  $e_{свб}$ ,  $\delta_{свб}$ ,  $\sigma_{свб}$ .



**Рис. 3.10.**  
Свободные (а) и  
связанные (б)  
заряды

Как было отмечено в предыдущем вопросе, заряды в поляризующихся средах (диэлектриках) называют *связанными* зарядами. Одинаковые по абсолютной величине разноименные связанные микроскопические заряды - это заряды электрически нейтральных атомов или молекул. Схематично такие заряды можем представить микроскопическими диполями (рис. 3.10,б). Понятно, что под действием поля  $\vec{E}$  эти пары зарядов не "отрываются" друг от друга, а могут лишь принимать некоторую упорядоченную ориентацию.

Связанные заряды, их объёмную и поверхностную плотности будем обозначать  $e_{свз}$ ,  $\delta_{свз}$ ,  $\sigma_{свз}$ . Плотности  $\delta_{свз}$  и  $\sigma_{свз}$  определяют первые два выражения в (3.7). При рассмотрении веществ с постоянной поляризацией мы должны были бы полагать, что  $\vec{P} = \vec{P}^{вр} + \vec{P}^0$  и, в соответствии с (3.7),  $\delta_{свз} = \delta_{вр} + \delta_0$ ,  $\sigma_{свз} = \sigma_{вр} + \sigma_0$ . Но, как было отмечено в разделе 3.4, в теории геофизических методов принято полагать, что  $\vec{P}^0 = 0$  и  $\vec{P} = \vec{P}^{вр}$ . При этом для плотностей связанных электрических зарядов имеем:  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_{свз} = \delta_{вр}$ ,  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_{свз} = \sigma_{вр}$ .

Фактически электростатическое поле  $\vec{E}$  создают *полные электрические заряды*  $e_{\text{плн}} = e_{\text{свб}} + e_{\text{свз}}$ . В общем случае объёмная и поверхностная плотности полных электрических зарядов:  $\delta_{\text{плн}} = \delta_{\text{свб}} + \delta_{\text{свз}}$ ,  $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свб}} + \sigma_{\text{свз}}$ .

В рамках кулоновой модели магнетизма (рис. 3.6) *источниками магнитостатического поля*  $\vec{H}$  являются физически фиктивные (полные) "магнитные массы"  $m = m_{\text{плн}}$ . Понятно, что у поля  $\vec{H}$  нет источников, подобных таким источникам поля  $\vec{E}$ , как электроны или ионы, то есть  $m_{\text{свб}} = 0$ ,  $m_{\text{плн}} = m_{\text{свз}}$ . Так как вектор намагниченности  $\vec{J} = \vec{J}^{\text{вр}} + \vec{J}^0$ , то в соответствии с третьим и четвёртым выражениями в (3.7), для объёмной и поверхностной плотностей источников поля  $\vec{H}$  получаем:  $\delta_{\text{плн}} = \delta_{\text{свз}} = \delta_{\text{вр}} + \delta_0$ ,  $\sigma_{\text{плн}} = \sigma_{\text{свз}} = \sigma_{\text{вр}} + \sigma_0$ . Здесь, например,  $\delta_{\text{свз}} = -\text{div} \vec{J}$ ,  $\delta_{\text{вр}} = -\text{div} \vec{J}^{\text{вр}}$ ,  $\delta_0 = -\text{div} \vec{J}^0$ . Так как  $m_{\text{свб}} = 0$ , то для плотностей свободных источников поля  $\vec{H}$  имеем:  $\delta_{\text{свб}} = 0$ ,  $\sigma_{\text{свб}} = 0$ .

### 3.7. Второе уравнение статического поля в присутствии поляризованной (или намагниченной) среды. Векторы $\vec{D}$ и $\vec{B}$

Как уже было отмечено, в общем случае статические поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  создают все возможные виды их источников. Поэтому в уравнениях (3.1) - (3.3) заряды  $e_V$ , массы и плотности - это полные заряды, массы и плотности. В частности, вторые уравнения в (3.1,а), (3.1,б) в присутствии среды (при  $\vec{P}^0 = 0$ ) следует представить в виде:

$$\text{II. } \text{div} \vec{E} = \frac{\delta_{\text{плн}}}{\epsilon_0} = \frac{\delta_{\text{свб}} + \delta_{\text{свз}}}{\epsilon_0} = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\epsilon_0} - \frac{\text{div} \vec{P}^{\text{вр}}}{\epsilon_0}; \quad (3.8, a)$$

$$\text{II. } \text{div} \vec{H} = \delta_{\text{свз}} = \delta_{\text{вр}} + \delta_0 = \delta_{\text{вр}} + \delta_0 = -\text{div} \vec{J} = -\text{div} \vec{J}^{\text{вр}} - \text{div} \vec{J}^0. \quad (3.8, б)$$

Из этих уравнений следует, что при расчёте статических полей в присутствии среды существует следующая проблема. При решении прямых задач теории этих полей для тех или иных моделей среды поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  являются искомыми величинами. Но при неизвестном поле  $\vec{E}$  неизвестной величиной является также поле  $\vec{P}^{\text{вр}}$ , так как временная поляризация зависит не только от модели среды, но и от суммарного поля  $\vec{E}$ . То есть уравнение (3.8,а) не является уравнением с одним неизвестным полем. Аналогично в уравнении (3.8,б) при искомом поле  $\vec{H}$  неизвестным является зависящее от  $\vec{H}$  поле  $\vec{J}^{\text{вр}}$ . Изменим вид уравнений (3.8), чтобы сделать их более удобными при решении прямых задач.

1). Электростатическое поле. Представим уравнение (3.8,а) в следующем виде:  $\epsilon_0 \text{div} \vec{E} + \text{div} \vec{P} = \delta_{\text{свб}}$  или  $\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \delta_{\text{свб}}$ , где  $\vec{P} = \vec{P}^{\text{вр}}$ . Введя обозначение

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (3.9)$$

получаем уравнение для вектора электрической индукции (электрического смещения)  $\vec{D}$ :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \delta_{\text{свб}} \quad (3.10)$$

В отличие от уравнения (3.8,а) для  $\vec{E}$  в правой части уравнения (3.10) для  $\vec{D}$  нет вектора  $\vec{P}^{\text{вп}}$ . Согласно (3.10), источниками поля  $\vec{D}$  (теми местами, где начинаются и оканчиваются векторные линии  $l_D$ ) являются свободные электрические заряды.

Как связаны поля  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ? Обычно принимают допущение о прямой пропорциональной зависимости (рис. 3.11,а) поляризации  $\vec{P}$  и вектора  $\vec{E}$ :  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ , где безразмерный параметр среды  $\chi$  - диэлектрическая восприимчивость, характеризующая способность среды поляризоваться в электрическом поле. При этом, как следует из (3.9),

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad (3.11)$$

где  $(1 + \chi) = \varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость. Понятно, что в отсутствие среды, в вакууме, (а, практически, и в воздухе) имеем  $\chi = 0$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ .

Согласно (3.10), (3.11),

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \frac{\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_0}. \quad (3.10, a)$$

2). Магнитоэлектростатическое поле. Умножая левую и правую части (3.8,б) на магнитную постоянную  $\mu_0$ , представим это уравнение в виде:  $\mu_0 \operatorname{div} \vec{H} = -\mu_0 \operatorname{div} \vec{J}$  или  $\operatorname{div}[\mu_0(\vec{H} + \vec{J})] = 0$ . Обозначая

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}), \quad (3.12)$$

получаем уравнение для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ :

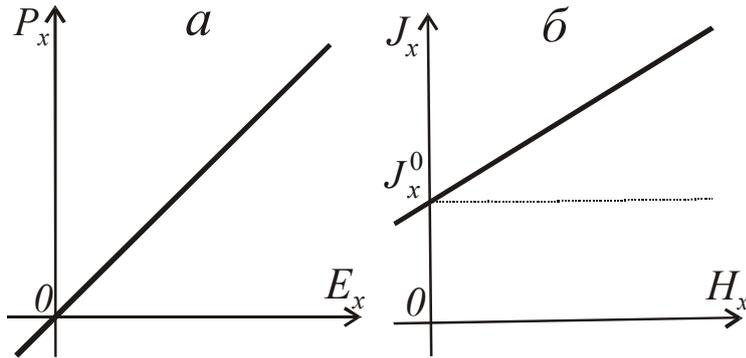
$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (3.13)$$

В отличие от уравнения (3.8,б) для  $\vec{H}$  в уравнении (3.13) для  $\vec{B}$  нет зависящего от магнитного поля вектора  $\vec{J}^{\text{вп}}$ . Согласно (3.13), поле  $\vec{B}$  - соленоидальное, векторные линии  $l_B$  - замкнуты

Теперь - о том, как связаны поля  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . В теории геофизических методов обычно принимают допущение о линейной зависимости намагниченности  $\vec{J}$  и вектора  $\vec{H}$ :  $\vec{J} = \vec{J}^{\text{вп}} + \vec{J}^0 = \varkappa \vec{H} + \vec{J}^0$  (рис. 3.11,б). При этом мы, конечно, исключаем из рассмотрения такое нелинейное явление, как магнитный гистерезис. Здесь безразмерный параметр среды  $\varkappa$  - магнитная восприимчивость, характеризующая способность среды намагничиваться в магнитном поле.

Из (3.12) следует, что при  $\vec{J} = \varkappa \vec{H} + \vec{J}^0$  и магнитной проницаемости  $\mu = 1 + \varkappa$  поле вектора магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu_0(\mu\vec{H} + \vec{J}^0) = \mu_a\vec{H} + \mu_0\vec{J}^0, \quad (3.14)$$



**Рис. 3.11.** Зависимости компоненты  $P_x$  от  $E_x$  (а) и компоненты  $J_x$  от  $H_x$  (б).

где  $\mu_0\mu = \mu_a$  - абсолютная магнитная проницаемость. В отсутствие среды (в вакууме), либо в немагнитной среде, имеем:  $\alpha=0$ ,  $\mu=1$ ,  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ .

Согласно (3.13), (3.14), (3.8,б),

$$\operatorname{div}(\mu\vec{H}) = -\operatorname{div}\vec{J}^0 = \delta_0.$$

При сравнении (3.10,а) с (3.13,а) видим

математическую

идентичность уравнений для электростатического и магнитостатического полей. Заменяя в (3.10,а)  $\vec{E}$  на  $\vec{H}$ ,  $\epsilon$  на  $\mu$  и  $\delta_{\text{свб}}/\epsilon_0$  на  $\delta_0$ , получаем уравнение (3.13,а).

Из (3.10), (3.13) не сложно получить интегральные формы II-ых уравнений статических полей  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  в присутствии среды. Применяя к векторам  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  формулу Гаусса - Остроградского (1.13) и принимая во внимание (3.10), (3.13), получаем уравнения

$$\oint_{S[V]} (\vec{D} \, d\vec{S}) = \int_V \delta_{\text{свб}} \, dV = e_V^{\text{свб}}; \quad \oint_S (\vec{B} \, d\vec{S}) = 0, \quad (3.15)$$

где  $e_V^{\text{свб}}$  - свободный электрический заряд в области пространства  $V$ , ограниченной поверхностью  $S[V]$ .

Из (3.15) могут быть получены поверхностные формы этих уравнений (см. [1], стр. 150):

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma_{\text{свб}}; \quad B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0, \quad (3.16)$$

определяющие то, как изменяются нормальные к особым поверхностям  $S_{\text{oc}}$  компоненты полей  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  в окрестности этих поверхностей.

Отметим, что поля  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  имеют следующие размерности:  $[D]=\text{Кл/м}^2$ ,  $[B]=\text{Тл}$  (тесла).

### 3.8. Система уравнений статического поля в присутствии поляризующейся (или намагничивающейся) среды

Рассмотрим сначала систему уравнений электростатического поля. В соответствии с (3.1,а), (3.10), (3.11) систему уравнений электростатического поля в дифференциальной форме и уравнение связи (полей  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ) можем записать в следующем виде:

$$\text{I. } \operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad \text{II. } \operatorname{div}\vec{D} = \delta_{\text{свб}}, \quad \vec{D} = \epsilon_0\epsilon\vec{E} = \epsilon_a\vec{E}. \quad (3.17)$$

Согласно (3.3,а), (3.15), (3.2,а), (3.16), системы уравнений электростатического поля в интегральной и поверхностной формах:

$$\text{I. } \oint_l (\vec{E} \, d\vec{l}) = 0, \quad \text{II. } \oint_{S[V]} (\vec{D} \, d\vec{S}) = \int_V \delta_{\text{свб}} \, dV = e_V^{\text{свб}}; \quad (3.18)$$

$$\text{I. } E_\tau^{(2)} - E_\tau^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau}, \quad \text{II. } D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = \sigma_{\text{свб}}. \quad (3.19)$$

Из уравнения I в (3.17) следует, что электростатическое поле  $\vec{E}$  - потенциальное (см. раздел 2.5) и

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -\nabla U. \quad (3.18)$$

Получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал  $U$  электростатического поля  $\vec{E}$ . Из уравнения II и уравнения связи в (3.17) следует, что  $\varepsilon_0 \text{div}(\varepsilon \vec{E}) = \delta_{\text{свб}}$  или  $(\nabla(\varepsilon \vec{E})) = \delta_{\text{свб}}/\varepsilon_0$ . Подставляя в это уравнение выражение (3.18) для  $\vec{E}$ , получаем:

$$(\nabla(\varepsilon \cdot \nabla U)) = -\delta_{\text{свб}}/\varepsilon_0. \quad (3.19)$$

При сравнении (3.19) с уравнением (2.33)  $(\nabla(\lambda \cdot \nabla U)) = w$ , применённым при доказательстве теоремы единственности видим, что эти выражения математически идентичны. Так как  $(\nabla(\varepsilon \cdot \nabla U)) = \varepsilon \nabla^2 U + (\nabla \varepsilon \cdot \nabla U)$ , можем записать уравнение (3.19) для потенциала  $U$  электростатического поля  $\vec{E}$  в следующем виде:

$$\nabla^2 U + \frac{(\nabla \varepsilon \cdot \nabla U)}{\varepsilon} = \frac{-\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{-\delta_{\text{свб}}}{\varepsilon_a}, \quad (3.19, a)$$

где, в соответствии с (3.11),  $\varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость. Из (3.19,а) следует, что при  $\nabla \varepsilon = \text{grad} \varepsilon = 0$  и  $\delta_{\text{свб}} = 0$  потенциал  $U$  электростатического поля  $\vec{E}$  удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\nabla^2 U = 0$ . То есть в среде, однородной по диэлектрической проницаемости, при отсутствии свободных электрических зарядов потенциал  $U$  электростатического поля  $\vec{E}$  - гармоническая функция.

Приведём уравнения магнитостатического поля. В соответствии с (3.1,б), (3.13), (3.14) систему уравнений магнитостатического поля в дифференциальной форме и уравнение связи (полей  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ) можем записать в следующем виде:

$$\text{I. } \text{rot} \vec{H} = 0, \quad \text{II. } \text{div} \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0 (\mu \vec{H} + \vec{J}^0) = \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0. \quad (3.20)$$

Согласно (3.3,б), (3.15), (3.2,б), (3.16), системы уравнений магнитостатического поля в интегральной и поверхностной формах:

$$\text{I. } \oint_l (\vec{H} \, d\vec{l}) = 0, \quad \text{II. } \oint_S (\vec{B} \, d\vec{S}) = 0; \quad (3.21)$$

$$\text{I. } H_\tau^{(2)} - H_\tau^{(1)} = -\frac{\partial \eta(q)}{\partial \tau}, \quad \text{II. } B_n^{(2)} = B_n^{(1)}. \quad (3.22)$$

Из уравнения I в (3.20) следует, что (в отличие от соленоидального, чисто-вихревого поля  $\vec{B}$ ) магнитостатическое поле  $\vec{H}$  - потенциальное (см. раздел 2.5) и

$$\vec{H} = -\text{grad}U = -\nabla U. \quad (3.23)$$

Получим уравнение, которому удовлетворяет потенциал  $U$ . Из уравнения II и уравнения связи в (3.20) следует, что  $\text{div}(\mu\vec{H} + \vec{J}^0) = 0$  или, в соответствии с (3.8,б),  $\text{div}(\mu\vec{H}) = -\text{div}\vec{J}^0 = \delta_0$ , где  $\delta_0 = -\text{div}\vec{J}^0$  - объёмная плотность постоянных "магнитных масс". Принимая во внимание выражение (3.23) для  $\vec{H}$ , получаем:

$$(\nabla(\mu \cdot \nabla U)) = -\delta_0. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) математически идентично уравнением (3.19) и (2.33). Так как  $(\nabla(\mu \cdot \nabla U)) = \mu \nabla^2 U + (\nabla\mu \cdot \nabla U)$ , можем записать уравнение (3.24) для потенциала  $U$  магнитостатического поля  $\vec{H}$  в следующем виде:

$$\nabla^2 U + \frac{(\nabla\mu \cdot \nabla U)}{\mu} = \frac{-\delta_0}{\mu} = \frac{\text{div}\vec{J}^0}{\mu}. \quad (3.24, a)$$

Из (3.24,а) следует, что при  $\nabla\mu = \text{grad}\mu = 0$  и  $\text{div}\vec{J}^0 = 0$  потенциал  $U$  магнитостатического поля  $\vec{H}$  удовлетворяет уравнению Лапласа:  $\nabla^2 U = 0$ . То есть в среде, однородной по магнитной проницаемости  $\mu$ , и при  $\text{div}\vec{J}^0 = 0$  потенциал  $U$  магнитостатического поля  $\vec{H}$  - гармоническая функция.

При сравнении полученных выше уравнений для электростатического поля в присутствии диэлектриков и магнитостатического поля  $\vec{H}$  можем обратить внимание на математическую аналогию в описании этих полей. Например из (3.13) и (3.20) следует, что

$$\text{div}(\epsilon\vec{E}) = \delta_{\text{свб}}/\epsilon_0, \quad \text{div}(\mu\vec{H}) = \delta_0 = -\text{div}\vec{J}^0. \quad (3.25)$$

Согласно поверхностным формам уравнений (3.19), (3.22) для полей  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  и уравнениям связи в (3.17), (3.20), на особых поверхностях  $S_{\text{ос}}$ :

$$\epsilon_2 E_n^{(2)} - \epsilon_1 E_n^{(1)} = \sigma_{\text{свб}}/\epsilon_0, \quad \mu_2 H_n^{(2)} - \mu_1 H_n^{(1)} = \sigma_0, \quad (3.25, a)$$

где  $\sigma_0 = -(J_n^{0(2)} - J_n^{0(1)})$  - поверхностная плотность постоянных "магнитных масс", а  $J_n^{0(1,2)}$  - значения нормальной к  $S_{\text{ос}}$  компоненты вектора постоянной намагниченности  $\vec{J}^0$  в точках "1", "2" у поверхности  $S_{\text{ос}}$  (рис. 2.17).

Из (3.25), (3.25,а) следует, что формально (математически) идентичными в уравнениях электростатического поля в присутствии диэлектриков и магнитостатического поля в присутствии магнетиков являются поля:  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ;  $\epsilon$  и  $\mu$ ;  $\delta_{\text{свб}}/\epsilon_0$  и  $\delta_0$ , а также  $\sigma_{\text{свб}}/\epsilon_0$  и  $\sigma_0$ .

### 3.9. Источники поля в поляризующейся (намагничивающейся) среде

В этом разделе выясним, где и при каких условиях в поляризующейся (намагничивающейся) среде находятся (зависящие от поля) временные источники поля: объёмные с плотностью  $\delta_{вр}$  и поверхностные с плотностью  $\sigma_{вр}$ .

Получим сначала выражения для плотности таких источников вторичного поля  $\vec{E}^B$  электростатического поля  $\vec{E}$  (зарядов). В этом случае, как было оговорено в разделе 3.6, постоянных связанных источников поля  $\vec{E}$  нет ( $\delta_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$ ) и  $\delta_{свз} = \delta_{вр}$ ,  $\sigma_{свз} = \sigma_{вр}$ . Из уравнения Пуассона (2.20) для потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$ :  $\nabla^2 U = -4\pi\delta$ , принимая во внимание, что  $\vec{E} = \vec{f}/(4\pi\epsilon_0)$ , а источниками поля  $\vec{E}$  являются полные электрические заряды, получаем уравнение для потенциала  $U$  поля  $\vec{E} = -\text{grad}U = -\nabla U$ :

$$\nabla^2 U = -\delta_{\text{плн}}/\epsilon_0 = -\delta_{свб}/\epsilon_0 - \delta_{свз}/\epsilon_0. \quad (3.26)$$

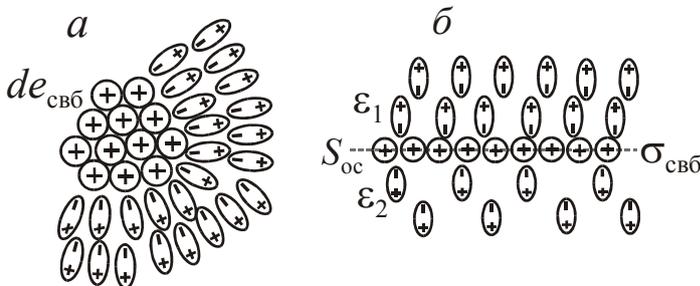
Вместе с тем для потенциала электростатического поля  $\vec{E}$  получили уравнение (3.19,а), из которого следует, что

$$\nabla^2 U = -\frac{(\nabla\epsilon \cdot \nabla U)}{\epsilon} - \frac{\delta_{свб}}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (3.26,а)$$

Из (3.26), (3.26,а) следует, что объёмная плотность  $\delta_{вр} = \delta_{свз} = \epsilon_0(\nabla\epsilon \cdot \nabla U)/\epsilon + \delta_{свб}/\epsilon$  или  $\delta_{вр} = \delta_{свз} = \delta_{свз}\epsilon_0(\nabla\epsilon \cdot \nabla U)/\epsilon - \delta_{свб}(1 - 1/\epsilon)$ . Из этого уравнения, принимая во внимание то, что  $\nabla U = -\vec{E}$ ,  $\nabla\epsilon = \text{grad}\epsilon$ , получаем:

$\delta_{вр} = \delta_{свз} = \epsilon_0(\nabla\epsilon \cdot \nabla U)/\epsilon - \delta_{свб}(1 - 1/\epsilon)$ . Отсюда следует, что плотность временных объёмных зарядов-источников поля  $\vec{E}^B$  в диэлектрике определяют выражения:

$$\delta_{вр} = \delta' + \delta'', \quad \delta' = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon}(\text{grad}\epsilon \cdot \vec{E}), \quad \delta'' = -\delta_{свб} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}. \quad (3.27)$$



**Рис. 3.12.** Объёмные (а) и поверхностные (б) связанные заряды с плотностями  $\delta''$ ,  $\sigma''$  при наличии в поляризующейся среде (диэлектрике) свободных зарядов.

В выражении для плотности  $\delta_{вр}$  слагаемое  $\delta' \neq 0$ , если среда- "градиентная" по диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  (см. раздел 3.1), электрическое поле  $\vec{E} \neq 0$  и скалярное произведение  $(\text{grad}\epsilon \cdot \vec{E}) \neq 0$ , то есть компонента поля  $\vec{E}$  по направлению  $\text{grad}\epsilon$  не равна нулю. В (3.27) плотность

$\delta'' \neq 0$ , если  $\delta_{\text{свб}} \neq 0$  и  $\varepsilon = 1 + \chi > 1$ , то есть среда- поляризующаяся (диэлектрик). То, чем обусловлено присутствие в диэлектрике связанных (временных) зарядов с плотностью  $\delta''$ , если там имеется свободный заряд, схематично показано на рис. 3.12,а. Как видно на этом рисунке, в соответствии с (3.27) знаки  $\delta''$  и  $\delta_{\text{свб}}$  - противоположны.

При определённых условиях такие источники электростатического поля  $\vec{E}^B$ , как связанные поверхностные заряды с плотностью  $\sigma_{\text{свз}} = \sigma_{\text{вр}}$ , могут существовать на особых поверхностях  $S_{\text{ос}}$ . Из уравнений в поверхностной форме: (2.30) для поля  $\vec{f}$  ( $\vec{E} = \vec{f}/(4\pi\varepsilon_0)$ ), 1-го уравнения в (3.16), а также уравнения связи (3.11) следует, что на поверхности  $S_{\text{ос}}$  (рис. 2.17) имеем:  $\sigma_{\text{плн}} = \varepsilon_0(E_n^{(2)} - E_n^{(1)})$ ,  $\varepsilon_2 E_n^{(2)} - \varepsilon_1 E_n^{(1)} = \sigma_{\text{свб}}/\varepsilon_0$ . Так как  $\sigma_{\text{свб}} = \sigma_{\text{плн}} - \sigma_{\text{свз}}$ , то (после алгебраических преобразований) для поверхностной плотности  $\sigma_{\text{свз}} = \sigma_{\text{вр}}$  поверхностных источников вторичного поля  $\vec{E}^B$  получаем следующие выражения:

$$\sigma_{\text{вр}} = \sigma' + \sigma'', \quad \sigma' = 2\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{12} E_n^{\text{ср}}, \quad \sigma'' = -\sigma_{\text{свб}} \frac{\varepsilon_{\text{ср}} - 1}{\varepsilon_{\text{ср}}}. \quad (3.28)$$

Здесь  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  - диэлектрические проницаемости в точках "1", "2" у поверхности  $S_{\text{ос}}$  (рис. 2.17)- границы сред, отличающихся по диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{\text{ср}} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$  - среднее арифметическое значение диэлектрических проницаемостей сред в точках "1", "2",  $\varepsilon_{12} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  - коэффициент контрастности границы  $S_{\text{ос}}$  по диэлектрической проницаемости, а  $E_n^{\text{ср}} = (E_n^{(1)} + E_n^{(2)})/2$  - среднее арифметическое значение нормальной к поверхности  $S_{\text{ос}}$  компоненты  $E_n$  (при расстоянии  $L_{12} \rightarrow 0$ ).

Из (3.27) следует, что в присутствии диэлектриков поверхностная плотность  $\sigma_{\text{свз}} = \sigma_{\text{вр}}$  источников электростатического поля  $\vec{E}^B$  не равна нулю в двух следующих двух случаях. 1) Нормальная к поверхности  $S_{\text{ос}}$  компонента  $E_n \neq 0$  и  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ , то есть  $S_{\text{ос}}$ - граница сред с разными значениями  $\varepsilon$ . 2).  $\sigma_{\text{свб}} \neq 0$  и  $\varepsilon_1 > 1$  или  $\varepsilon_2 > 1$ , то есть на  $S_{\text{ос}}$  есть свободные поверхностные заряды и, хотя бы одна из областей пространства  $V_{1,2}$  с границей  $S_{\text{ос}}$  является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1 > 1$  или  $\varepsilon_2 > 1$ . Иллюстрацией к тому, чем обусловлено существование поверхностных связанных зарядов с плотностью  $\sigma'$  могут служить рис. 3.9,б,в. То, почему в диэлектрике существуют связанные поверхностные заряды с плотностью  $\sigma''$ , если на поверхности  $S_{\text{ос}}$  (например, предельно тонкой обкладке конденсатора) имеется свободный поверхностный заряд с

плотностью  $\sigma_{\text{свб}}$ , схематично показано на рис. 3.12,б. На этом рисунке видно, что, в соответствии с (3.28), плотности  $\sigma''$  и  $\sigma_{\text{свб}}$  противоположны по знаку.

Теперь не сложно получить выражения для плотностей временных источников  $\delta_{\text{вр}}$  и  $\sigma_{\text{вр}}$  вторичного магнитостатического поля  $\vec{H}^B$ . Проще всего это будет сделать, обратившись к равенствам (3.25), которые показывают идентичность в математическом описании электростатического и магнитостатического полей. Из (3.27) для (зависящих от магнитного поля  $\vec{H}$ ) плотностей временных объёмных (с плотностью  $\delta_{\text{вр}}$ ) источников вторичного магнитного поля  $\vec{H}^B$  получаем:

$$\delta_{\text{вр}} = \delta' + \delta'', \quad \delta' = -\frac{(\text{grad} \mu \cdot \vec{H})}{\mu}, \quad \delta'' = -\delta_0 \frac{\mu - 1}{\mu} = \text{div} \vec{J}^0 \frac{\mu - 1}{\mu}. \quad (3.29)$$

Из (3.29) следует, что плотность  $\delta' \neq 0$ , если среда-градиентная по магнитной проницаемости  $\mu$ , магнитное поле  $\vec{H} \neq 0$  и скалярное произведение  $(\text{grad} \mu \cdot \vec{H}) \neq 0$ , то есть векторы  $\vec{H}$  и  $\text{grad} \mu$  - не являются взаимно ортогональными. Плотность  $\delta'' \neq 0$ , если дивергенция вектора постоянной (остаточной) намагничённости  $\text{div} \vec{J}^0 \neq 0$  и магнитная проницаемость  $\mu \neq 1$ .

В соответствии с (3.25,а) по аналогии с (3.28) для плотности поверхностных временных источников магнитостатического поля  $\vec{H}^B$  в магнетиках получаем:

$$\sigma_{\text{вр}} = \sigma' + \sigma'', \quad \sigma' = 2\mu_{12} H_n^{\text{ср}}, \quad \sigma'' = -\sigma_0 \frac{\mu_{\text{ср}} - 1}{\mu_{\text{ср}}}. \quad (3.30)$$

В (3.30)  $\mu_1, \mu_2$  - магнитные проницаемости в точках "1", "2" у поверхности  $S_{\text{ос}}$ - границы сред, отличающихся по магнитной проницаемости  $\mu$ ,  $\mu_{\text{ср}} = (\mu_1 + \mu_2)/2$  - среднее арифметическое значение магнитных проницаемостей сред в точках "1", "2",  $\mu_{12} = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$  - коэффициент контрастности границы  $S_{\text{ос}}$  по магнитной проницаемости, а  $H_n^{\text{ср}} = (H_n^{(1)} + H_n^{(2)})/2$  - среднее арифметическое значение нормальной к поверхности  $S_{\text{ос}}$  компоненты  $H_n$  магнитного поля  $\vec{H}$  ( $L_{12} \rightarrow 0$ , см. рис. 2.17).

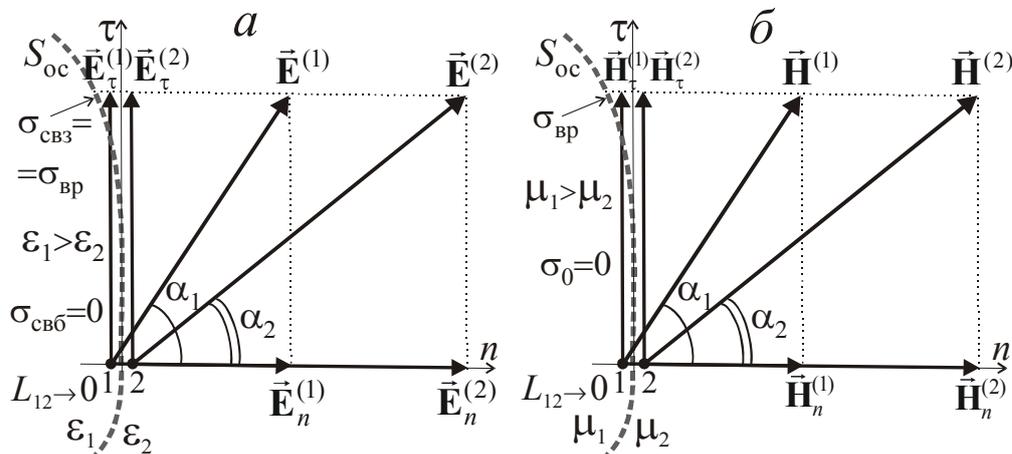
### **3.10. Поле у границы поляризующихся (намагничивающихся) сред**

Пусть  $S_{\text{ос}}$ - граница двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (рис. 3.13,а). Будем полагать, что на  $S_{\text{ос}}$  нет свободных электрических зарядов и двойных электрических слоёв. Тогда на  $S_{\text{ос}}$  поверхностные плотности  $\sigma_{\text{свб}} = 0, \eta_{\text{плн}} = 0$  и из первых уравнений в (3.19), (3.25,а) получаем:  $E_{\tau}^{(2)} = E_{\tau}^{(1)}, \varepsilon_2 E_n^{(2)} = \varepsilon_1 E_n^{(1)}$ . То есть при указанных выше

условиях тангенциальная (касательная к  $S_{oc}$ ) компонента  $E_\tau$  непрерывна на  $S_{oc}$ , а (при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ) нормальная к  $S_{oc}$  компонента  $E_n$  поля  $\vec{E}$  терпит разрыв на этой поверхности:  $E_n^{(2)} = (\varepsilon_1/\varepsilon_2)E_n^{(1)}$ . В соответствии с (3.28) этот разрыв обусловлен тем, что при  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  и  $E_n \neq 0$  на  $S_{oc}$  существуют индуцированные поверхностные заряды с плотностью  $\sigma_{вр} = \sigma' = 2\varepsilon_0\varepsilon_{12}E_n^{cp}$ .

На рис. 3.13,а показаны векторы  $\vec{E}^{(1,2)}$  и их векторные компоненты  $\vec{E}_n^{(1,2)}$ ,  $\vec{E}_\tau^{(1,2)}$  в точках "1, 2" для случая, когда  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  и  $E_n^{(2)} = (\varepsilon_1/\varepsilon_2)E_n^{(1)} > E_n^{(1)}$ . Видно, что при пересечении точкой наблюдения поверхности  $S_{oc}$  (бесконечно малом перемещении из точки "1" в точку "2") резко меняется направление вектора  $\vec{E}$ . На рис. 3.13,а углы между направлениями векторов  $\vec{E}^{(1,2)}$  в точках "1, 2" и направлением нормали  $n$  к  $S_{oc}$  обозначены  $\alpha_{1,2}$ . Тангенсы этих углов

$\text{tg } \alpha_{1,2} = E_\tau^{(1,2)} / E_n^{(1,2)}$ , а отношение  $\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{E_\tau^{(2)}}{E_\tau^{(1)}} \cdot \frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}}$ , так как в



**Рис. 3.13.** Электростатическое поле у границы диэлектриков (а) и магнитостатическое поле у границы магнетиков (б).

рассматриваемом случае  $E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)}$ . В соответствии с уравнением связи в

(3.17)  $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$ ,  $\vec{E} = \vec{D}/(\varepsilon_0\varepsilon)$ , следовательно  $\frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{\varepsilon_2 D_n^{(1)}}{\varepsilon_1 D_n^{(2)}}$ . Но, согласно

второму уравнению в (3.19), если на  $S_{oc}$  поверхностная плотность  $\sigma_{свб} = 0$ , то

$D_n^{(2)} = D_n^{(1)}$  и  $\frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ . Следовательно, при принятых условиях  $\text{tg } \alpha_2 / \text{tg } \alpha_1 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$  - отношение тангенсов углов  $\alpha_{1,2}$  равно отношению диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{1,2}$ , см. рис. 3.13,а.

Перейдём к случаю, когда поверхность  $S_{oc}$  - граница двух магнетиков с магнитными проницаемостями  $\mu_1, \mu_2$  (рис. 3.13,б) и в окрестности  $S_{oc}$  вектор постоянной намагниченности  $\vec{J}^0 = 0$ , либо, хотя бы, равна нулю нормальная к  $S_{oc}$  компонента этого вектора. Кроме того, на  $S_{oc}$  нет двойных магнитных слоёв. При этих условиях на  $S_{oc}$  поверхностные плотности  $\sigma_0 = 0$ ,  $\eta = 0$  и из

первого уравнения в (3.22) и второго уравнения в (3.25,а) получаем:  $H_{\tau}^{(2)} = H_{\tau}^{(1)}$ ,  $\mu_2 H_n^{(2)} = \mu_1 H_n^{(1)}$  или  $H_n^{(2)} = (\mu_1/\mu_2) H_n^{(1)}$ . Для этого случая (по аналогии с тем, что было рассмотрено ранее для границы  $S_{oc}$  диэлектриков) не сложно получит выражение, определяющее то как меняется направление векторов  $\vec{H}^{(1,2)}$  (и векторов  $\vec{B}^{(1,2)} = \mu_0 \cdot \mu_{1,2} \cdot \vec{H}^{(1,2)}$ , если  $\vec{J}^0 = 0$ ) при переходе точки наблюдения через границу  $S_{oc}$ . Отношение тангенсов показанных на рис. 3.13,б углов  $\alpha$  равно отношению магнитных проницаемостей  $\mu$  граничащих сред:  $\text{tg } \alpha_2 / \text{tg } \alpha_1 = \mu_2 / \mu_1$ . Более детально вопросы, связанные с особенностями преломления векторных линий на границе, будут рассмотрены ниже, на примере стационарного электрического поля  $\vec{E}$ , см. раздел 4.10.

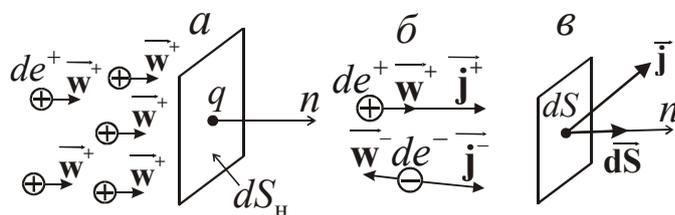
#### 4. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  - это постоянное электрическое поле в проводящей среде, сопровождающееся постоянным электрическим током - упорядоченным движением свободных электрических зарядов. При этом свободные электрические микрочастицы перемещаются, но плотности зарядов и создаваемое зарядами поле  $\vec{E}$  не меняются со временем. Сначала, при рассмотрении первых вопросов этой теме не будем ограничиваться случаем постоянного тока. Полученные выражения будут справедливы и для переменного тока и понадобятся нам в разделе 6. В заключительных вопросах в этой теме рассмотрим ряд закономерностей, присущих именно постоянному электрическому току и стационарному полю  $\vec{E}$ .

##### 4.1. Электрический ток

Электрический ток - упорядоченное (направленное) движение свободных электрических зарядов. Общеизвестной характеристикой электрического тока является ток  $I$  (в А - амперах). Но величиной  $I$  можно охарактеризовать ток в электротехнических цепях (в "проводах"). В объёмных проводниках (в частности, в Земле) электрический ток характеризует поле вектора плотности тока  $\vec{j}$ . Определим это понятие.

Допустим, что электрический ток обусловлен движением



**Рис. 4.1.** К вектору плотности  $\vec{j}$  электрического тока  $I$  (а), (б) и потоку вектора  $\vec{j}$  через элементарную площадку  $dS$  (в).

положительных микроскопических зарядов  $de^+ = de$ , а  $\vec{w}^+$  - вектор скорости упорядоченного движения этих зарядов. На рис. 4.1,а показана элементарная площадка  $dS_H$  с центром в точке  $q$  и нормалью  $n$  по направлению  $\vec{w}^+$ . Пусть за время  $dt$  через площадку  $dS_H$  прошёл заряд  $de$ . Тогда электрический ток  $dI$  через  $dS_H$  определит выражение:  $dI = de/dt$ , а

плотность тока  $j$  - это отношение  $dI/dS_H$ , то есть  $j = \frac{de}{dt dS_H}$ . Чтобы охарактеризовать направление движения (положительных) микроскопических зарядов, величине  $j$  придают смысл вектора, параллельного направлению  $\vec{w}^+$ :

$$\vec{j} = \vec{1}_{w^+} \frac{de}{dt dS_H}, \quad (4.1)$$

где единичный вектор  $\vec{1}_{w^+} = \vec{w}^+ / w^+$ . Понятно, что  $\vec{j} = \vec{j}(q)$  - векторное поле, зависящее от положения в пространстве центра  $q$  площадки  $dS_H$  (см. рис. 4.1,а). Если электрический ток - переменный, то  $\vec{j} = \vec{j}(q, t)$ , где  $t$  - время.

В общем случае электрический ток обусловлен направленным (упорядоченным) движением как положительных микрочарядов  $de^+$ , так и отрицательных микрочарядов  $de^-$  (рис. 4.1,б). Опыт показывает, что движение зарядов  $de^+$  и  $de^-$  в противоположных направлениях производит одинаковый эффект. В частности, при этом такие движущиеся заряды создают одинаковые магнитные поля. Поэтому вектор плотности электрического тока  $\vec{j} = \vec{j}^+ + \vec{j}^-$ , где, в соответствии с (4.1)  $\vec{j}^+ \parallel \vec{w}^+$ , а  $\vec{j}^- \uparrow \downarrow \vec{w}^-$  (см. рис. 4.1,б).

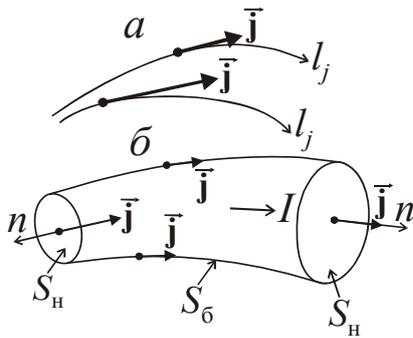
В соответствии с определением, приведенным в разделе 1.3, поток  $dI_S$  вектора  $\vec{j}$  через произвольно ориентированную элементарную площадку:  $dS$  с нормалью  $n$ :  $dI_S = (\vec{j} d\vec{S}) = j \cdot dS \cdot \cos(\vec{j}, n) = j_n \cdot dS$ . Здесь абсолютная величина  $|d\vec{S}| = dS$ , а направление  $d\vec{S} \parallel n$ , рис. 4.1,в. Знак  $dI_S$  - тот же, что и знак  $\cos(\vec{j}, n)$ . Не сложно доказать что абсолютная величина  $|dI_S|$  потока  $dI_S$  равна электрическому току  $dI$  через площадку  $dS$ . Действительно,  $|dI_S| = j \cdot dS \cdot |\cos(\vec{j}, n)|$ . Но  $dS \cdot |\cos(\vec{j}, n)| = dS_H$  (см. рис. 4.1, а, в) и, в соответствии с (4.1),  $|dI_S| = dI$ .

Поток вектора  $\vec{j}$  через поверхность  $S$  (см. рис. 1.7) определяет выражение:

$$I_S = \int_S dI_S = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = \int_S j_n \cdot dS. \quad (4.2)$$

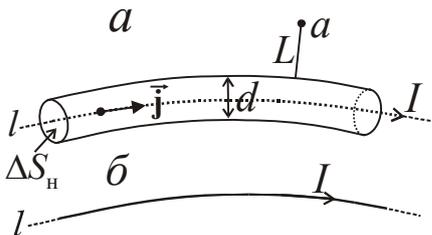
Абсолютная величина  $|I_S|$  равна электрическому току  $I$  через поверхность  $S$ .

Определим ещё некоторые понятия, применяемые в теории стационарного электрического поля. Векторные линии  $l_j$  поля  $\vec{j}$  называют токовыми линиями (рис. 4.2,а). Участок цепи электрического тока можно представить в виде "токовой трубки" с боковой поверхностью  $S_6$  и



**Рис. 4.2.** Векторные линии  $l_j$  – токовые линии (а); к определению понятия "токовая трубка", ограниченная боковой поверхностью  $S_б$  и нормальными сечениями  $S_н$  (б).

ток в имеющих большую протяжённость и малые размеры поперечного сечения проводниках ("проводах"). Если расстояние  $L$  от такого проводника с током  $I$  до точки наблюдения  $a$  – много меньше, чем линейный размер  $d$



**Рис. 4.3.** Объёмный электрический ток  $I$  по проводнику малого поперечного сечения  $\Delta S_н$  (а); и линейный ток  $I$  (б).

4.3,б).

В некоторых случаях бывает удобно пользоваться понятием "поверхностный ток" (см. [1], стр. 179- 181).

#### 4.2. Закон Ома в дифференциальной форме

Общеизвестен закон Георга Ома для участка цепи электрического тока (закон Ома в интегральной форме), согласно которому (при определённых условиях) ток  $I$  в некотором участке цепи тока пропорционален действующему на этом участке напряжению  $\mathcal{E}_{12}$  электрического поля  $\vec{E}$  и обратно пропорционален сопротивлению  $R_{12}$  этого участка цепи (рис. 4.4, а,б).

$$I = \mathcal{E}_{12} / R_{12} = \mathcal{E}_{12} \cdot S_{12}, \quad (4.3)$$

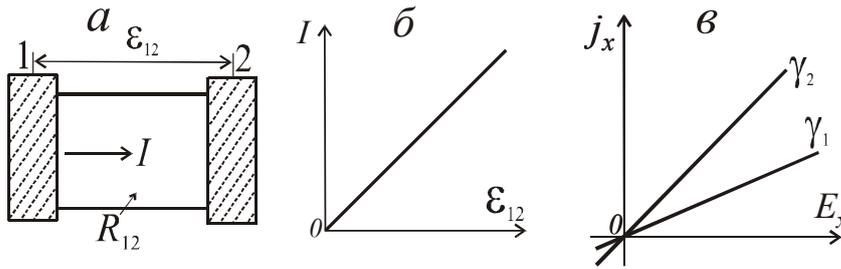
нормальными сечениями  $S_н$  (рис. 4.2,б). На поверхности  $S_б$  векторы  $\vec{j}$  направлены по касательной к этой поверхности. На поверхностях  $S_н$  векторы  $\vec{j}$  коллинеарны направлениям нормалей  $n$  к  $S_н$ .

Физически реальными (при применении "макроскопического" подхода) являются объёмные электрические токи с конечной по величине плотностью тока  $j$ . Но нередко бывает удобно (и возможно) пользоваться понятием "необъёмных токов" – линейных или поверхностных – у которых (объёмная) плотность тока  $j \rightarrow \infty$ .

*Линейный электрический ток.* Таким током бывает можно заменить реальный электрический

ток в имеющих большую протяжённость и малые размеры поперечного сечения такого проводника (рис. 4.3,а), то производимые таким током физические явления (магнитное поле тока, см. раздел 5) зависят практически лишь от положения в пространстве проходящей внутри проводника линии  $l$  и величины ("силы") тока  $I$ .

В этом случае можем заменить такой ток (при расчётах поля или при интерпретации результатов наблюдений) линейным электрическим током, полагая, что при неизменных положении линии  $l$  и величине  $I$  сечение  $\Delta S_н \rightarrow 0$ , а  $j \rightarrow \infty$  как  $1/\Delta S_н$  (рис.



**Рис. 4.4.** К закону Ома в интегральной (а, б); и дифференциальной (в) формах.

где  $1/R_{12} = S_{12}$  - проводимость участка цепи электрического тока. Закон Ома в дифференциальной форме устанавливает (для "обычных" ионных

или электронных проводников) прямую пропорциональную зависимость между напряжённостью  $\vec{E}$  электрического поля и вектором плотности электрического тока  $\vec{j}$ :

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} = \vec{E} / \rho, \quad (4.4)$$

где  $\gamma$  - удельная электропроводность, характеризующая способность среды проводить электрический ток, а  $1/\gamma = \rho$  - удельное электрическое сопротивление. На рис. 4.4,в показаны соответствующие закону (4.4) зависимости скалярной компоненты  $j_x$  поля  $\vec{j}$  от компоненты  $E_x$  поля  $\vec{E}$ . На этом рисунке сопоставлены такие зависимости при  $\gamma = \gamma_1$ ,  $\gamma = \gamma_2$  и  $\gamma_2 > \gamma_1$ .

Величины, входящие в выражения (4.3)- (4.4) имеют следующие размерности:  $[I]=A$  (амперы),  $[\mathcal{E}_{12}]=B$  (вольты),  $[R_{12}]=\text{Ом}$  (омы),  $[S_{12}]=1/\text{Ом}=\text{Сим}$  (сименсы),  $[j]=A/m^2$ ,  $[E]=B/m$ ,  $[\gamma]=\text{Сим}/m$ ,  $[\rho]=\text{Ом}\cdot m$ .

\*\*\*\*\*

Были рассмотрены три уравнения (3.11), (3.14), (4.4), которые связывают различные характеристики постоянных электрических и магнитных полей и в которые входят электромагнитные параметры среды: диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , магнитная проницаемость  $\mu$ , и удельное электрическое сопротивление  $\rho=1/\gamma$ . Пределы, в которых меняются эти параметры среды у широко распространённых в природе веществ, в частности - у горных пород, существенно различны. Типичные пределы изменения проницаемостей:  $1 \leq \epsilon \leq 81$  (при температуре  $20^\circ\text{C}$ ),  $1 \leq \mu \leq 50-100$ . Но пределы изменения удельного электрического сопротивления  $\rho$  горных пород, минералов и других распространённых веществ - гораздо шире. Пределы изменения  $\rho$  таких веществ можно приближённо оценить следующим образом:  $10^{-7} \text{ Ом}\cdot m \leq \rho \leq 10^{14} \text{ Ом}\cdot m$ . Поэтому (в частности, в геофизике) пользуются такими понятиями, как (идеальный) изолятор с удельным электрическим сопротивлением  $\rho \rightarrow \infty$  и удельной электропроводностью  $\gamma = 0$  и идеальный проводник ( $\rho = 0, \gamma \rightarrow \infty$ ). Как правило, при наличии границы между умеренно-проводящими горными породами с воздухом можно принять допущение, что воздух - идеальный изолятор. В случае, когда, например,

умеренно-проводящие среды граничат с металлическим электродом (см. раздел 4.11) или стальной буровой колонной в скважине, то обычно можно полагать, что эти электрод или колонна - идеальные проводники.

### 4.3. Тензор удельной электропроводности

Как уже было отмечено в разделе 3.1, среды (в частности, горные породы) могут быть изотропными, либо анизотропными. В изотропных средах их параметры (диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , магнитная проницаемость  $\mu$ , удельная электропроводность  $\gamma$  и другие) не зависят от направления. В таких средах параметры  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma$  характеризуют скаляры (скалярные поля).

Согласно закону Ома в дифференциальной форме (4.4),  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} = \vec{E} / \rho$ . В электрически изотропной среде  $\gamma$  - неотрицательная (а в проводящей среде - положительная) скалярная величина. То есть в проводящей изотропной среде (при выполнении (4.4)) векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  направлены одинаково и соотношение между этими векторами не меняется, если в данной точке  $a$  среды изменить направление  $\vec{E}$  (рис. 4,5,а). В такой среде, например, в декартовых координатах  $j_x = \gamma \cdot E_x$ ,  $j_y = \gamma \cdot E_y$ ,  $j_z = \gamma \cdot E_z$ .

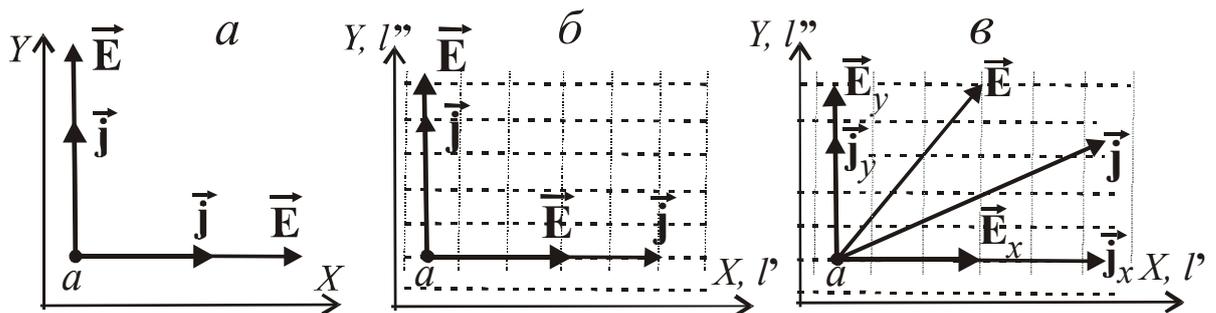
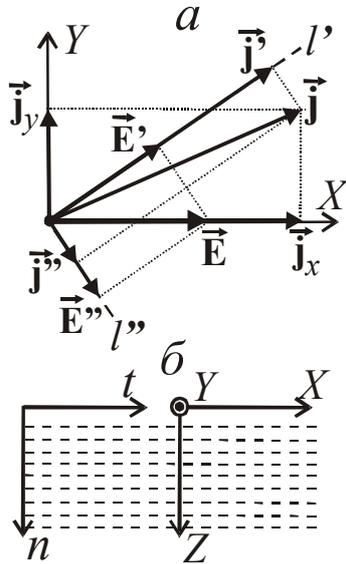


Рис. 4.5. К закону Ома в изотропной среде (а); и в анизотропной среде (б, в).

Но многие горные породы - анизотропны, что может быть связано с их рассланцеванностью, трещиноватостью, микрослоистостью. В анизотропных средах их параметры зависят от направления. Рассмотрим то, как характеризуют параметры анизотропных сред, на примере среды, анизотропной по удельной электропроводности  $\gamma$ .

В трёхосно-анизотропной среде есть три взаимно-ортогональных направления  $l'$ ,  $l''$ ,  $l'''$ , удельные электропроводности  $\gamma'$ ,  $\gamma''$ ,  $\gamma'''$  в которых имеют максимальное, минимальное и некоторое промежуточное значение. Эти направления называют главными осями тензора удельной электропроводности  $\hat{\gamma}$ . Рис. 4,5,б иллюстрирует случай, когда направления  $l'$ ,  $l''$  и параллельные им оси  $X$ ,  $Y$  лежат в плоскости чертежа, а вектор  $\vec{E}$  направлен по оси  $l'$ , либо по оси  $l''$ . При этих условиях векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{j}$  - взаимно параллельны ( $\vec{j} \parallel \vec{E}$ ), но при  $\vec{E} \parallel l'$  и  $\vec{E} \parallel l''$  имеем разное соотношение между абсолютными величинами  $j$  и  $E$ .

На рис. 4,5,а показаны векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{j}$  (и их векторные компоненты) в том случае, когда оси  $l', l''$  (и оси  $X, Y$ ), как и на рис. 4,5,б, лежат в плоскости чертежа, но вектор  $\vec{E}$  направлен под произвольным углом к направлениям  $l', l''$ . В этой ситуации направления векторов  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в



**Рис. 4.6.** К тензору удельной электропроводности.

анизотропной среде - не одинаковы. Как это можно учесть при записи закона Ома в дифференциальной форме для среды, анизотропной по удельной электропроводности?

Пусть, как и выше, оси  $l', l''$  лежат в плоскости чертежа, но направления лежащих в этой же плоскости осей  $X, Y$  не совпадают с направлениями  $l', l''$ . Для упрощения ситуации допустим, что поле  $\vec{E}$  направлено по оси  $X$ , то есть  $\vec{E} = \vec{E}_x = \vec{1}_x E_x$  (рис. 4,6,а). Вектор  $\vec{E}$  можем представить как сумму векторных компонент  $\vec{E}'$  и  $\vec{E}''$  по направлениям главных осей  $l'$  и  $l''$  тензора удельной электропроводности  $\hat{\gamma}$ . На рис. 4,6,а

показаны компоненты  $\vec{j}', \vec{j}''$  вектора плотности тока  $\vec{j}$  по направлению этих осей для случая, когда  $\gamma' > \gamma''$ . Складывая  $\vec{j}', \vec{j}''$  получаем вектор  $\vec{j}$ , направление которого отличается от направления вектора  $\vec{E}$ . То есть, как видно на рис 4,6,а, даже в рассматриваемом простейшем случае - при  $\vec{E} = \vec{E}_x = \vec{1}_x E_x$  имеем

$\vec{j} = \vec{j}_x + \vec{j}_y = \vec{1}_x j_x + \vec{1}_y j_y$ . Это означает, что в ситуации, показанной на рис. 4,6,а, закон Ома в дифференциальной форме (4.4), следует записать в виде:  $j_x = \gamma_{xx} E_x, j_y = \gamma_{yx} E_x$ , где  $\gamma_{xx}, \gamma_{yx}$  - соответственно коэффициенты пропорциональности между компонентами  $j_x, j_y$  и компонентой  $E_x$ .

В общем случае (при произвольной взаимной ориентацией направлений  $l', l'', l'''$  и осей  $X, Y, Z$ ) закон Ома в дифференциальной форме в анизотропной среде принимает вид:

$$\begin{aligned} j_x &= \gamma_{xx} E_x + \gamma_{xy} E_y + \gamma_{xz} E_z, \\ j_y &= \gamma_{yx} E_x + \gamma_{yy} E_y + \gamma_{yz} E_z, \quad j_z = \gamma_{zx} E_x + \gamma_{zy} E_y + \gamma_{zz} E_z, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где скалярные величины  $\gamma_{ik}$  - коэффициенты пропорциональности между компонентами  $j_i$  и  $E_k$ . Уравнениям (4.5) эквивалентны следующие равенства:

$$\vec{j} = \hat{\gamma} \vec{E} \quad \text{где} \quad \hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \gamma_{zz} \end{pmatrix} \quad (4.5, a)$$

тензор удельной электропроводности.

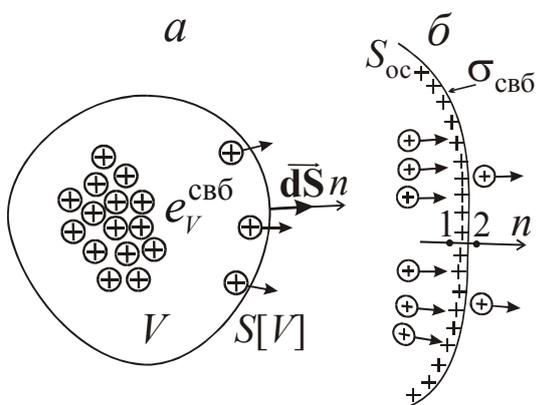
Наиболее часто применяемой в теории моделью анизотропной среды является среда с осевой анизотропией (трансверсально-изотропная среда). В такой модели среды есть ось анизотропии  $n$ , ортогональная направлению трещин или границ прослоев. Удельную электропроводность  $\gamma$  такой среды характеризуют два значения. Это - поперечная удельная электропроводность  $\gamma_n$  - по направлению  $n$  и продольная удельная электропроводность  $\gamma_t$  - по любому, ортогональному оси  $n$  направлению  $t$  (рис. 4,6,б). Такую среду можно характеризовать также двумя значениями удельного электрического сопротивления: поперечного  $\rho_n = 1/\gamma_n$  и продольного  $\rho_t = 1/\gamma_t$ . Закон Ома в дифференциальной форме для такой среды можно представить в виде:  $j_n = \gamma_n E_n$ ,  $j_t = \gamma_t E_t$ . В декартовых координатах с осью  $Z$  по оси анизотропии  $n$  (рис. 4,6,б) имеем:  $j_x = \gamma_t E_x$ ,  $j_y = \gamma_t E_y$ ,  $j_z = \gamma_n E_z$ . При этих условиях, согласно (4.5), (4.5,a), тензор удельной электропроводности

$$\hat{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_t & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_t & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}. \quad \text{Кроме } \gamma_n \text{ и } \gamma_t \text{ такую модель среды характеризует}$$

коэффициент анизотропии  $\lambda = \sqrt{\gamma_t/\gamma_n} = \sqrt{\rho_n/\rho_t}$ . Обычно в среде с осевой анизотропией  $\rho_n > \rho_t$  и коэффициент анизотропии  $\lambda > 1$ . Понятно, что в изотропной среде  $\rho_n = \rho_t$  и  $\lambda = 1$ .

Далее будем предполагать, что среда изотропна и  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $\epsilon$ , другие параметры среды - скалярные величины.

#### 4.4. Уравнение непрерывности электрического тока



**Рис. 4.7.** К уравнению непрерывности электрического тока в интегральной форме (а); в поверхностной форме (б).

Пока полагаем, что электрическое поле и характеристики электрического тока могут зависеть от времени  $t$ , то есть  $\vec{E} = \vec{E}(a, t)$ ,  $\vec{j} = \vec{j}(a, t), \dots$ . Вам известен закон сохранения электрического заряда, согласно которому сохраняется алгебраическая сумма зарядов электрически замкнутой системы. Если заряд в некоторой области пространства  $V$  меняется со временем, то это означает, что (свободные) заряды переходят границу  $S[V]$  этой области, то есть существует электрический ток через  $S[V]$ .

На рис. 4.7,a (для наглядности)

показан случай, когда в области  $V$  есть только положительный свободный заряд  $e_V^{\text{свб}}$ , а электрический ток  $I$  через  $S[V]$  обусловлен тем, что свободные положительные микроскопические заряды выходят из области  $V$ . При показанном направлении движения зарядов, в соответствии с (4.2), ток  $I$  равен потоку  $I_S$  вектора  $\vec{j}$  через поверхность  $S[V]$ , то есть  $I = I_S = \oint_{S[V]} (\vec{j} \cdot d\vec{S})$ .

Вместе с тем, ток  $I = \left| \frac{de_V^{\text{свб}}}{dt} \right|$ , следовательно  $I_S = \left| \frac{de_V^{\text{свб}}}{dt} \right|$ . Принимая во внимание, что при  $I_S > 0$  заряд  $e_V^{\text{свб}}$  убывает со временем и производная  $\frac{de_V^{\text{свб}}}{dt} < 0$ , получаем уравнение непрерывности электрического тока в интегральной форме:

$$\oint_{S[V]} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = - \frac{de_V^{\text{свб}}}{dt}. \quad (4.6)$$

Получим теперь дифференциальную форму этого уравнения. Если заряд  $e_V^{\text{свб}}$  - объёмный (с конечной объёмной плотностью  $\delta_{\text{свб}}$ ), то, в соответствии с (2.1,a), (3.18),  $e_V^{\text{свб}} = \int_V \delta_{\text{свб}} dV$  и из (4.6) получаем:  $\oint_{S[V]} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = - \frac{d}{dt} \int_V \delta_{\text{свб}} dV$ .

Преобразуем левую часть этого равенства по формуле Гаусса - Остроградского (1.13) и поменяем в его правой части порядок дифференцирования по времени  $t$  и интегрирования по области  $V$ . Тогда  $\int_V \text{div } \vec{j} dV = \int_V \frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t} dV$ . Так как полученное равенство справедливо для любой области  $V$ , то из него следует равенство подынтегральных функций:

$$\text{div } \vec{j} = - \frac{\partial \delta_{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (4.7)$$

Из дифференциальной формы (4.7) уравнения непрерывности электрического тока следует, в частности, что токовые линии  $l_j$  начинаются там, где плотность  $\delta_{\text{свб}}$  убывает со временем, а оканчиваются там, где  $\delta_{\text{свб}}$  растёт со временем.

Из уравнения (4.6) можно получить (применимую на особых поверхностях  $S_{\text{oc}}$ ) поверхностную форму уравнения непрерывности электрического тока (см. [1], стр. 179- 181). При ограниченной плотности  $j$  тока на  $S_{\text{oc}}$  эту форму уравнения можем представить в виде:

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = - \frac{\partial \sigma_{\text{свб}}}{\partial t}, \quad (4.8)$$

где  $\sigma_{\text{свб}}$  - поверхностная плотность свободных электрических зарядов (в виде простого слоя) на  $S_{\text{oc}}$ , а  $j_n^{(1)}$ ,  $j_n^{(2)}$  значения нормальной к  $S_{\text{oc}}$  компоненты

вектора  $\vec{j}$  в точках "1", "2" (рис. 4.7,б). Расстояние между этими точками бесконечно мало и они лежат на разных сторонах поверхности  $S_{oc}$ . Рис. 4.7,б иллюстрирует ту ситуацию, когда  $j_n^{(1)} > j_n^{(2)}$  и, в соответствии с (4.8), плотность  $\sigma_{свб}$  зарядов на  $S_{oc}$  увеличивается со временем.

Далее в этой теме ограничимся *стационарным* электрическим полем  $\vec{E}$  и стационарным (постоянным) электрическим током. При этом в любой момент времени  $t$  производная  $\partial \vec{E} / \partial t \equiv 0$ . Но стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  создают электрические заряды. При постоянном поле  $\vec{E}$  плотности источников поля  $\vec{E}$  также должны быть постоянны. То есть производные по времени  $\partial \delta_{свб} / \partial t \equiv 0$ ,  $\partial \delta_{свз} / \partial t \equiv 0$ ,  $\partial \delta_{плн} / \partial t \equiv 0$ ,  $\partial \sigma_{свб} / \partial t \equiv 0, \dots$  Понятно, что при этом электрический заряд в некоторой (произвольной) области пространства  $V$  не будет меняться со временем. В частности, в случае стационарного электрического поля, для свободного заряда  $e_V^{свб}$  имеем:  $de_V^{свб} / dt \equiv 0$ . Поэтому из (4.6)- (4.8) получаем следующие *уравнения непрерывности постоянного электрического тока* в интегральной, дифференциальной и поверхностной формах:

$$\oint_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = 0, \quad \text{div } \vec{j} = 0, \quad j_n^{(2)} = j_n^{(1)}, \quad (4.9)$$

где  $S$ - любая замкнутая поверхность.

Из 2-го уравнения в (4.9) следует, что в случае постоянного тока поле  $\vec{j}$ - соленоидальное, токовые линии  $l_j$  могут быть только замкнутыми (каждая линия  $l_j$  не имеет начала и конца). Тогда и полные "цепи" постоянного тока (совокупность образующих её проводников) также должны быть замкнутыми. Схематично можем представить себе такую полную цепь постоянного тока в виде кольца (см. ниже, рис. 4.8,б).

Третье уравнение в (4.9) показывает, что в случае постоянного тока (при ограниченной плотности  $j$ ) на поверхностях  $S_{oc}$  непрерывна нормальная к этим поверхностям компонента  $j_n$  вектора  $\vec{j}$ . Действительно, как видно на рис. 4.7,б, если плотность  $\sigma_{свб}$  зарядов на  $S_{oc}$  не меняется со временем, то все свободные микрочастицы (имеющие нормальную к  $S_{oc}$  компоненту вектора скорости их упорядоченного движения) могут только пересечь  $S_{oc}$ . Это и отражено в 3-ем уравнении в (4.9).

#### 4.5. *Стороннее поле*

По своей природе стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  не отличается от электростатического поля  $\vec{E}$ . Это- кулоново (гальваническое) поле, которое создают (полные) электрические заряды, плотность которых не меняется со временем. Поэтому, в соответствии с уравнениями I, II в (3.1,а) и уравнением I в (3.3,а), для стационарного электрического поля  $\vec{E}$  справедливы уравнения:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \delta_{\text{плн}} / \varepsilon_0, \quad \oint_l (\vec{E} \, d\vec{l}) = 0, \quad (4.10)$$

где  $\delta_{\text{плн}}$  - объёмная плотность полных электрических зарядов.

В соответствии с 1-ым и 3-им уравнениями в (4.10), векторные линии  $l_E$  стационарного электрического поля  $\vec{E}$  не могут быть замкнутыми. Согласно 2-му уравнению в (4.10), линии  $l_E$  начинаются на положительных ( $\delta_{\text{плн}} > 0$ ) и оканчиваются на отрицательных ( $\delta_{\text{плн}} < 0$ ) полных зарядах.

С другой стороны, согласно 2-му уравнению в (4.10), в случае постоянного тока  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ , то есть векторные линии  $l_j$  такого тока - всегда замкнутые. Но ещё, по закону Ома в дифференциальной форме (4.4),  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ . В изотропной проводящей среде удельная электропроводность  $\gamma$  - положительная скалярная величина и, следовательно, вектор  $\vec{j} \parallel \vec{E}$ .

Отсюда следует, что существует противоречие между приведенными выше уравнениями полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  и законом Ома в дифференциальной форме. Это противоречие связано с тем, что создать постоянный электрический ток при помощи (одного лишь) стационарного поля  $\vec{E}$  электрических зарядов невозможно. Действительно, пусть в проводящей среде (с  $\gamma > 0$ ), в которой имеется множество положительных и отрицательных свободных микрочарядов, мы попробуем создать стационарное поле  $\vec{E}$  при помощи зарядов  $e^+$  и  $e^-$ . На рис. 4.8,а показано направление поля  $\vec{E}$  этих зарядов. Под действием  $\vec{E}$  положительные свободные микрочаряды в среде будут перемещаться по направлению  $\vec{E}$  (туда, где находится заряд  $e^-$ ). Противоположное направлению  $\vec{E}$  движение отрицательных свободных микрочарядов будет происходить в направлении заряда  $e^+$ . В результате заряды  $e^+$  и  $e^-$  будут нейтрализованными микрочарядами противоположного знака, поле  $\vec{E}$  и электрический ток исчезнут.

Для существования источников  $e^+$ ,  $e^-$  поля  $\vec{E}$  и электрического тока в проводящей среде требуется, чтобы в цепи тока был такой внутренний (активный) участок  $i$  цепи тока, в котором свободные заряды перемещались не под действием поля  $\vec{E}$ , а "преодолевая" действие сил поля  $\vec{E}$ . При этом можно "поддерживать" неизменными (в случае постоянного тока) величины зарядов  $e^+$  и  $e^-$ . Схематично такой участок  $i$  цепи тока показан на рис. 4.8,а.

В теории стационарного электрического поля силы, имеющие не электрическую природу и оказывающие действие на микрочаряды в проводниках, называют сторонними силами  $\vec{F}^{\text{стр}}$ . Эти силы могут иметь электрохимическую, диффузионную или иную природу. В технике такие силы действуют в гальванических элементах, аккумуляторах, генераторах. Но такие силы могут иметь и естественную природу и существовать в Земле из-

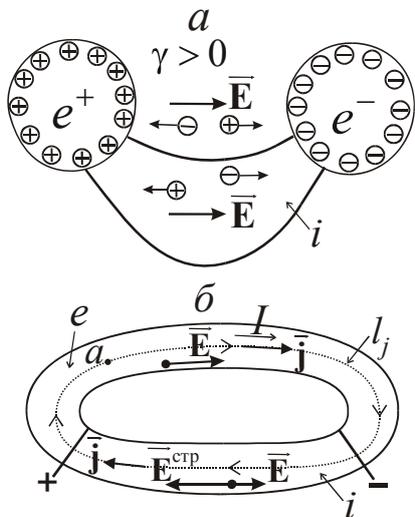
за окислительно-восстановительных процессов, фильтрации и других явлений.

Подобно напряжённости электрического поля  $\vec{E}(a)$ , *напряжённость стороннего поля*  $\vec{E}^{\text{стр}}(a) = \vec{F}^{\text{стр}}/e$ , где  $e$  - расположенный в точке  $a$  точечный заряд. То есть  $\vec{E}^{\text{стр}}(a)$  численно равна силе  $\vec{F}^{\text{стр}}$ , действующей на расположенный в точке  $a$  единичный положительный заряд.

При учёте сказанного выше следует полагать, что вместо закона Ома в дифференциальной форме (4.4) на внутренних участках  $i$  цепей электрического тока (где  $\vec{E}^{\text{стр}} \neq 0$ ) справедливо равенство:

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}}) = (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}})/\rho. \quad (4.11)$$

Понятно, что в тех "внешних" частях цепей электрического тока, где  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ , остаётся справедливым закон Ома в дифференциальной форме (4.4).



**Рис. 4.8.** Внутренний (активный) участок  $i$  цепи электрического тока; стороннее поле.

На рис. 4.8,б. схематично показана полная цепь постоянного электрического тока. Обозначенные знаками "+" и "-" сечения этой цепи могут отвечать, например, соответствующим полюсам гальванического элемента. Обратим внимание, что проходящие внутри такой цепи токовые линии  $l_j$  - замкнутые. На внутреннем участке  $i$  цепи тока направление вектора  $\vec{j}$  зависит от того, как направлено суммарное поле  $\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}}$ . В остальной части цепи, в соответствии с (4.4), векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  - взаимно параллельны (если, конечно, среда изотропна).

#### 4.6. Система уравнений стационарного электрического поля

Как уже было сказано, стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  (как и электростатическое поле  $\vec{E}$ ) создают электрические заряды, плотности (и величины) которых не меняются со временем. Поэтому для стационарного поля  $\vec{E}$  справедливы уравнения (3.1,а), (3.2,а), (3.3,а), (3.8,а), полученные нами ранее для электростатического поля  $\vec{E}$ . В частности, стационарное поле  $\vec{E}$  удовлетворяет уравнением в дифференциальной форме:  $\text{rot } \vec{E} = 0$ ,  $\text{div } \vec{E} = \delta_{\text{плн}}/\epsilon_0$ . Но, как будет показано при рассмотрении следующего вопроса, плотность полных электрических  $\delta_{\text{плн}}$  в проводящей среде зависит от электрического поля  $\vec{E}$ . При решении прямых задач, когда искомым является поле  $\vec{E}$ , неизвестными являются и левая и правая части уравнения  $\text{div } \vec{E} = \delta_{\text{плн}}/\epsilon_0$ . Поэтому удобнее включить в систему уравнений

стационарного поля  $\vec{E}$  2-е уравнение в (4.9)  $\text{div } \vec{j} = 0$  и дополнить эту систему уравнением связи (4.11)  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ср}})$ :

$$\text{I. rot } \vec{E} = 0, \quad \text{II. div } \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{ср}}). \quad (4.12)$$

Согласно уравнениям I в (3.2,a), (3.3,a), 1-му и 3-му уравнениям в (4.9) системы уравнений стационарного поля  $\vec{E}$  в интегральной и поверхностной формах:

$$\text{I. } \oint_l (\vec{E} \, d\vec{l}) = 0, \quad \text{II. } \oint_S (\vec{j} \, d\vec{S}) = 0; \quad (4.13)$$

$$\text{I. } E_\tau^{(2)} - E_\tau^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \eta_{\text{плн}}(q)}{\partial \tau}, \quad \text{II. } j_n^{(2)} = j_n^{(1)}. \quad (4.14)$$

В (4.14)  $n$  и  $\tau$  - направления, нормальные и тангенциальные (касательные) к особой поверхности  $S_{\text{ос}}$  (см. рис. 2.17), а  $\eta_{\text{плн}}$  - характеризующая двойные электрические слои поверхностная плотность дипольных моментов.

Согласно уравнению I в (4.12), что стационарное поле  $\vec{E}$  - потенциальное (см. раздел 2.5) и

$$\vec{E} = -\text{grad}U = -\nabla U. \quad (4.15)$$

Получим уравнения, которым удовлетворяет потенциал  $U$  стационарного поля  $\vec{E}$ .

Из (4.15) и уравнения  $\text{div} \vec{E} = \delta_{\text{плн}}/\varepsilon_0$  следует, что  $\text{div grad}U = -\delta_{\text{плн}}/\varepsilon_0$ , или (так как  $\text{div grad}U = \nabla^2 U$ )

$$\nabla^2 U = -\delta_{\text{плн}}/\varepsilon_0. \quad (4.16)$$

При получении (математически идентичного (4.16)) уравнения (2.20) для потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$ , уже было сказано о том, что уравнения такого вида называют уравнением Пуассона. Но, конечно, решение такого уравнения для  $U$  может быть найдено, если известна правая часть уравнения. Как уже было отмечено, плотность  $\delta_{\text{плн}}$  в проводящей среде зависит от поля  $\vec{E}$  и, следовательно, от потенциала  $U$  поля  $\vec{E}$ . То есть при искомом поле  $U$  в (4.16), правая часть этого уравнения неизвестна.

Получим другое уравнение для потенциала  $U$  поля  $\vec{E}$ . Из (4.12) следует, что  $\text{div}(\gamma \vec{E}) = -\text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{ср}})$  или  $(\nabla(\gamma \vec{E})) = -\text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{ср}})$ . Так как, согласно (4.15),  $\vec{E} = -\nabla U$ , получаем для потенциала  $U$  уравнение

$$(\nabla(\gamma \cdot \nabla U)) = \text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{ср}}), \quad (4.17)$$

математически идентичное уравнению (2.33), применявшемуся при доказательстве теоремы единственности решения прямой задачи теории постоянного потенциального поля.

Так как  $(\nabla(\gamma \cdot \nabla U)) = \gamma \nabla^2 U + (\nabla \gamma \cdot \nabla U)$ , можем представить уравнение (4.17) для потенциала  $U$  стационарного поля  $\vec{E}$  в следующем виде:

$$\nabla^2 U + \frac{(\nabla\gamma \cdot \nabla U)}{\gamma} = \frac{\operatorname{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стп}})}{\gamma}. \quad (4.17, a)$$

Из (4.17,а) следует, что при  $\nabla\gamma = \operatorname{grad} \gamma = 0$  и  $\operatorname{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стп}}) = 0$  потенциал  $U$  стационарного поля  $\vec{E}$  удовлетворяет уравнению Лапласа (2.21):  $\nabla^2 U = 0$ . То есть в среде, однородной по удельной электропроводности  $\gamma = 1/\rho$ , и при  $\operatorname{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стп}}) = 0$ . Иными словами, в однородных по  $\rho$  внешних частях цепей электрического тока (где  $\vec{E}^{\text{стп}} = 0$ ) потенциал  $U$  стационарного поля  $\vec{E}$  - гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Отметим ещё, что, потенциал  $U$  поля  $\vec{E}$  терпит разрыв на особых поверхностях  $S_{\text{ос}}$ , на которых существуют двойные электрические слои. В соответствии с (2.29), на таких поверхностях (см. рис. 2.17)

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \eta_{\text{плн}}(q), \quad (4.17, б)$$

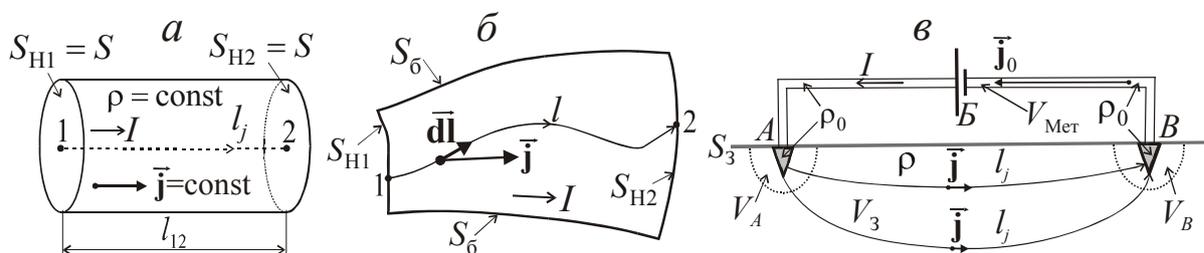
где  $\eta_{\text{плн}}$  - поверхностная плотность дипольных моментов. В отсутствие двойных слоёв потенциал  $U$  непрерывен на поверхностях  $S_{\text{ос}}$ .

#### 4.7. Сопротивление участка цепи электрического тока

Будем полагать, что мы рассматриваем внешние части цепей электрического тока, где  $\vec{E}^{\text{стп}} = 0$  и справедлив закон Ома в дифференциальной форме (4.4)  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \vec{E}/\rho$ . В разделе 4.2 уже говорили о законе Ома для участка "1-2" цепи электрического тока (4.3), ограниченного нормальными (к направлениям  $\vec{j}$ ) сечениями  $S_{\text{H1}}$  и  $S_{\text{H2}}$ :

$$I = \mathcal{E}_{12} / R_{12} \quad \text{или} \quad \mathcal{E}_{12} = I \cdot R_{12}. \quad (4.18)$$

Здесь  $\mathcal{E}_{12}$  - напряжение электрического поля  $\vec{E}$  на пути от  $S_{\text{H1}}$  к  $S_{\text{H2}}$ ,  $R_{12}$  - сопротивление участка цепи,  $I$  - электрический ток. От чего зависит сопротивление  $R_{12}$ ? Вам известно выражение для  $R_{12}$  в том простейшем случае, когда однородный по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$



**Рис. 4.9.** К определению сопротивления  $R_{12}$  участка цепи электрического тока.

участок цепи тока  $I$  имеет форму прямого цилиндра (либо прямой призмы) и векторы однородного поля  $\vec{j}$  направлены по оси цилиндра, рис. 4.9,а. При

этих условиях сопротивление  $R_{12} = \rho \cdot l_{12} / S$ , где  $S$  и  $l_{12}$  - площадь оснований и высота цилиндра.

Получим общее выражение для сопротивления участка цепи электрического тока, ограниченного нормальными сечениями  $S_{H1}$ ,  $S_{H2}$  и боковой поверхностью  $S_6$  (рис. 4.9,б). На  $S_{H1}$ ,  $S_{H2}$  векторы  $\vec{j}$  направлены по нормали к этим сечениям, а у  $S_6$  - по касательной к этой поверхности. Поверхность  $S_6$  - это, например, граница проводника и изолятора. Точки "1", "2" лежат соответственно на сечениях  $S_{H1}$ ,  $S_{H2}$ . Согласно (2.16), напряжение электрического поля  $\vec{E}$  на пути  $l$  из точки "1" в точку "2":  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{E} \cdot d\vec{l})$ . Из закона Ома в дифференциальной форме (4.4) следует, что  $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$  и напряжение  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \rho (\vec{j} \cdot d\vec{l})$ . Умножим и разделим правую часть этого равенства на ток  $I$ :  $\mathcal{E}_{12} = I \frac{1}{I} \int_1^2 \rho (\vec{j} \cdot d\vec{l})$ . При сравнении этого равенства с (4.18) видим, что сопротивление участка цепи электрического тока

$$R_{12} = \frac{1}{I} \int_1^2 \rho (\vec{j} \cdot d\vec{l}) = \int_1^2 \rho \left( \frac{\vec{j}}{I} \cdot d\vec{l} \right). \quad (4.19)$$

Понятно, что в заданном участке цепи электрического тока поле  $\vec{j}/I$  не зависит от  $I$ .

Получим более простое выражение для  $R_{12}$  для случая, когда участок цепи тока однороден по  $\rho$ , а линия  $l$  - это токовая линия  $l_j$ . При  $\rho = \text{const}$  и  $d\vec{l} \parallel \vec{j}$ , как следует из (4.19),

$$R_{12} = \frac{\rho}{I} \int_1^2 j \, dl. \quad (4.19, a)$$

Согласно 4.19,а, при заданном токе  $I$  сопротивление  $R_{12}$  тем выше, чем больше удельное электрическое сопротивление  $\rho$ , абсолютная величина  $j$  вектора плотности тока  $\vec{j}$  и длина участка цепи. Из 4.19,а не сложно получить упомянутое выше простейшее выражение для участка цепи, показанного на рис. 4.9,а. Действительно, при  $j = I/S$

$$R_{12} = \frac{\rho \cdot I^2}{I \cdot S} \int_1^2 dl = \rho \cdot l_{12} / S.$$

На рис. 4.9,в показана применяемая в некоторых методах электроразведки полная цепь электрического тока. Цепь состоит из источника тока  $B$ , проводов с металлическими жилами, металлических токовых электродов  $A$ ,  $B$  с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_0$  и горных

пород, удельное электрическое сопротивление которых обозначим  $\rho$ . Понятно, что  $\rho_0 \ll \rho$ . Какой из участков такой цепи электрического может иметь самое высокое сопротивление? В проводах и (в меньшей степени) в электродах плотность тока  $j$  - большая, но их удельное электрическое сопротивление  $\rho_0$  очень низкое. Поэтому, в соответствии с 4.19,а, сопротивление этих участков цепи - мало. При ионной проводимости горные породы имеют существенно более высокую (по сравнению с  $\rho_0$ ) величину  $\rho$ . Но, за исключением расположенных вблизи электродов областей  $V_A, V_B$  (рис. 4.9,в), плотность тока  $j$  в породах - мала и, в соответствии с 4.19,а, сопротивление этого участка цепи - низкое. А вот в областях  $V_A, V_B$  (горные породы или почва, расположенные вблизи электродов  $A, B$ ) плотность тока  $j$  - большая и при высоком значении  $\rho$  эти области обычно оказывают основное влияние на сопротивление показанной на рис. 4.9,в цепи электрического тока.

#### 4.8. ЭДС; контактная ЭДС

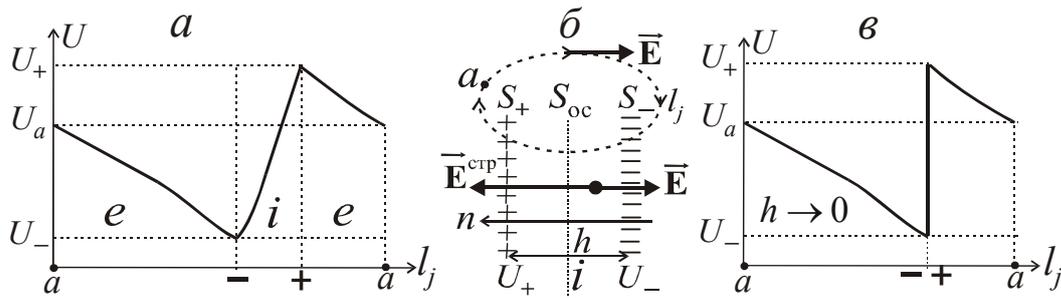
В разделе (4.6) определили связь напряжённости стационарного электрического поля  $\vec{E}$  с его потенциалом  $U$ . Согласно (4.15),  $\vec{E} = -\text{grad}U$ . Отсюда следует, что поле  $\vec{E}$  направлено в сторону наиболее резкого убывания (падения)  $U$ . Следовательно, потенциал  $U$  уменьшается по направлению  $\vec{E}$  (и возрастает в противоположном полю  $\vec{E}$  направлении).

На рис. 4.8,б была схематично показана полная цепь постоянного электрического тока. То, как может меняться потенциал  $U$  по (замкнутой) токовой линии  $l_j$  в такой цепи, показано на рис. 4.10,а. На этом рисунке  $U_a$  - потенциал в произвольной точке  $a$  во внешней части  $e$  цепи тока (где  $\vec{j} \parallel \vec{E}$ ). При движении по линии  $l_j$  от точки  $a$  до границы "-" (между внешней и внутренней частями цепи) по направлению поля  $\vec{E}$  потенциал  $U$  уменьшается. При перемещении по  $l_j$  от границы "-" до границы "+" внутреннего участка  $i$  цепи тока (где  $\vec{E}^{\text{стр}} \neq 0$ ) это перемещение происходит в направлении, противоположном направлению  $\vec{E}$  (или под тупым углом к направлению  $\vec{E}$ ). Поэтому на этом интервале линии  $l_j$  потенциал  $U$  возрастает при перемещении по линии  $l_j$ . Иными словами, во внутренней части  $i$  цепи тока (где  $\vec{j} \uparrow \downarrow \vec{E}$  либо между направлениями этих векторов - тупой угол) потенциал  $U$  возрастает по направлению  $l_j$ . После пересечения границы "+" внутреннего участка  $i$  цепи (в части  $e$  цепи тока, где  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ ) перемещение по  $l_j$  происходит по направлению  $\vec{E}$  и потенциал  $U$  уменьшается до значения  $U_a$  в точке  $a$ .

Как видно на рис. 4.10,а, максимальное ( $U_+$ ) и минимальное ( $U_-$ ) значения потенциалов имеем на границах внутреннего  $i$  и внешнего  $e$

участков цепи электрического тока. Выясним, от чего зависит разность потенциалов  $U_+ - U_-$ .

В соответствии с уравнением I в (4.13), циркуляция поля  $\vec{E}$  по проходящей в такой цепи (замкнутой) линии  $l$ , например токовой линии  $l_j$  (рис. 4.8,б), равна нулю:  $\oint_l (\vec{E} d\vec{l}) = 0$ . Вспомним, что, согласно 3-му уравнению в (4.12), вектор плотности тока  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}})$ . Из этого



**Рис. 4.10.** Изменение потенциала  $U$  поля  $\vec{E}$  в полной цепи электрического тока  $I$  по токовой линии  $l_j$  (а); к определению понятия "контактная ЭДС"  $\mathcal{E}_{\text{кнт}}$  (б); изменение потенциала  $U$  в цепи электрического тока  $I$ , "поддерживаемого"  $\mathcal{E}_{\text{кнт}}$  (в).

равенства получаем:  $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j} - \vec{E}^{\text{стр}}$ , где  $1/\gamma = \rho$  - удельное электрическое сопротивление. Поэтому из уравнения  $\oint_l (\vec{E} d\vec{l}) = 0$  следует, что,

$$\oint_l \rho \cdot (\vec{j} d\vec{l}) - \oint_l (\vec{E}^{\text{стр}} d\vec{l}) = 0 \text{ или } \oint_l (\vec{E}^{\text{стр}} d\vec{l}) = I \frac{1}{I} \oint_l \rho \cdot (\vec{j} d\vec{l}).$$

Если  $l$ - линия, проходящая вдоль полной цепи тока (например, линия  $l_j$  на рис. 4.8,б), то, согласно (4.19), правая часть этого выражения равна произведению  $I \cdot R_{\text{плн}}$ . Здесь  $R_{\text{плн}} = R_i + R_e$  - сопротивление полной цепи электрического тока,  $R_i$  - сопротивление внутреннего (активного) участка  $i$  цепи тока (где  $\vec{E}^{\text{стр}} \neq 0$ ),  $R_e$  - сопротивление внешней части  $e$  цепи тока (где  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ ), а  $I$ - электрический ток в цепи. Обозначая

$$\mathcal{E}^{\text{стр}} = \oint_l (\vec{E}^{\text{стр}} d\vec{l}) = \int_{-}^{+} (\vec{E}^{\text{стр}} d\vec{l}), \quad (4.20)$$

получаем:

$$\mathcal{E}^{\text{стр}} = I \cdot R_{\text{плн}} = I \cdot (R_i + R_e). \quad (4.21)$$

Здесь  $\mathcal{E}^{\text{стр}}$  - напряжение стороннего поля  $\vec{E}^{\text{стр}}$  в цепи электрического тока. Напряжение  $\mathcal{E}^{\text{стр}}$  называют ЭДС (электродвижущая сила).

Теперь определим, от чего зависит разность потенциалов  $U_+ - U_-$  на границах участков  $i, e$  цепи электрического тока. Мы знаем, что напряжение поля  $\vec{E}$  определяет выражение  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{E} \, d\vec{l})$  и, в соответствии с (2.16), это напряжение равно разности потенциалов:  $\mathcal{E}_{12} = U_1 - U_2$ . Отсюда следует, что во внешней части  $e$  цепи тока напряжение поля  $\vec{E}$ :  $\mathcal{E}^{+-} = U_+ - U_-$ , где  $\mathcal{E}^{+-} = \int_+^{\bar{}} (\vec{E} \, d\vec{l})$ . Так как по закону Ома в этой части цепи  $\mathcal{E}^{+-} = I \cdot R_e$ , то, в соответствии с (4.21),

$$U_+ - U_- = \mathcal{E}^{+-} = I \cdot R_e = \mathcal{E}^{\text{стр}} \cdot R_e / (R_i + R_e). \quad (4.22)$$

Из (4.22) следует, что разность потенциалов  $U_+ - U_- \leq \mathcal{E}^{\text{стр}}$ . В частности, эта разность потенциалов равна ЭДС  $\mathcal{E}^{\text{стр}}$ , если сопротивление внутреннего участка  $i$  цепи тока  $R_i \rightarrow 0$ .

В Земле внутренние части  $i$  цепей тока (где имеющее окислительно-восстановительную или диффузионную природу поле  $\vec{E}^{\text{стр}} \neq 0$ ) нередко представляют собой тонкие слои в окрестностях особых поверхностей  $S_{\text{oc}}$  (рис. 4.10,б). В таких слоях с толщиной  $h$  ЭДС  $\mathcal{E}^{\text{стр}} = E_n^{\text{стр}} \cdot h$ , где  $E_n^{\text{стр}}$  - среднее значение нормальной к  $S_{\text{oc}}$  компоненты поля  $\vec{E}^{\text{стр}}$ . При малой толщине  $h$  и большой площади поверхности  $S_{\text{oc}}$  сопротивления  $R_i$  таких слоёв - очень малы. При  $R_i \rightarrow 0$ , в соответствии с (4.22) получаем:  $U_+ - U_- = \mathcal{E}^{\text{стр}}$ . В рассматриваемом случае бывает удобно ввести понятие "контактная ЭДС"  $\mathcal{E}^{\text{кнт}}$ . При этом полагают, что  $\mathcal{E}^{\text{кнт}} = \mathcal{E}^{\text{стр}} = E_n^{\text{стр}} \cdot h$  - конечная величина, но  $h \rightarrow 0$ , а  $E_n^{\text{стр}} \rightarrow \infty$ . Если  $h \rightarrow 0$ , то потенциал  $U$  на  $S_{\text{oc}}$  терпит разрыв (рис. 4.10,в):

$$U_+ - U_- = \mathcal{E}^{\text{кнт}}. \quad (4.23)$$

При сравнении выражений (4.23) и (4.17,б) ( $U_2 - U_1 = \eta_{\text{плн}} / \epsilon_0$ ) можем сделать вывод, что в проводящих средах двойные электрические слои могут существовать только на тех поверхностях  $S_{\text{oc}}$ , где есть стороннее поле  $\vec{E}^{\text{стр}}$  и контактная ЭДС  $\mathcal{E}^{\text{кнт}} \neq 0$ . Это связано с тем, что при  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$  образующие обкладки двойного слоя (и испытывающие притяжение) свободные заряды противоположного знака в проводящей среде будут взаимно нейтрализованы. Из (4.23) и (4.17,б) следует, что характеризующая двойные слои поверхностная плотность дипольных моментов  $\eta_{\text{плн}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^{\text{кнт}}$ , где  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная. То есть поверхностная плотность дипольных

моментов  $u$  существующего на  $S_{oc}$  в проводящей среде двойного электрического слоя пропорциональна  $\epsilon^{кнт}$ . Если в проводящей среде на  $S_{oc}$   $\epsilon^{кнт}=0$  (и, соответственно,  $\vec{E}^{стр}=0$ ), то на такой  $S_{oc}$  нет двойного слоя ( $\eta_{плн}=0$ ). В этом случае на  $S_{oc}$ , в соответствии с (4.17,б), и уравнением I в (4.14), непрерывны потенциал  $U$  поля  $\vec{E}$  и тангенциальная к  $S_{oc}$  компонента  $E_\tau$  поля  $\vec{E}$ . То есть (см. рис. 2.17)

$$\text{при } \epsilon^{кнт} = 0: U_2 = U_1, E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)}. \quad (4.24)$$

#### 4.9. Источники стационарного электрического поля

Стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  создают (полные) электрические заряды. Эти заряды должны находиться внутри проводника или на его поверхности. Как было показано в разделе 3.2, заряды, расположенные вне проводника, не создают в проводнике постоянного электрического поля (см. рис. 3.2, 3.3). Этому препятствует явление электростатической индукции.

Если в каких либо областях или на поверхностях в проводнике есть электрические заряды, то эти области или поверхности будут "проявлять" себя в электрическом поле. Выясним в каких именно местах в проводящей среде и при каких условиях существуют электрические заряды: 1) объёмные с плотностью  $\delta_{плн}$ , 2) поверхностные с плотностью  $\sigma_{плн}$ .

1). Выше получили уравнения (4.16), (4.17,а) для потенциала  $U$  поля  $\vec{E}$ :  

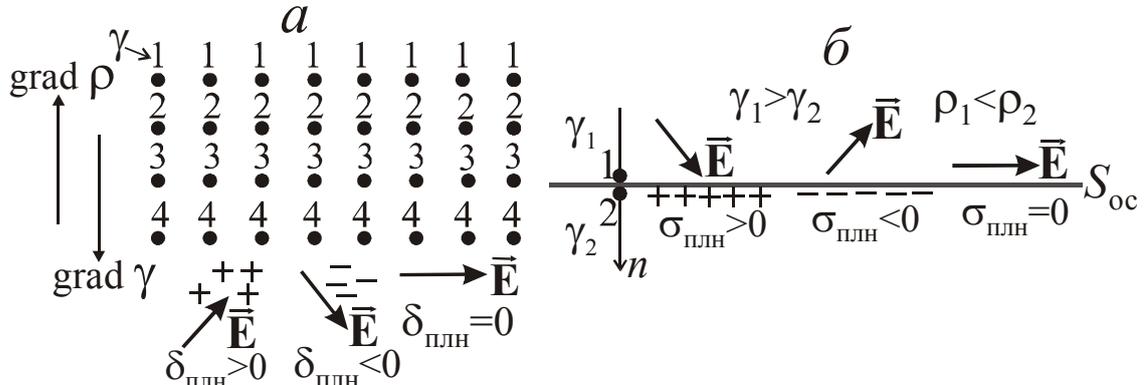
$$\nabla^2 U = -\delta_{плн}/\epsilon_0, \quad \nabla^2 U + \frac{(\nabla\gamma \cdot \nabla U)}{\gamma} = \frac{\text{div}(\gamma \vec{E}^{стр})}{\gamma} \quad \text{или} \quad \nabla^2 U = -\frac{(\nabla\gamma \cdot \nabla U)}{\gamma} + \frac{\text{div}(\gamma \vec{E}^{стр})}{\gamma}.$$
Отсюда следует, что  $-\delta_{плн}/\epsilon_0 = -\frac{(\nabla\gamma \cdot \nabla U)}{\gamma} + \frac{\text{div}(\gamma \vec{E}^{стр})}{\gamma}$ . Из этого равенства, принимая во внимание, что, согласно (4.15),  $\nabla U = -\vec{E}$ , получаем:  $\delta_{плн} = -\epsilon_0 \frac{(\nabla\gamma \cdot \vec{E})}{\gamma} - \epsilon_0 \frac{\text{div}(\gamma \vec{E}^{стр})}{\gamma}$ . Представим это выражение в виде:

$$\delta_{плн} = \delta' + \delta'', \quad \delta' = -\frac{\epsilon_0}{\gamma} (\nabla\gamma \cdot \vec{E}), \quad \delta'' = -\frac{\epsilon_0}{\gamma} \text{div}(\gamma \vec{E}^{стр}). \quad (4.25)$$

Заряды с объёмной плотностью  $\delta''$  находятся во внутренних частях  $i$  цепей электрического тока (см. рис. 4.8,б), в тех областях, где  $\text{div}(\gamma \vec{E}^{стр}) \neq 0$ .

В соответствии с (4.25), для существования зарядов с объёмной плотностью  $\delta'$  необходимо, чтобы не было равно нулю скалярное произведение  $(\nabla\gamma \cdot \vec{E}) = (\text{grad}\gamma \cdot \vec{E})$ . Для этого требуется выполнение трёх условий: 1)  $\vec{E} \neq 0$ , 2)  $\text{grad}\gamma \neq 0$  и 3) направления векторов  $\vec{E}$  и  $\text{grad}\gamma$  не должны быть взаимно ортогональны. То есть объёмные заряды могут присутствовать в градиентных по удельной электропроводности  $\gamma = 1/\rho$

средах при существовании в таких средах электрического поля  $\vec{E}$ . Знак скалярного произведения ( $\text{grad } \gamma \cdot \vec{E}$ ) зависит от того, каков знак косинуса угла между направлениями векторов  $\vec{E}$  и  $\text{grad } \gamma$ . Из выражения (4.25) для  $\delta'$  следует, что при остром угле между этими направлениями (удельная



**Рис. 4.11.** Индуцированные в проводящей среде заряды: объёмные в градиентной (по удельной электропроводности  $\gamma=1/\rho$ ) среде (а) и поверхностные - на границе  $S_{oc}$  сред с удельными электропроводностями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (б).

электропроводность  $\gamma$  возрастает по направлению  $\vec{E}$ ) плотность  $\delta' < 0$ . При тупом угле между направлениями  $\vec{E}$  и  $\text{grad } \gamma$  (удельная электропроводность  $\gamma$  убывает по направлению  $\vec{E}$ ) плотность  $\delta' > 0$  (рис. 4.11,а).

2). При выводе выражения для поверхностной плотности  $\sigma_{плн}$  ограничимся случаем, когда некоторая особая поверхность  $S_{oc}$  (см. рис. 2.17) находится во внешней части цепи электрического тока, где  $\vec{E}^{стр} = 0$ . В точках "1", "2", лежащих на разных сторонах  $S_{oc}$  ( $L_{12} \rightarrow 0$ ), значения удельной электропроводности обозначим соответственно  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Согласно изложенному выше, в разделе 4.8, при  $\vec{E}^{стр} = 0$  и  $\mathcal{E}^{кнт} = 0$  на  $S_{oc}$  не может существовать двойной электрический слой и поверхностная плотность дипольных моментов  $\eta_{плн} = 0$ . При этом из 3-го уравнения в (4.12) получаем закон Ома в дифференциальной форме (4.4), а, кроме того, справедливы равенства (4.24).

Ещё при рассмотрении этого и следующего вопросов, нам понадобятся уравнения II в (4.14), (3.2,а). Итак, при  $\vec{E}^{стр} = 0$  на особой поверхности  $S_{oc}$  справедливы равенства

$$j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = 0, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_{плн}, \quad E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)}. \quad (4.26)$$

Согласно (4.26),

$$0 = j_n^{(2)} - j_n^{(1)} = \gamma_2 E_n^{(2)} - \gamma_1 E_n^{(1)} = \frac{1}{2} [\gamma_2 E_n^{(2)} + \gamma_2 E_n^{(2)} - \gamma_1 E_n^{(1)} - \gamma_1 E_n^{(1)} + \gamma_1 E_n^{(2)} - \gamma_1 E_n^{(2)} + \gamma_2 E_n^{(1)} - \gamma_2 E_n^{(1)}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \gamma_2 (E_n^{(2)} - E_n^{(1)}) + \gamma_1 (E_n^{(2)} - E_n^{(1)}) - E_n^{(2)} (\gamma_1 - \gamma_2) - E_n^{(1)} (\gamma_1 - \gamma_2) \right] = \\
&= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} (E_n^{(2)} - E_n^{(1)}) - \frac{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}}{2} (\gamma_1 - \gamma_2). \text{ Так как, согласно 3-му равенству в} \\
(4.26), \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \sigma_{\text{плн}} / \varepsilon_0, \quad \text{то} \quad \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{\sigma_{\text{плн}}}{\varepsilon_0} - \frac{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее выражение для поверхностной плотности полных зарядов на  $S_{\text{ос}}$ :

$$\sigma_{\text{плн}} = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_n^{\text{cp}}, \quad \text{где} \quad E_n^{\text{cp}} = \frac{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}}{2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (4.27)$$

В (4.27)  $E_n^{\text{cp}}$  - среднее значение нормальной к поверхности  $S_{\text{ос}}$  компоненты поля  $\vec{E}$  в точках "1", "2", а  $\gamma_{12}$  - коэффициент контрастности поверхности  $S_{\text{ос}}$ -границы сред с удельными электропроводностями  $\gamma_1, \gamma_2$ .

Согласно (4.27), для того, чтобы на находящейся в проводящей среде поверхности (или на границе такой среды) существовали поверхностные заряды с плотностью  $\sigma_{\text{плн}}$  и эта поверхность "проявила" себя в электрическом поле требуется выполнение двух условий: 1)  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , 2)  $E_n^{\text{cp}} \neq 0$ . То есть  $S_{\text{ос}}$  должна быть границей (поверхностью раздела) сред с разными значениями удельной электропроводности  $\gamma = 1/\rho$  и должна существовать нормальная к этой границе компонента электрического поля  $\vec{E}$ .

Пусть  $\gamma_1 > \gamma_2$  и коэффициент контрастности границы  $\gamma_{12} > 0$ . Тогда, согласно (4.27), знак  $\sigma_{\text{плн}}$  будет таким же, как знак компоненты  $E_n$ . Компонента  $E_n$  положительна, если угол между направлениями  $\vec{E}$  и нормали  $n$  к  $S_{\text{ос}}$  - острый и отрицательна, если этот угол тупой. В соответствии с обозначениями, показанными на рис. 2.17, нормаль  $n$  к  $S_{\text{ос}}$  направлена в ту область пространства  $V_2$ , которой принадлежит точка "2". В этом случае (при  $\gamma_1 > \gamma_2$ ), согласно (4.27), при  $E_n > 0$  (удельная электропроводность  $\gamma$  "скачком" убывает по направлению  $\vec{E}$ ) плотность  $\sigma_{\text{плн}} > 0$ . При  $E_n < 0$  ( $\gamma$  на  $S_{\text{ос}}$  "ступенчато" возрастает по направлению  $\vec{E}$ ) имеем  $\sigma_{\text{плн}} < 0$  (рис. 4.11,б).

Отметим ещё то, от чего зависит и в каких пределах меняется коэффициент контрастности  $\gamma_{12}$  границы сред с разной удельной электропроводностью. Согласно (4.27),  $\gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\gamma_1/\gamma_2 - 1}{\gamma_1/\gamma_2 + 1} = \frac{\rho_2/\rho_1 - 1}{\rho_2/\rho_1 + 1}$ , где  $1/\gamma_1 = \rho_1$  и  $1/\gamma_2 = \rho_2$  - удельные электрические сопротивления среды в расположенных на разных сторонах границы  $S_{\text{ос}}$  точках "1", "2". Следовательно, коэффициент контрастности  $\gamma_{12}$  зависит только от отношения удельных электрических сопротивлений  $\rho_2/\rho_1 = \gamma_1/\gamma_2$  граничащих сред. Из

приведенного выражения для  $\gamma_{12}$  следует, что при изменении отношения  $\rho_2/\rho_1$  от нуля до бесконечности коэффициент  $\gamma_{12}$  (которому пропорциональна плотность  $\sigma_{\text{плн}}$  индуцированных на  $S_{\text{oc}}$  зарядов - источников поля  $\vec{E}$ ) меняется от  $-1$  до  $+1$ . Если на  $S_{\text{oc}}$  имеем  $\rho_2 = \rho_1$  ( $S_{\text{oc}}$  не является границей сред с разными значениями удельных электрических сопротивлений), то  $\gamma_{12} = 0$  и, в соответствии с (4.27),  $\sigma_{\text{плн}} = 0$ .

#### 4.10. Стационарное электрическое поле у границы двух сред

Пусть  $S_{\text{oc}}$ - граница (поверхность раздела) двух сред с разными значениями удельной электропроводности  $\gamma_1 = 1/\rho_1$  и  $\gamma_2 = 1/\rho_2$  (рис. 4.12). Будем полагать, что на поверхности  $S_{\text{oc}}$  поле  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$  и нет двойного электрического слоя (см. раздел 4.8), то есть на  $S_{\text{oc}}$  поверхностная плотность дипольных моментов  $\eta_{\text{плн}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^{\text{кнт}} = 0$ . Но, в соответствии с (4.27), на такой границе могут находиться поверхностные заряды в виде простого слоя с плотностью  $\sigma_{\text{плн}}$ . В окрестности такой поверхности  $S_{\text{oc}}$  справедливы равенства (4.26):

$$j_n^{(2)} = j_n^{(1)}, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad E_n^{(2)} - E_n^{(1)} = \sigma_{\text{плн}}/\epsilon_0, \quad E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)}.$$

На рис. 4.12 показаны лежащие в плоскости рисунка векторы  $\vec{E}^{(1,2)}$  в точках "1", "2", находящихся на разных сторонах поверхности  $S_{\text{oc}}$ , для случая, когда  $\gamma_1 > \gamma_2$ . При таких, как на рис. 4.12, направлениях  $\vec{E}^{(1,2)}$  и при  $\gamma_1 > \gamma_2$ , в соответствии с (4.27), на поверхности  $S_{\text{oc}}$  существуют индуцированные заряды с плотностью  $\sigma_{\text{плн}} > 0$ . Векторы  $\vec{E}^{(1,2)}$  - сумма тангенциальных и нормальных к  $S_{\text{oc}}$  векторных компонент:  $\vec{E}^{(1,2)} = \vec{E}_\tau^{(1,2)} + \vec{E}_n^{(1,2)}$ . Согласно последнему равенству в (4.26), тангенциальная компонента поля  $\vec{E}$  непрерывна на  $S_{\text{oc}}$ :  $E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)}$ . Из уравнений  $j_n^{(2)} = j_n^{(1)}$ ,  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  в (4.26) следует, что  $\gamma_2 E_n^{(2)} = \gamma_1 E_n^{(1)}$  или  $E_n^{(2)} = (\gamma_1/\gamma_2) E_n^{(1)}$ . При  $\gamma_1 > \gamma_2$  имеем  $E_n^{(2)} > E_n^{(1)}$ , что и отражено на рис. 4.12,а. То есть, вследствие влияния на поле  $\vec{E}$  индуцированных на границе  $S_{\text{oc}}$  зарядов, при переходе через эту границу (из точки "1" в точку "2") резко меняется направление вектора  $\vec{E}$ .

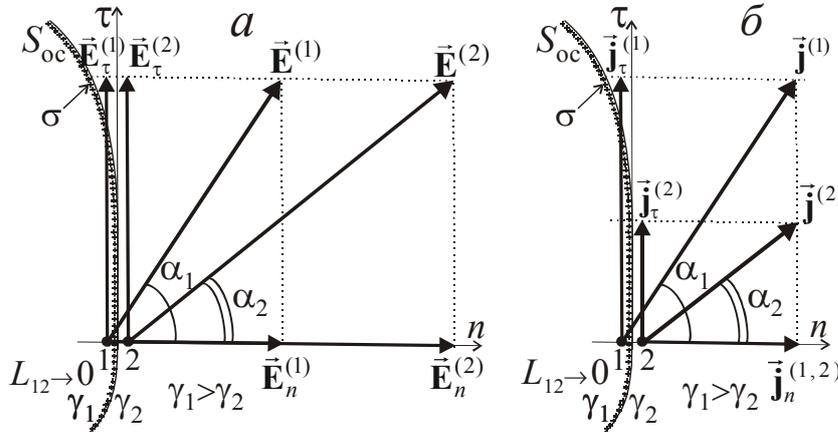
Обозначим  $\alpha_{1,2}$  углы между направлением нормали  $n$  к  $S_{\text{oc}}$  и направлениями векторов  $\vec{E}^{(1,2)}$  в точках "1, 2". Как видно на рис. 4.12,а,

$$\text{tg } \alpha_{1,2} = E_\tau^{(1,2)} / E_n^{(1,2)}. \quad \text{Отношение} \quad \frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{E_\tau^{(2)} / E_n^{(2)}}{E_\tau^{(1)} / E_n^{(1)}}. \quad \text{Но} \quad E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)},$$

следовательно  $\frac{\text{tg } \alpha_2}{\text{tg } \alpha_1} = \frac{E_n^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{j_n^{(1)} / \gamma_1}{j_n^{(2)} / \gamma_2}$  так как по закону Ома в

дифференциальной форме  $\vec{E} = \vec{j}/\gamma$ . Но, в соответствии с (4.9), для постоянного тока на  $S_{oc}$   $j_n^{(2)} = j_n^{(1)}$ . Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (4.28)$$

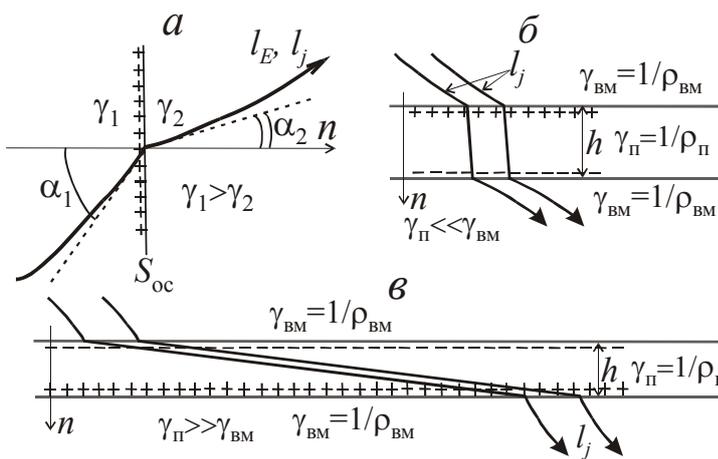


**Рис. 4.12.** Векторы  $\vec{E}$  (а) и  $\vec{j}$  (б) у  $S_{oc}$  – границы сред с удельными электропроводностями  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

то есть отношение тангенсов углов  $\alpha_{2,1}$  равно отношению удельных электропроводностей  $\gamma_2/\gamma_1$  граничащих сред. Так как в изотропных средах и при  $\vec{E}^{стр} = 0$   $\vec{j} \parallel \vec{E}$ , то можем полагать, что в (4.28)  $\alpha_{1,2}$  - это

углы между направлением нормали  $n$  к  $S_{oc}$  и направлениями векторов  $\vec{j}^{(1,2)}$  в точках "1, 2". На рис. 4.12,б (для той же модели среды и направления вектора  $\vec{E}^{(1)}$ , что и на рис. 4.12,а) показаны векторы  $\vec{j}^{(1,2)} = \gamma_{1,2} \vec{E}^{(1,2)}$  и векторные компоненты этих векторов в точках "1, 2".

При остром угле  $\alpha_1$  силовые линии  $l_E$  и токовые линии  $l_j$  испытывают



**Рис. 4.13.** Преломление векторных линий  $l_E, l_j$  на границе сред с разными значениями удельной электропроводности  $\gamma = 1/\rho$  (а); преломление линий  $l_j$ , "проходящих" слой (пласт) с низкой (б) и высокой (в) удельной электропроводностью  $\gamma_{II}$ .

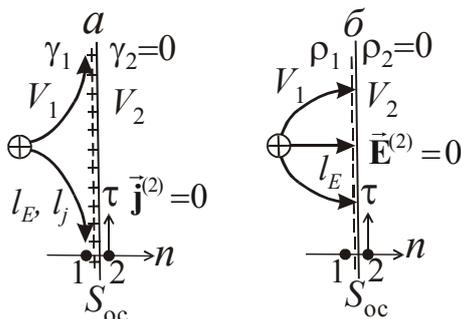
преломление на границе  $S_{oc}$  сред с разными значениями удельной электропроводности. На рис. 4.13,а показано преломление таких линий для случая, когда  $\gamma_1 > \gamma_2$ .

Рис. 4.13,б иллюстрирует то, как могут токовые линии  $l_j$  пересекать пласт (слой с плоско-параллельными границами), удельная электропроводность  $\gamma_{II}$  которого мала по сравнению с удельной электропроводностью  $\gamma_{VM}$  вмещающей пласт среды. В пределах пласта направления

линий  $l_j$  приближаются к направлению нормали  $n$  к границам пласта. При изучении курса "Электроразведка" вы узнаете, что влияние такого слоя на электрическое поле зависит, в основном, от поперечного сопротивления  $T_{\Pi} = h/\gamma_{\Pi} = h \cdot \rho_{\Pi}$ , где  $h$  - мощность (толщина) слоя, а  $\rho_{\Pi}$  - его удельное электрическое сопротивление. На 4.13,в схематично показано то, как токовые линии  $l_j$  могут пересекать пласт, удельная электропроводность  $\gamma_{\Pi}$  которого велика по сравнению с удельной электропроводностью  $\gamma_{\text{вм}}$  вмещающей среды. Влияние такого (хорошо проводящего) слоя на поле  $\vec{E}$  зависит, в основном, от продольной проводимости слоя  $S_{\Pi} = h \cdot \gamma_{\Pi} = h/\rho_{\Pi}$ . Заметим, что если бы мы на рис. 4.13,б,в показали не токовые линии  $l_j$ , а (имеющие то же направление, что линии  $l_j$ ) силовые линии  $l_E$ , то часть линий  $l_E$  должна была начинаться на индуцированных на границе пласта положительных зарядах и оканчиваться на отрицательных зарядах.

Рассмотрим ещё некоторые особенности полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}$  и потенциала  $U$  в присутствии границы  $S_{\text{oc}}$  в двух "предельных" случаях. Как и ранее, будем полагать, что областях  $V_1, V_2$  поле  $\vec{E}^{\text{стр}}=0$  и на поверхности  $S_{\text{oc}}$  нет двойного электрического слоя. При этом, в соответствии с (4.26), в  $V_1, V_2$  имеем:  $\vec{j}^{(1,2)} = \gamma_{1,2} \vec{E}^{(1,2)}$  а в точках "1", "2" на  $S_{\text{oc}}$  (при расстоянии  $L_{12} \rightarrow 0$ ) непрерывны нормальная к  $S_{\text{oc}}$  компонента вектора  $\vec{j}$  и тангенциальная компонента вектора  $\vec{E}$ :  $j_n^{(2)} = j_n^{(1)}, E_{\tau}^{(2)} = E_{\tau}^{(1)}$  (рис. 4.14).

1). Поверхность  $S_{\text{oc}}$  - граница проводящей среды с удельной электропроводностью  $\gamma_1 \neq 0$  в области пространства  $V_1$  и занимающим область пространства  $V_2$  изолятором с  $\gamma_2 = 0$  (рис. 4.14,а). При этом



**Рис. 4.14.** Стационарное электрическое поле у границы с изолятором (а) и идеальным проводником (б).

очевидно, что в  $V_2$  плотность тока  $\vec{j}^{(2)} = \gamma_2 \vec{E}^{(2)} = 0$ . Тогда к проводнике (в  $V_1$ ) у границы  $S_{\text{oc}}$  с изолятором  $j_n^{(1)} = j_n^{(2)} = 0$  и  $E_n^{(1)} = j_n^{(1)} / \gamma_1 = 0$ , то есть у границы  $S_{\text{oc}}$   $\vec{j}^{(1)} = \vec{j}^{(2)}$ ,  $\vec{E}^{(1)} = \vec{E}^{(2)}$  то есть в проводнике у границы с изолятором токовые линии  $l_j$  и силовые линии  $l_E$  направлены по касательному к изолятору направлению (рис. 4.14,а). Так как, согласно (4.15), (2.15),  $\vec{E} = -\text{grad}U$ ,  $E_l = -\partial U / \partial l$ , то у  $S_{\text{oc}}$  при

$E_n^{(1)} = 0$  производная  $\partial U_1 / \partial n = 0$ . Если принять во внимание изложенное в разделе (2.12), то это означает, что при решении прямой задачи теории стационарного поля  $\vec{E}$  при необходимости постановки краевой задачи для

проводящей среды на её границе и изолятором мы можем потребовать выполнения краевого условия 2-го типа (в (2.37) функция  $\psi(p)=\psi_{(1)}=0$  у поверхности  $S_{oc}$ .

2). Поверхность  $S_{oc}$ - граница (умеренно) проводящей среды с удельной электропроводностью  $\gamma_1 = 1/\rho_1 \neq 0$  в области пространства  $V_1$  и занимающим область пространства  $V_2$  идеальным проводником с удельным электрическим сопротивлением  $\rho_2 = 0$  (рис. 4.14,б). Так как в  $V_2$   $\vec{E}^{(2)} = \rho_2 \vec{j}^{(2)}$ , то при конечной величине  $j^{(2)}$  и  $\rho_2 = 0$  в идеальном проводнике  $\vec{E}^{(2)} = 0$ . А так как на  $S_{oc}$   $E_\tau^{(2)} = E_\tau^{(1)}$ , то в точках "1" у границы  $S_{oc}$   $E_\tau^{(1)}=0$   $E_n^{(1)} = j_n^{(1)} / \gamma_1 = 0$ . У границы  $S_{oc}$   $\vec{j}^{(1)} = \vec{j}_\tau^{(1)}$ ,  $\vec{E}^{(1)} = \vec{E}_\tau^{(1)}$  то есть в проводнике у границы  $S_{oc}$  с идеальным проводником силовые линии  $l_E$  (и токовые линии  $l_j$ ) направлены по нормали к  $S_{oc}$  (рис. 4.14,б). Отметим ещё, что в занятой идеальным проводником области  $V_2$  при  $\vec{E}^{(2)} - \text{grad}U_2 = 0$  имеем  $U_2 = \text{const}$ , то есть область  $V_2$  - эквипотенциальна.

#### 4.11. Токовые электроды

Для того, чтобы искусственно создать в проводнике (в частности, в Земле) стационарное электрическое поле  $\vec{E}$ , служат токовые электроды. Такие металлические электроды имеют очень низкие значения удельного электрического

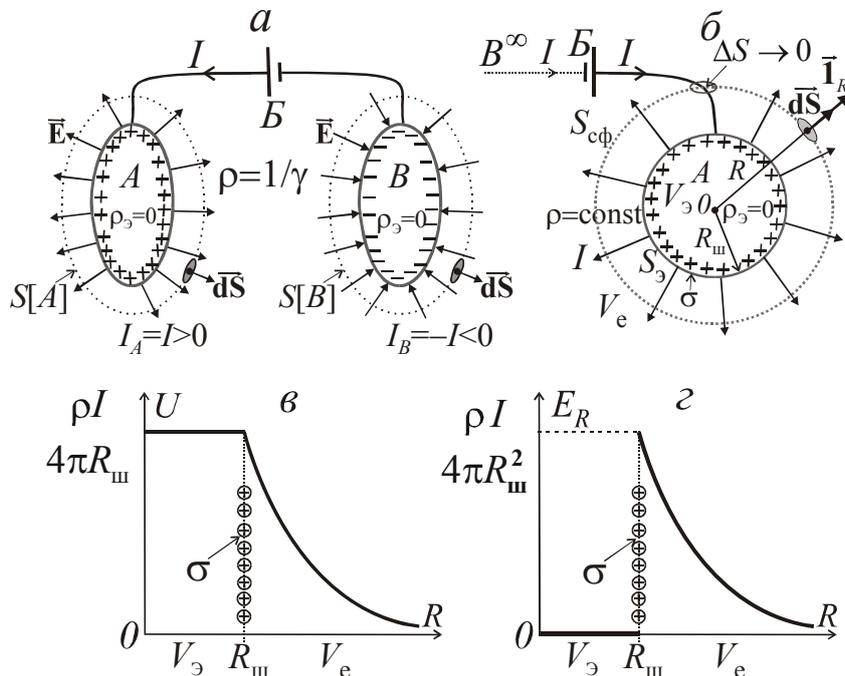


Рис. 4.15. Токовые электроды.

сопротивления  $\rho_{\text{э}}$  и в теории можем полагать что электроды-идеальные проводники с  $\rho_{\text{э}} \rightarrow 0$ . Для создания замкнутой цепи постоянного тока требуются, как минимум, два электрода: A, B (рис. 4.15,а).

Ток  $I_A$ , стекающий с электрода A в проводящую среду, или ток  $I_B$ , "втекающий" из среды в электрод B, называют током

эмиссии (эмиссией) электрода. В отличие от положительного тока  $I$  в цепи току эмиссии придают алгебраический смысл:  $I_A > 0$ ,  $I_B < 0$ . Не сложно показать, что в случае, показанном на рис. рис. 4.15,а, и при постоянном токе эмиссия  $I_A = I$ , а  $I_B = -I$ , где  $I$  - электрический ток в (полной) цепи.

Например, применим интегральную форму уравнения непрерывности постоянного тока (4.9),  $\oint_S (\vec{j} \, d\vec{S}) = 0$  к окружающий электрод  $A$  замкнутой поверхности  $S[A]$ . Равный нулю поток вектора  $\vec{j}$  через  $S[A]$  определяют ток  $I$ , направленный внутрь ограниченной  $S[A]$  области пространства и ток эмиссии  $I_A$ , направленный наружу по отношению к этой области. Следовательно,  $-I + I_A = 0$  то есть  $I_A = I$ .

Если принять во внимание изложенное в разделах 4.9, 4.10, то понятно, что (создаваемое в безгранично-однородной среде с конечным значением  $\rho$ ) первичное поле идеально проводящих электродов- это поле поверхностных зарядов (с плотностью  $\sigma = \sigma_{\text{плн}}$ ), находящихся на поверхностях электродов.

Определим некоторые характеристики электродов на примере расположенного в однородной по удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  среде "уединённого электрода"  $A$  в форме шара с радиусом  $R_{\text{ш}}$ . В теории стационарного электрического поля термин "уединённый электрод"  $A$  означает, что необходимый для создания замкнутой цепи тока второй электрод  $B$  ( $B^\infty$ ) находится на бесконечном удалении от электрода  $A$  и не влияет на поле  $\vec{E}$  в рассматриваемой области пространства (рис. 4.15,б). Кроме того, предполагают, ток  $I$  к электроду  $A$  подводится "по бесконечно-тонкому проводу с бесконечно-высоким сопротивлением изоляции" [3]. При этом можно полагать, что наличие этого провода не изменяет модель среды, а ток в окружающую электрод среду поступает с поверхности электрода (а не из провода). При  $\rho_{\text{э}} \rightarrow 0$  электрод эквипотенциален и векторы  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ , у поверхности электрода, в окружающей его среде, направлены по нормали к поверхности электрода (см. раздел 4.10 и рис. 4.14,б). Определим поля  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ , потенциал  $U$  поля  $\vec{E}$  и некоторые характеристики шарового электрода.

В рассматриваемом на рис. 4.15,б случае модель среды и поля  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ ,  $U$  имеют сферическую симметрию относительно центра электрода. Введём сферическую систему координат  $R, \theta, \varphi$  с началом  $\theta$  в центре электрода. При сферической симметрии полей  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ ,  $U$  имеем:

$$\vec{j} = \vec{1}_R j_R(R), \quad \vec{E} = \vec{1}_R E_R(R), \quad U = U(R). \quad (4.29)$$

В области  $V_{\text{э}}$  (в электроде) при  $\rho_{\text{э}} \rightarrow 0$  и конечной плотности тока  $\vec{j}$  поле  $\vec{E}^{\text{э}} = \rho_{\text{э}} \vec{j}^{\text{э}} = 0$ , а (так как  $\vec{E}^{\text{э}} = -\text{grad}U_{\text{э}}$ ) потенциал  $U_{\text{э}} = C = \text{const}$ . Константу  $C$  определим позже.

Для определения поля  $\vec{j}$  в области пространства  $V_{\text{е}}$  (в окружающей электрод однородной по  $\rho$  среде) представим себе сферическую поверхность  $S_{\text{сф}}$  с центром  $\theta$  в начале сферических координат и с радиусом  $R > R_{\text{ш}}$  (рис. 4.15,б). Согласно (4.13), поток вектора  $\vec{j}$  через поверхность  $S_{\text{сф}}$  равен нулю.

Но если удалить из поверхности  $S_{\text{сф}}$  бесконечно малую площадку  $\Delta S$ , через которую "протекает" ток  $I$  по проводу, то для поверхности  $S' = S_{\text{сф}} - \Delta S$  получаем:  $\int_{S'} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = I_A = I$ . Принимая во внимание выражение (4.29) для  $\vec{j}$  и то, что на поверхности  $S'$  координата  $R = \text{const}$ , получаем:  $\int_{S'} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = \int_{S'} j_R dS = j_R \int_{S'} dS = j_R S' \approx j_R 4\pi R^2 = I$ . Таким образом, получаем очевидное выражение для ненулевой компоненты вектора плотности тока вне электрода  $j_R^e = I / (4\pi R^2)$ .

По закону Ома в дифференциальной форме  $E_R^e = j_R^e / \gamma = \rho j_R^e$ , следовательно  $E_R^e = \rho I / (4\pi R^2)$ . Определим теперь потенциал  $U$  такого поля  $\vec{E}$ . Согласно (2.17), потенциал в произвольной точке  $a$ :  $U_a = \int_a^\Phi (\vec{E} \cdot d\vec{l}) + U_\Phi$ , где  $U_\Phi$  - известный (заданный) потенциал в некоторой точке  $\Phi$ . Полагая, что  $U=0$  на бесконечном удалении от электрода ( $\Phi \rightarrow \infty$ ,  $U_\Phi = 0$ ) и принимая во внимание, что при  $\vec{E} = \vec{1}_R E_R(R)$ ,  $U = U(R)$  имеем:  $(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = (\vec{1}_R \cdot d\vec{l}) E_R = E_R \cdot dR$ , где  $dR = (\vec{1}_R \cdot d\vec{l})$  - изменение координаты  $R$  при перемещении точки по отрезку  $d\vec{l}$ . Итак, при сферической симметрии полей  $\vec{E}$ ,  $U$  и  $U(\infty) = 0$ , в области  $V_e$  потенциал  $U_e(R) = \int_R^\infty E_R dR = \rho I / (4\pi) \int_R^\infty dR / R^2 = \rho I / (4\pi R)$ . Таким образом, в окружающей шаровой электрод  $A$  однородной среде (в области  $V_e$ )

$$\vec{j} = \vec{1}_R I / (4\pi R^2), \quad \vec{E} = \vec{1}_R \rho I / (4\pi R^2), \quad U = \rho I / (4\pi R). \quad (4.30)$$

Так как на (находящемся на поверхности электрода) поверхностном заряде в виде простого слоя с плотностью  $\sigma$  потенциал  $U$  поля  $\vec{E}$  непрерывен (см. 4.17,б), то константу  $C$  в выражении  $U_\Omega = C$  для потенциала внутри электрода необходимо выбрать равной  $\rho I / (4\pi R_{\text{ш}})$ . Зависимости потенциала  $U$  и компоненты  $E_R$  поля  $\vec{E}$  от расстояния  $R$  до центра  $O$  шарового электрода показаны на рис. 4.15,в,г. Как видно на рис. 4.15,г, на поверхности электрода нормальная к ней компонента  $E_R$  поля  $\vec{E}$  терпит разрыв, равный  $\rho I / (4\pi R_{\text{ш}}^2)$ . Но, согласно 3-му равенству в (4.26), этот разрыв равен  $\sigma / \epsilon_0$ , где  $\sigma = \sigma_{\text{плн}}$  полная плотность поверхностных зарядов на особой поверхности. Следовательно, на поверхности шарового электрода плотность  $\sigma = \epsilon_0 \rho I / (4\pi R_{\text{ш}}^2)$ . Так как плотность  $\sigma$  - одинакова на всей поверхности  $S_\Omega$  электрода, то заряд электрода  $A$ :  $e_\Omega = \sigma \cdot S_\Omega = \sigma \cdot 4\pi R_{\text{ш}}^2 = \epsilon_0 \rho I$ . Следовательно, заряд электрода пропорционален эмиссии  $I$  электрода и удельному электрическому сопротивлению  $\rho$  окружающей электрод среды. Заметим, что полученное выражение для заряда  $e_\Omega$  электрода  $A$  справедливо при любой

форме идеально-проводящего электрода, окружённого однородной средой с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ . При этих же условиях заряд электрода  $B$  (см. рис. 4.15,а) равен  $-\varepsilon_0 \rho I$ .

Определим ещё (на примере расположенного в безграничной однородной среде шарового электрода) такую характеристику, как сопротивление заземления электрода  $R_{\text{э}}$ .  $R_{\text{э}}$  - это сопротивление на участке цепи от поверхности электрода до тех точек (поверхностей), которые находятся на бесконечном удалении от электрода. При  $\rho = \text{const}$  и  $\vec{j} = \vec{1}_R j_R$ ,  $j_R^e = I / (4\pi R^2)$ ,

в соответствии в (4.19,а),  $R_{\text{э}} = \frac{\rho}{I} \int_{R_{\text{ш}}}^{\infty} j_R^e dR = \frac{\rho}{I} \int_{R_{\text{ш}}}^{\infty} \frac{I}{4\pi R^2} dR = \frac{\rho}{4\pi R_{\text{ш}}}$ . То есть

сопротивление заземления  $R_{\text{э}}$  шарового электрода тем выше, чем меньше его радиус  $R_{\text{ш}}$  и больше удельное электрическое сопротивление  $\rho$  среды, в которой находится электрод.

В ряде методов электроразведки и электрических методов исследования скважин пользуются понятием "точечный электрод" - электрод бесконечно-малых размеров. Можно полагать, в частности, что токовые электроды  $A$ ,  $B$  - "точечные", если линейные размеры этих электродов много меньше, чем расстояния от  $A$ ,  $B$  до точек наблюдения  $a$  во много раз меньше, чем размеры электродов  $A$ ,  $B$ . Выражения для полей  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ ,  $U$  точечного электрода  $A$  и других его характеристик в безграничной однородной среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$  получим, полагая в полученных выше равенствах  $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$ . При этом не изменятся выражения (4.30) для полей  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$ ,  $U$ . То есть эти выражения справедливы также для полей точечного электрода, расположенного (в безграничной однородной среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ ) в точке  $\theta$  - начале сферических координат. При  $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$  не изменится также выражение для заряда  $e_{\text{э}}$  электрода  $A$ :  $e_{\text{э}} = \varepsilon_0 \rho I$ . Но для плотности поверхностных зарядов  $\sigma = \varepsilon_0 \rho I / (4\pi R_{\text{ш}}^2)$  при  $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$  получаем:  $\sigma \rightarrow \infty$ . То, что  $\sigma \rightarrow \infty$  обусловлено тем, что при конечной эмиссии  $I$  электрода, полагая  $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$  мы фактически заменяем поверхностный заряд точечным зарядом  $e_{\text{э}} = \varepsilon_0 \rho I$  с бесконечно-большой поверхностной плотностью. Заметим ещё, что при  $R_{\text{ш}} \rightarrow 0$  для сопротивления заземления электрода  $R_{\text{э}} = \rho / 4\pi R_{\text{ш}}$  получаем:  $R_{\text{э}} \rightarrow \infty$ . При бесконечно высоких сопротивлениях заземления токовых электродов и конечной ЭДС  $\mathcal{E}^{\text{ст}}$  (см. (4.21)) получим нулевой ток  $I$  в цепи. Поэтому на практике применяют электроды, имеющие не очень малые размеры.

#### **4.12. Интегральные уравнения для плотности источников стационарного электрического поля**

Пусть нам требуется получить решение прямой задачи теории стационарного электрического поля  $\vec{E}$ , в которой заданными являются

заряды  $e_n$  - источники первичного поля  $\vec{E}^n$ , либо известно создаваемое этими зарядами поле  $\vec{E}^n$ . Задана также модель среды- распределение в пространстве удельной электропроводности  $\gamma=1/\rho$ . Требуется определить в такой модели среды суммарное поле  $\vec{E}$ , либо его потенциал  $U$  ( $\vec{E} = -\text{grad}U$ ). Если в той области пространства, в которой мы хотим определить поле  $\vec{E} = \vec{E}^n + \vec{E}^B$ , напряжённость стороннего поля  $\vec{E}^{\text{ср}}=0$ , то, согласно (4.25), (4.27), плотность источников вторичного поля  $\vec{E}^B$  (индуцированных с мест нарушения однородности среды объёмных зарядов с плотностью  $\delta = \delta_{\text{плн}}$  и поверхностных зарядов с плотностью  $\sigma = \sigma_{\text{плн}}$ ) определяют выражения:

$$\delta = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma}(\text{grad } \gamma \cdot \vec{E}), \quad \sigma = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_n^{\text{ср}}, \quad E_n^{\text{ср}} = \frac{E_n^{(1)} + E_n^{(2)}}{2}, \quad \gamma_{12} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (4.31)$$

см. рис. 4.11, 4.12, 2.17.

Если бы поля  $\delta$  и  $\sigma$  (распределение зарядов с плотностями  $\delta$ ,  $\sigma$ ) были известны, то расчёт поля  $\vec{E}^B$  с потенциалом  $U^B$  можно было выполнить на основе выражений (2.4), (2.19) для поля  $\vec{f}$  и его потенциала  $U$ . Так как  $\vec{E} = \vec{f}/(4\pi\varepsilon_0)$ , то, как следует из (2.4), (2.19), при известных плотностях зарядов  $\delta(q)$  и  $\sigma(q)$  в точках  $q$  поля  $\vec{E}^B(a)$ ,  $U^B(a)$  в произвольной точке наблюдения  $a$  мы могли бы определить, пользуясь выражениями:

$$\vec{E}^B(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \int_V \frac{\delta(q) \vec{L}_{qa} dV}{L_{qa}^3} + \int_{S_{\text{oc}}} \frac{\sigma(q) \vec{L}_{qa} dS}{L_{qa}^3} \right), \quad (4.32)$$

$$U^B(a) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \int_V \frac{\delta(q) dV}{L_{qa}} + \int_{S_{\text{oc}}} \frac{\sigma(q) dS}{L_{qa}} \right). \quad (4.32, a)$$

Однако, в соответствии с (4.31), плотности зарядов  $\delta(q)$  и  $\sigma(q)$  зависят не только от модели среды, но и от суммарного поля  $\vec{E} = \vec{E}^n + \vec{E}^B$ , содержащего слагаемое  $\vec{E}^B$  - неизвестное (искомое при решении прямой задачи) поле. При неизвестных  $\delta(q)$  и  $\sigma(q)$  в правых частях уравнений (4.32), (4.32,a) расчёт  $\vec{E}^B(a)$ ,  $U^B(a)$  невозможен. Но может быть применён подход, при котором для источников вторичного поля составляют интегральные уравнения и получают их численные решения.

При кратком описании такого подхода к решению прямых задач ограничимся случаем, когда модель проводящей среды- кусочно-однородная (см. раздел 3.1) и состоит из порознь однородных областей  $V_{1,2,3,\dots}$ , в каждой из которых  $\text{grad } \gamma_{1,2,3,\dots} = 0$ . На границах  $S_{\text{oc}}$  этих областей удельная электропроводность  $\gamma$  терпит разрыв (рис. 4.16,a). При этом, согласно (4.31), в однородных областях  $V_{1,2,3,\dots}$  объёмная плотность зарядов  $\delta(q)=0$ , а источниками поля  $\vec{E}^B$  являются поверхностные заряды в виде простых слоёв на  $S_{\text{oc}}$  с плотностями  $\sigma(q)$ .

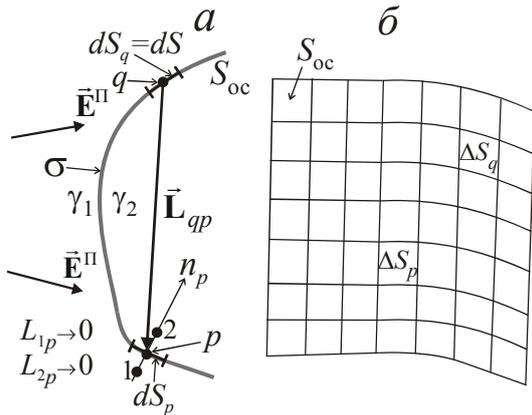


Рис. 4.16. К уравнению (4.34).

В соответствии с определением (2.4,a) скалярной компоненты поля  $\vec{f}(a)$ , для  $k$ -компоненты поля  $\vec{E} = \vec{f}/(4\pi\epsilon_0)$  поверхностного заряда в точке  $a$  получаем:

$$E_k(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(q)}{L_{qa}^2} \cos(\vec{L}_{qa}, \vec{i}_k) dS. \quad \text{Тогда}$$

из (4.32) следует, что в точке  $p$  на поверхности  $S_{oc}$  нормальную к  $S_{oc}$  скалярную компоненту  $E_n^B(p)$  поля  $\vec{E}^B(p)$  определяет выражение:

$$E_n^B(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_{oc}} \frac{\sigma(q) \cos(\vec{L}_{qp}, n_p) dS}{L_{qp}^2}, \quad (4.33)$$

где  $q$  - точки на всех поверхностях  $S_{oc}$ , на которых терпит разрыв удельная электропроводность  $\gamma$ , а  $n = n_p$  - нормаль к поверхности  $S_{oc}$  в точке  $p$  (рис. 4.16,a).

Вместе с тем, согласно (4.31), в точке  $p$  на границе сред с удельными электропроводностями  $\gamma_1, \gamma_2$  поверхностную плотность зарядов определяет выражение  $\sigma(p) = 2\epsilon_0 \gamma_{12} E_n^{cp}(p)$ , где коэффициент контрастности границы  $S_{oc}$ :  $\gamma_{12} = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2)$ ,  $E_n^{cp}(p) = (E_n^{(1)} + E_n^{(2)})/2$ , а  $E_n^{(1)}, E_n^{(2)}$  скалярные компоненты  $E_n$  суммарного поля  $\vec{E}$  в точках "1", "2" (при расстояниях  $L_{1p} \rightarrow 0, L_{2p} \rightarrow 0$ ).

Представим  $E_n^{cp}(p)$  в виде суммы:  $E_n^{cp}(p) = E_n^{n, cp}(p) + E_n^{p, cp}(p) + E_n^{*, cp}(p)$ . Здесь  $E_n^{n, cp}(p)$  - среднее значение  $(E_n^{n(1)} + E_n^{n(2)})/2$  нормальной к  $S_{oc}$  компоненты первичного поля  $\vec{E}^n$  в точках "1", "2" (в окрестности точки  $p$ );  $E_n^{p, cp}(p) = (E_n^{p(1)} + E_n^{p(2)})/2$  - среднее значение  $n$ -компоненты поля  $\vec{E}^B$ , создаваемого зарядами с плотностью  $\sigma(p)$ , индуцированными на бесконечно-малой площадке  $dS_p$  с центром в точке  $p$ ;  $E_n^{*, cp}(p) = (E_n^{*(1)} + E_n^{*(2)})/2$  - среднее значение  $n$ -компоненты поля  $\vec{E}^B$ , создаваемого индуцированными зарядами с плотностью  $\sigma(q)$  во всех точках  $q$  поверхностей  $S_{oc}$  кроме заряда на бесконечно-малой площадке  $dS_p$  с центром в точке  $p$ .

Так как поля с компонентами  $E_n^n(p), E_n^*(p)$  создают заряды, расположенные вне бесконечно-малой окрестности точки  $p$ , то эти поля непрерывны в точке  $p$  и для средних значений этих компонент получаем:

$(E_n^{n(1)} + E_n^{n(2)})/2 = E_n^n(p)$ ,  $(E_n^{*(1)} + E_n^{*(2)})/2 = E_n^*(p)$ . Из выражений (2.23) для нормальной к элементарной площадке  $dS_{oc}$  компоненты поля  $\vec{f}$  следует, что в точках "1", "2"  $E_n^{p(1)} \rightarrow -\frac{\sigma(p)}{2\varepsilon_0}$ ,  $E_n^{p(2)} \rightarrow \frac{\sigma(p)}{2\varepsilon_0}$  и среднее арифметическое

значение  $E_n^{p\text{cp}}(p) = 0$ . Следовательно,  $\sigma(p) = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} [E_n^n(p) + E_n^*(p)]$ , где  $E_n^*(p)$  -  $n$ - компонента вторичного поля  $\vec{E}^B(p)$ , создаваемого зарядами, индуцированными на  $S^*$ - совокупности всех особых поверхностей  $S_{oc}$  за исключением элементарной площадки  $dS_p$  с центром в точке  $p$ . Таким образом, из (4.31), (4.33) получаем интегральное уравнение (Фредгольма 2-го рода) для плотности  $\sigma$  индуцированных на особых поверхностях источников поля  $\vec{E}^B$ :

$$\sigma(p) = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} \left[ E_n^n(p) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S^*} \frac{\sigma(q) \cos(\vec{L}_{qp}, n) dS}{L_{qp}^2} \right] \text{ или}$$

$$\sigma(p) = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_n^n(p) + \frac{\gamma_{12}}{2\pi} \int_{S^*} \frac{\sigma(q) \cos(\vec{L}_{qp}, n) dS}{L_{qp}^2}. \quad (4.34)$$

При заданных  $\vec{E}^n$  и модели (кусочно-однородной) среды неизвестными (искомыми) в (4.34) являются значения  $\sigma$  на поверхностях  $S_{oc}$ - границах след с разными значениями удельной электропроводности. Если определить эти значения, то поле  $\vec{E}^B$  или его потенциал  $U^B$  можно вычислить, пользуясь (4.32), (4.32,a).

Для численного решения уравнения (4.34) можем "разбить" совокупность поверхностей  $S_{oc}$  на множество площадок  $\Delta S_q, \Delta S_p$  (рис. 4.16,б), достаточно малых для того, чтобы значения  $\sigma$  в пределах каждой площадки (с удовлетворяющей нас погрешностью) можно было полагать равным значению  $\sigma$  в центре площадки. При этом из (4.34) получаем систему алгебраических уравнений, число  $N$  которых равно числу площадок.

Можно применить также метод итераций (последовательных приближений). При "нулевой" итерации вычисляем плотность  $\sigma(p)$  во множестве точек на  $S_{oc}$ , полагая, что  $\sigma(p)$  в (4.34) зависит не от суммарного поля  $\vec{E}$ , а от первичного поля  $\vec{E}^n$ , то есть  $\sigma^{(0)}(p) = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_n^n(p)$ . При первой итерации определяем  $\sigma$  на  $S_{oc}$ , пользуясь приближённо определёнными при предыдущей итерации значениями  $\sigma^{(0)}$ :

$$\sigma^{(1)}(p) = 2\varepsilon_0 \gamma_{12} E_n^n(p) + \frac{\gamma_{12}}{2\pi} \int_{S^*} \frac{\sigma^{(0)}(q) \cos(\vec{L}_{qp}, n) dS}{L_{qp}^2}. \text{ При второй итерации}$$

для определения плотности  $\sigma^{(2)}$  во множестве точек  $p$  на  $S_{oc}$  пользуемся определёнными ранее значениями  $\sigma^{(1)}(q)$ . По вычисленным значениям  $\sigma^{(2)}$  сможем определить  $\sigma^{(3)}$  и т. д. При сходимости такого итерационного

процесса сможем определить плотности источников поля  $\vec{E}^B$  с требуемой погрешностью.

#### 4.13. О математической идентичности уравнений полей: электростатического, магнитостатического и стационарного электрического

В темах 3, 4 рассмотрели элементы теории трёх постоянных полей. Первое из них - электростатическое поле  $\vec{E}$  в присутствии диэлектриков и проводников. Помимо напряжённости  $\vec{E}$ , это поле характеризует вектор электрической индукции (электрического смещения)  $\vec{D}$ . Второе из этих полей - магнитостатическое поле с напряжённостью  $\vec{H}$ . Другой характеристикой такого поля является вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . И, наконец, третье - это стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  в проводящей среде, сопровождающееся постоянным электрическим током. От такого поля  $\vec{E}$  зависит вектор плотности электрического тока  $\vec{j}$ .

Можно показать, что есть формальная аналогия в математическом описании названных выше полей. Ниже сопоставлены некоторые уравнения этих полей.

<i>Электростатическое поле</i>	<i>Магнитостатическое поле</i>	<i>Стационарное электрическое поле</i>	
I. $\text{rot } \vec{E} = 0;$	I. $\text{rot } \vec{H} = 0;$	I. $\text{rot } \vec{E} = 0;$	(4.35)
II. $\text{div } \vec{D} = \delta_{\text{свб}};$	II. $\text{div } \vec{B} = 0;$	II. $\text{div } \vec{j} = 0,$	(4.36)

где  $\delta_{\text{свб}}$  - объёмная плотность свободных электрических зарядов.

Уравнения (4.35), (4.36) дополняют уравнения связи:

$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E};$	$\vec{B} = \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0;$	$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}}),$	(4.37)
---------------------------------	--	---	--------

где  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость,  $\epsilon_0 \approx (10^{-9})/(36\pi)$ , Ф/м - электрическая постоянная;  $\mu_a = \mu_0 \mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,  $\mu$  - магнитная проницаемость,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м - магнитная постоянная,  $\vec{J}^0 = -\text{div } \delta_0$  - вектор постоянной (остаточной) намагниченности,  $\delta_0$  - объёмная плотность физически фиктивных постоянных (не зависящих от магнитного поля) "магнитных масс";  $\gamma$  - удельная электропроводность,  $\rho = 1/\gamma$  - удельное электрическое сопротивление, а  $\vec{E}^{\text{стр}}$  - напряжённость поля сторонних (не кулоновых) сил.

Из (4.35) следует, что электростатическое поле  $\vec{E}$ , магнитостатическое поле  $\vec{H}$  и стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  - поля потенциальные, их можно выразить через скалярные потенциалы  $U$ :

$$\vec{E} = -\text{grad}U; \quad \vec{H} = -\text{grad}U. \quad (4.38)$$

Таким образом, расчет векторных полей  $\vec{E}$ ;  $\vec{H}$  можно свести к нахождению скалярного поля  $U$  и последующему дифференцированию.

Из (4.36)- (4.38) не сложно получить уравнения для потенциалов  $U$ . В соответствии с (3.19), (3.24), (4.17), для потенциалов  $U$  электростатического поля  $\vec{E}$ , магнитостатического поля  $\vec{H}$  и стационарного электрического поля  $\vec{E}$  справедливы уравнения:

$$\boxed{(\nabla(\epsilon \cdot \nabla U)) = -\delta_{\text{свб}}/\epsilon_0; \quad (\nabla(\mu \cdot \nabla U)) = -\delta_0; \quad (\nabla(\gamma \nabla U)) = \text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стп}}),} \quad (4.39)$$

где, как уже было отмечено выше,  $\delta_0 = -\text{div} \vec{J}^0$ . При сравнении уравнений (4.39) для потенциалов рассматриваемых полей видно, что потенциалы электростатического, магнитостатического и стационарного электрического полей удовлетворяют, в сущности, одинаковым уравнениям, а прямые задачи теории этих полей математически идентичны. Соответственно, при  $\nabla \epsilon = 0$ ,  $\delta_{\text{свб}} = 0$ ;  $\nabla \mu = 0$ ,  $\text{div} \vec{J}^0 = 0$ ;  $\nabla \gamma = 0$ ,  $\text{div}(\gamma \vec{E}^{\text{стп}}) = 0$  уравнения (4.39) для потенциалов  $U$  электростатического, магнитостатического и стационарного электрического полей вырождаются в уравнения Лапласа:  $\nabla^2 U = 0$ , решения которых, как уже было сказано ранее, называют гармоническими функциями.

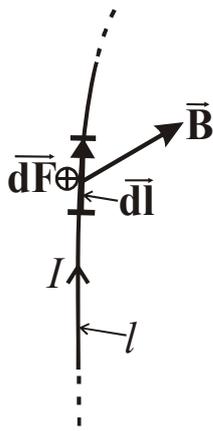
## 5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В этой теме при записи выражений нам надо будет пользоваться такой операцией, как векторное произведение векторов. Напомню, что, в соответствии с (1.2), векторное произведение векторов  $\vec{A} \times \vec{B} = [\vec{A} \vec{B}] = \vec{C}$  где  $\vec{C}$ - вектор с абсолютной величиной  $|\vec{C}| = C = A \cdot B \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$ . Направление вектора  $\vec{C}$  определяет следующее правило:  $\vec{C} \perp \vec{A}$ ,  $\vec{C} \perp \vec{B}$  и векторы  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$  образуют правую тройку. Последнее означает, что если повернуть вектор  $\vec{A}$  на угол, меньший, чем  $180^\circ$ , до направления вектора  $\vec{B}$ , то направление вектора  $\vec{C}$  определяет правило "правого винта" (рис. 1,б,в).

### 5.1. Постоянные магнитные поля. О законе Ампера

Можно различать два типа постоянных магнитных полей. Одно из них, называемое магнитостатическим, создают намагниченные тела (объекты). Особенности такого поля и описывающие его уравнения были рассмотрены раньше, в разделе 3. В этой теме речь пойдет о закономерностях, присущих (стационарному) постоянному магнитному полю, возбуждаемому постоянным электрическим током— упорядоченным движением свободных электрических зарядов (электронов, ионов) в проводниках.

Взаимосвязь между электрическими токами и магнитным полем определяют два физических закона: закон Ампера и закон Био— Савара— Лапласа. При математической записи этих законов удобно воспользоваться векторным произведением.



**Рис. 5.1.** К закону Ампера.

Закон Ампера определяет силовое действие магнитного поля на движущиеся электрические заряды и электрические токи. Приведем этот закон для случая, который определяет силовое действие магнитного поля на направленный (по току) элементарный отрезок  $d\vec{l}$  линейного тока  $I$ :

$$d\vec{F} = I \cdot [d\vec{l} \vec{B}]. \quad (5.1)$$

Здесь  $d\vec{F}$  - сила (Н),  $I$  - электрический ток (А),  $dl = |d\vec{l}|$  - длина отрезка тока (м),  $\vec{B}$  - вектор магнитной индукции (Тл) в пределах элементарного отрезка  $dl$ , рис. 5.1. Согласно (1.2), (5.1), абсолютная величина

$$dF = |d\vec{F}| = I \cdot dl \cdot B \cdot \sin(\vec{d\vec{l}}, \vec{B}), \quad d\vec{F} \parallel [d\vec{l} \vec{B}],$$

$d\vec{F} \perp d\vec{l}$ ,  $d\vec{F} \perp \vec{B}$ , а направления  $d\vec{l}$  тока  $I$ , векторов  $\vec{B}$  и  $d\vec{F}$  образуют правую тройку.

Далее, при рассмотрении первых вопросов в этой теме будем полагать, что среда - немагнитна, то есть  $\alpha=0$ ,  $\mu=1+\alpha=1$ ,  $\mu_a=\mu_0\mu=\mu_0$ ,  $\vec{J}^0=0$ ,  $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$ . В немагнитной среде единственным возбудителем постоянного магнитного поля ( $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ) является упорядоченное движение свободных электрических зарядов - постоянный электрический ток. Магнитное поле, возбуждаемое таким током, определяет закон Био-Савара-Лапласа.

## 5.2. Закон Био-Савара-Лапласа

Сначала рассмотрим случай, когда магнитное поле создаёт постоянный линейный ток  $I$  вдоль линии  $l$  (рис. 5.2,а). Магнитное поле  $d\vec{B}$ , создаваемое в точке наблюдения  $a$  элементарным отрезком  $dl$  тока  $I$  определяет выражение:

$$d\vec{B}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}]}{L^3}, \quad (5.2)$$

где  $\vec{L} = \vec{L}_{qa}$  - радиус-вектор с началом  $q$  в центре отрезка  $dl$  и концом в точке наблюдения  $a$ ,  $L_{qa} = L = |\vec{L}|$  - расстояние между точками  $q$  и  $a$ ,  $d\vec{l}$  - направленный (по току  $I$ ) элементарный отрезок  $dl$ . Согласно (5.2), модуль вектора  $d\vec{B}$ :

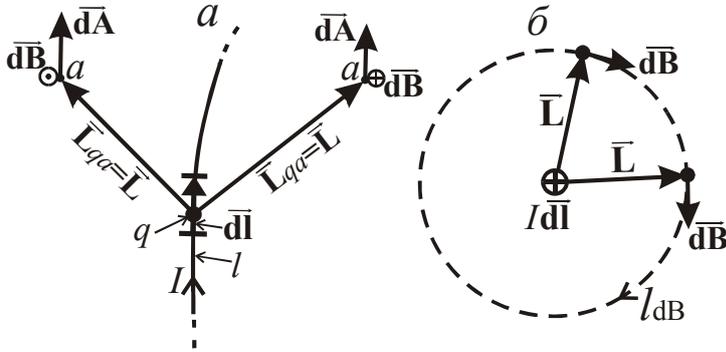
$$dB(a) = \frac{\mu_0 I \cdot dl}{4\pi L^2} \cdot \sin(\vec{d\vec{l}}, \vec{L}). \quad (5.3)$$

Так как в (5.2)  $\frac{\mu_0 I}{4\pi L^3}$  - положительный скаляр, то вектор  $d\vec{B}$  имеет то же направление, что и вектор  $[d\vec{l} \vec{L}]$ , то есть  $d\vec{B} \perp d\vec{l}$ ,  $d\vec{B} \perp \vec{L}$  и  $d\vec{l}$ ,  $\vec{L}$ ,  $d\vec{B}$  образуют правую тройку векторов.

Если на рис. 5.2,а отрезок  $d\vec{l}$  тока  $I$ , точки наблюдения  $a$  и радиусы векторы  $\vec{L}$  лежат в плоскости чертежа, то векторы  $d\vec{B}$  ортогональны этой

плоскости. При показанном на рис. 5.2,*а* направлении тока  $I$  в лежащей справа от тока  $I$  точке  $a$  вектор  $\vec{d\mathbf{B}}$  направлен «от нас», а в расположенной слева от тока точке  $a$  - «к нам».

Некоторые следующие из выражения (5.2) геометрические особенности поля  $\vec{d\mathbf{B}}$  показаны на рис. 5.2,*б*, где отрезок  $d\vec{\mathbf{l}}$  тока  $I$  ориентирован ортогонально плоскости чертежа (ток направлен «от нас»), а точки наблюдения лежат в этой плоскости и расположены на одинаковых расстояниях от центра  $q$  отрезка. На рисунке видно, что векторные (силовые) линии  $l_{d\mathbf{B}}$  (по касательной к которым направлены векторы  $\vec{d\mathbf{B}}$ ) это - окружности.



**Рис. 5.2.** К закону Био – Савара – Лапласа для линейных электрических токов.

Направление линий  $l_{d\mathbf{B}}$  образует правовинтовую систему с направлением тока  $I$  в отрезке  $dl$ .

Магнитное поле  $\vec{\mathbf{B}}$ , создаваемое током  $I$  вдоль линии  $l$ , определим, суммируя поля  $\vec{d\mathbf{B}}$  всех отрезков  $dl$ , из которых состоит  $l$ :  $\vec{\mathbf{B}} = \int_l \vec{d\mathbf{B}}$ . То есть

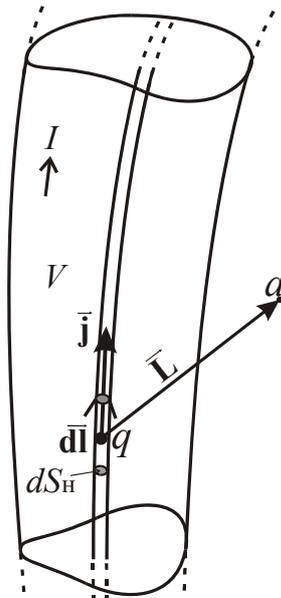
закон Био- Савара- Лапласа для линейного тока:

$$\vec{\mathbf{B}}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{[d\vec{\mathbf{l}} \vec{\mathbf{L}}]}{L^3}. \tag{5.4}$$

При интегрировании в выражении (5.4), конечно, положение точки наблюдения  $a$ - фиксировано, а точка  $q$  "пробегает" линию  $l$ .

На основе (5.2) получим закон Био- Савара- Лапласа для объёмного тока. Пусть в области пространства  $V$  имеется объёмный ток (рис. 5.3). Такой ток характеризует поле вектора плотности тока  $\vec{\mathbf{j}}$ . На рис. 5.3 показана элементарная токовая трубка (см. [1], с. 11, 175), к поверхности которой по касательной направлены векторы  $\vec{\mathbf{j}}$ . Рассмотрим элементарный отрезок такой трубки высотой  $dl$ , ограниченный нормальными (ортогональными  $\vec{\mathbf{j}}$ ) сечениями  $dS_n$ . Такой отрезок токовой трубки имеет вид прямого цилиндра бесконечно малых размеров. Если полагать, что размеры поперечного сечения  $dS_n$  сколь угодно малы по сравнению с длиной  $dl$ , то отрезку токовой трубки можно поставить в соответствие вектор  $d\vec{\mathbf{l}}$ , имеющий направление тока (рис. 5.3).

Электрический ток в этом отрезке  $dI = j \cdot dS_n$  (где  $j = |\vec{\mathbf{j}}|$ ) создаёт магнитное поле, определяемое выражением, аналогичным (5.2):



**Рис. 5.3.** К закону Био – Савара – Лапласа для объемных электрических токов.

$$d\vec{B}(a) = \frac{\mu_0 dI}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}]}{L^3} = \frac{\mu_0 j \cdot dS_H}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}]}{L^3}. \quad \text{Принимая}$$

во внимание, что в токовой трубке  $\vec{j} \parallel d\vec{l}$  и, следовательно,  $j \cdot d\vec{l} = dl \cdot \vec{j}$ , а  $dS_H \cdot dl = dV$  - объём отрезка  $dl$  элементарной токовой трубки сечением  $dS_H$ ,

$$\text{получаем:} \quad d\vec{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\vec{j} \vec{L}]}{L^3} dV. \quad \text{Так как}$$

$\vec{B}(a) = \int_V d\vec{B}(a)$ , для магнитного поля объёмного тока, занимающего область пространства  $V$ , получаем следующее выражение:

$$\vec{B}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\vec{j} \vec{L}]}{L^3} dV, \quad (5.5)$$

где  $\vec{L} = \vec{L}_{qa}$ , а при интегрировании точка  $q$  «пробегает» область  $V$ .

Равенство (5.5) это закон Био- Савара- Лапласа для объёмного тока.

### 5.3. Векторный потенциал магнитного поля постоянного тока

При изучении предыдущих разделов курса выяснили, что постоянное электрическое поле  $\vec{E}$  и магнитоэстатическое поле  $\vec{H}$  это поля потенциальные. Они всегда могут быть выражены через скалярные поля  $U$ , называемые потенциалами:  $\vec{E} = -\text{grad } U = -\nabla U$ ,  $\vec{H} = -\text{grad } U = -\nabla U$ .

Ниже убедимся, что магнитное поле ( $\vec{B}, \vec{H}$ ), возбуждаемое постоянным электрическим током, в общем случае не является полем потенциальным. Но магнитное поле постоянного тока всегда можно выразить через векторный потенциал  $\vec{A}$ . В отличие от упомянутых выше скалярных потенциалов  $U$ , имеющих определенный физический (энергетический) смысл, векторный потенциал  $\vec{A}$  не представляет интереса сам по себе, но его применение во многих случаях позволяет упростить расчёты или анализ магнитного поля токов.

Можно доказать ([1], с.240), что выражению (5.2), определяющему магнитное поле  $d\vec{B}(a)$  элементарного отрезка линейного тока, эквивалентны два следующих равенства:

$$d\vec{B}(a) = \text{rot } d\vec{A}(a), \quad d\vec{A}(a) = \frac{\mu_0 I \cdot d\vec{l}}{4\pi L}, \quad (5.6)$$

где  $d\vec{A}$  - векторный потенциал магнитного поля  $d\vec{B}$ .

Нам проще будет доказать это утверждение, пользуясь системой координат, при решении соответствующей задачи (на практических занятиях).

Отметим, что, в соответствии со вторым равенством в (5.6), вектор  $d\vec{A}$  в каждой точке наблюдения  $a$  имеет то же направление, что и отрезок  $d\vec{l}$  тока  $I$  (рис. 5.2,*a*), а выражение для  $d\vec{A}$  - проще, чем равенство (5.2), определяющее магнитное поле  $d\vec{B}$ .

Выражения (5.4), (5.5) для магнитного поля  $\vec{B}$  линейных и объемных токов были получены на основе равенства (5.2), определяющего магнитное поле  $d\vec{B}$  элементарного отрезка линейного тока. Поэтому из (5.6) следует, что магнитные поля  $\vec{B}$  любых постоянных токов могут быть определены через векторный потенциал  $\vec{A}$ :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (5.7)$$

В соответствии с (5.6) векторные потенциалы  $\vec{A}$  магнитного поля линейных и объемных токов определяют выражения:

$$\vec{A}(a) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\vec{l}(q)}{L}, \quad \vec{A}(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(q)dV}{L}, \quad (5.8)$$

где  $L = L_{qa}$ . В первом выражении (5.8)  $q$ - это точки на линиях  $l$ , вдоль которых линейные токи  $I \neq 0$ , а во втором выражении (5.8) точки  $q$ - центры элементарных объёмов  $dV$  в области пространства  $V$ , где есть объемные токи с плотностью  $\vec{j}(q)$ .

Можно доказать (см. [1], с. 241-242), что в случае полных (замкнутых) цепей постоянного электрического тока

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (5.9)$$

Из второго равенства в (5.8) следует, что в декартовой системе координат  $x, y, z$ , при возбуждении поля объёмными токами, например, скалярную компоненту  $A_x$  вектора  $\vec{A}$  определяет выражение:

$$A_x(a) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_x(q)dV}{L_{qa}}. \quad (5.10)$$

Аналогичные выражения справедливы, конечно, и для компонент  $A_y, A_z$ . Отсюда следует, что, если какая либо из декартовых компонент вектора  $\vec{j}$  равна нулю, то соответствующая компонента вектора  $\vec{A}$  также равна нулю.

Определим теперь то, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет векторный потенциал  $\vec{A}$ . В разделе 2.5 для потенциала  $U$  статического поля  $\vec{f}$  в вакууме ( $\vec{f} = -\text{grad}U$ ) были получены выражения (2.20), (2.19,*a*):

$$\nabla^2 U = -4\pi\delta, \quad U(a) = \int_V \frac{\delta(q)dV}{L_{qa}}, \quad (5.11)$$

где  $\delta(q)$ - объемная плотность источников поля  $\vec{f}$  в точке  $q$ . Первое выражение в (5.11)- это уравнение Пуассона для потенциала  $U$  поля  $\vec{f}$ , а второе- его решение для случая, когда все объёмные источники поля  $\vec{f}$  находятся в области пространства  $V$ . Сравнивая (5.10) и второе выражение в (5.11), видим, что они- математически идентичны. В левых частях этих выражений имеем  $A_x(a)$  и  $U(a)$  соответственно. В правую часть первого из этих равенств отношение  $\frac{\mu_0 j_x(q)}{4\pi}$  входит вместо скалярного поля  $\delta(q)$  в правой части второго выражения в (5.11). Тогда, заменяя в первом уравнении в (5.11)  $U$  на  $A_x$ , а  $\delta$  на  $\frac{\mu_0 j_x}{4\pi}$ , получаем  $\nabla^2 A_x = -4\pi \frac{\mu_0 j_x}{4\pi}$  или  $\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x$ . Аналогичные уравнения справедливы, конечно, для компонент  $A_y, A_z$ . Умножая левые и правые части уравнений для  $A_x, A_y, A_z$  соответственно на орты  $\vec{1}_x, \vec{1}_y, \vec{1}_z$  и складывая векторные компоненты, получаем уравнение Пуассона для векторного потенциала  $\vec{A}$ :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}. \quad (5.12)$$

Из (5.12) следует, что вне электрических токов (там, где  $\vec{j}=0$ ) векторный потенциал  $\vec{A}$  магнитного поля постоянного электрического тока удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2 \vec{A} = 0$ .

#### **5.4. Система уравнений магнитного поля постоянного тока в немагнитной среде**

Напомним, что уравнения векторного поля в дифференциальной форме определяют то, чему равны ротор и дивергенция вектора, а уравнения в интегральной форме показывают, от чего зависят циркуляция вектора и поток вектора через замкнутую поверхность. Для получения уравнений магнитного поля  $\vec{B}$  постоянного тока воспользуемся равенствами (5.7), (5.9), (5.12). Примем также во внимание тождественное равенство для вторых производных (произвольного, дважды дифференцируемого по пространственным координатам) векторного поля  $\vec{M}$ :  $\text{rot rot } \vec{M} \equiv \text{grad div } \vec{M} - \nabla^2 \vec{M}$  (см. [1], с. 40).

Согласно выражению (5.7) ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ), имеем  $\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ . Принимая во внимание выражения (5.9), (5.12) для  $\text{div } \vec{A}$  и  $\nabla^2 \vec{A}$ , получаем 1-е уравнение магнитного поля постоянного тока в дифференциальной форме:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (5.13)$$

В соответствии с (1.7)  $\text{div } \vec{B} = \text{div rot } \vec{A} \equiv 0$  (см. [1], с. 39). То есть 2-е уравнение магнитного поля постоянного тока в дифференциальной форме:

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (5.14)$$

Согласно (5.14), магнитное поле  $\vec{B}$  - соленоидальное (чисто вихревое). Его векторные линии  $l_B$  - замкнуты, либо продолжаются до бесконечности. В соответствии с (5.13), возбудителями (вихревого типа) поля  $\vec{B}$  в немагнитной среде являются электрические токи в проводниках, распределение которых характеризует вектор плотности тока  $\vec{j}$ .

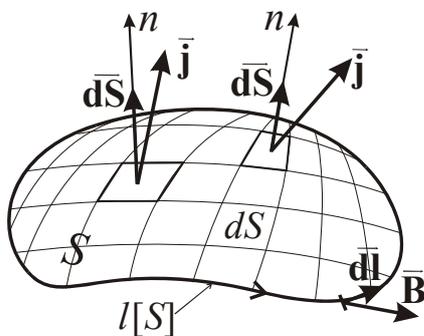
Получим уравнения поля  $\vec{B}$  в интегральной форме.

Применим к полю  $\vec{B}$  формулу Стокса (1.12):  $\int_S (\text{rot } \vec{B} \, d\vec{S}) = \oint_{l[S]} (\vec{B} \, d\vec{l})$ . В соответствии с (5.13)  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Обозначая  $I_S = \int_S (\vec{j} \, d\vec{S})$ , получаем 1-е уравнение магнитного поля постоянного тока в интегральной форме, называемое *законом полного тока*:

$$\oint_{l[S]} (\vec{B} \, d\vec{l}) = \mu_0 I_S = \mu_0 \int_S (\vec{j} \, d\vec{S}). \quad (5.15)$$

Следует отметить, что выражения (5.4), (5.5) (закон Био-Савара-Лапласа для линейных и объёмных токов) могут применяться для расчета магнитного поля отдельных участков цепей постоянного электрического тока. В отличие от этого, закон полного тока (5.15), как и его дифференциальная форма (5.13), справедливы только для полных цепей постоянного тока - замкнутых или тех, которые можно считать «продолжающимися до бесконечности».

Отметим также, что поток  $I_S$  вектора  $\vec{j}$  через поверхность  $S$  тесно связан электрическим током  $I$  через поверхность  $S$ . В частности, если на всей



**Рис. 5.4.** К закону полного тока.

поверхности  $S$  углы между направлениями  $\vec{j}$  и  $d\vec{S}$  - острые (рис. 5.4) или нулевые, то  $I_S = I$ . Если же эти углы - тупые (или равны  $\pi$ ), то  $I_S = -I$ .

Применим теперь к вектору  $\vec{B}$  формулу Гаусса-Остроградского (1.13):

$$\oint_{S[V]} (\vec{B} \, d\vec{S}) = \int_V \text{div } \vec{B} \, dV. \quad (1.13)$$

Принимая во внимание уравнение (5.14) для поля  $\vec{B}$ , получаем 2-е уравнение магнитного поля постоянного тока в интегральной форме:

$$\oint_S (\vec{B} \, d\vec{S}) = 0, \quad (5.16)$$

то есть поток вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю.

### 5.5. Скалярный потенциал магнитного поля постоянного тока

Мы знаем, что условием, необходимым и достаточным, для того чтобы векторное поле можно было выразить через градиент (или минус градиент) скалярного поля  $U$  (или  $T$ ) является равенство нулю ротора векторного поля (см. разделы 1.3, 2.5, а также [1], с 33- 35). При этом скалярное поле  $U$

называют потенциалом, а векторное поле, ротор которого тождественно равен нулю, является потенциальным полем.

Потенциальное поле- это, например, напряжённость  $\vec{H}$  магнитостатического поля, создаваемого намагниченными телами (объектами). Для такого поля во всём пространстве справедливы уравнения (3.20, 3.21) в дифференциальной и интегральной формах:  $\text{rot } \vec{H} = 0$ ,  $\mathcal{C} = \oint_l (\vec{H} d\vec{l}) = 0$ . При этом, поле  $\vec{H}$  можно выразить через скалярный

потенциал  $U$  в каждой точке пространства:  $\vec{H} = -\text{grad } U$ , а напряжение  $\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 (\vec{H} d\vec{l})$  поля  $\vec{H}$  между любыми двумя точками "1", "2" равно разности потенциалов  $U_1 - U_2$  ( $\mathcal{E}_{12} = U_1 - U_2$ ) и не зависит от "формы пути"- того, по какой именно линии  $l_{12}$ , соединяющей точки "1", "2", проводится интегрирование.

Согласно (5.13),  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , то есть магнитное поле  $\vec{B}$  постоянного тока не является потенциальным полем. Но в тех областях пространства, где нет электрического тока ( $\vec{j} = 0$ ), имеем  $\text{rot } \vec{B} = 0$ , чему удовлетворяет равенство  $\vec{B} = \text{grad } T$ . Удобно обозначить  $T = -\mu_0 U$  и тогда  $\vec{B} = -\mu_0 \text{grad } U$  или  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\text{grad } U$ . То есть

$$\text{там, где } \vec{j} = 0: \quad \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\text{grad } U. \quad (5.17)$$

Здесь  $U$ - скалярный потенциал магнитного поля постоянного электрического тока. Отметим, что в немагнитной среде (или в вакууме)  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}$ , где  $\vec{H}$ - напряжённость магнитного поля. То есть при этом условии связь между магнитным полем постоянного тока и потенциалом- та же, что в случае магнитостатического поля, см. (3.23).

Существенно то, что, согласно (5.13), в отличие от гравитационного поля  $\vec{G}$ , магнитостатического поля  $\vec{H}$  и постоянного электрического поля  $\vec{E}$ , магнитное поле  $\vec{B}$  (или  $\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H}$ ) постоянного тока не является

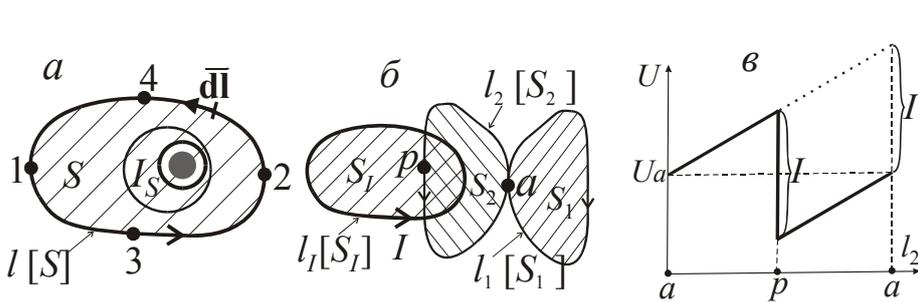
потенциальным во всём пространстве. Поэтому при применении скалярного потенциала  $U$  для магнитного поля постоянного тока существуют некоторые проблемы. У «настоящего» потенциального поля, ротор которого равен нулю во всём пространстве, циркуляция  $\mathcal{C}$ , то есть напряжение  $\mathcal{E}$  поля по замкнутой линии  $l$ , равна нулю для любой такой линии  $l$ . При этом разность потенциалов  $U_1 - U_2$  в двух точках «1», «2» пространства равна напряжению

$\mathcal{E}_{12}$  поля по соединяющей эти точки линии  $l_{12}$  и не зависит от формы этой линии.

Но, согласно закону полного тока (5.15), для магнитного поля постоянного тока циркуляция  $\mathcal{C}$  вектора  $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ :

$$\mathcal{C} = \oint_{l[S]} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} d\vec{l} \right) = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = I_S = \pm I, \quad (5.18),$$

то есть  $\mathcal{C} \neq 0$ , если имеется электрический ток  $I$  через поверхность  $S$  (ток внутри замкнутой линии  $l[S]$ ). Какие проблемы при этом существуют с потенциалом  $U$ ?



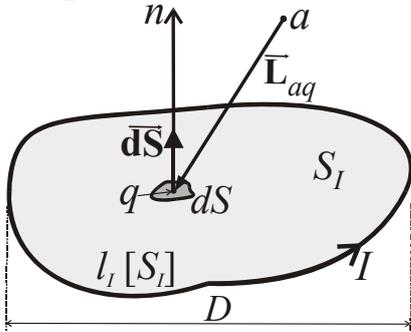
**Рис. 5.5.** К неоднозначности скалярного потенциала магнитного поля постоянного электрического тока.

На рис. 5.5,а показана замкнутая линия  $l[S]$ , все точки которой расположены вне токов. Но через поверхность  $S$  имеем поток

вектора  $\vec{j}$   $I_S \neq 0$ . Согласно (5.18), циркуляция вектора  $\vec{B}/\mu_0$  по  $l[S]$ :  $\mathcal{C} = \mathcal{E}_{13241} = \mathcal{E}_{132} + \mathcal{E}_{241} = \mathcal{E}_{132} - \mathcal{E}_{142} = I_S$ , то есть при  $I_S \neq 0$  имеем  $\mathcal{E}_{132} \neq \mathcal{E}_{142}$ . Это означает, что напряжение  $\mathcal{E}_{12}$  поля  $\vec{B}/\mu_0$  между точками «1», «2» может зависеть от формы линии  $l_{12}$  с началом в точке «1» и концом в точке «2». При этом равная напряжению  $\mathcal{E}_{12}$  разность потенциалов  $U_1 - U_2$  в точках «1», «2» тоже зависит от формы линии  $l_{12}$  и потенциал  $U$  магнитного поля постоянного тока не является однозначной функцией положения точки наблюдения  $a$ .

Рассмотрим детальнее случай, когда единственным возбудителем магнитного поля является замкнутый контур  $l_I[S_I]$  постоянного линейного тока  $I$  (рис. 5.5,б). Во всех точках пространства вне этого контура, в соответствии с (5.17), можем выразить магнитное поле через скалярный потенциал  $U$ . Обозначим  $U_a$  потенциал  $U$  в точке наблюдения  $a$ . Представим себе, что через точку  $a$  проходят две замкнутые линии:  $l_1[S_1]$  и  $l_2[S_2]$  (рис. 5.5,б), причём вторая из них «сцеплена» с контуром  $l_I[S_I]$  тока  $I$ . Так как через поверхность  $S_1$  электрического тока нет, то, в соответствии с (5.17), по контуру  $l_1[S_1]$  циркуляция вектора  $\vec{B}/\mu_0$   $\mathcal{C}_1 = 0$ . При перемещении точки  $a$  по этому контуру (с возвращением в начальное положение) потенциал  $U_a$  не изменится.

Иначе обстоит дело с циркуляцией  $\mathcal{C}_2$  вектора  $\vec{B}/\mu_0$  по линии  $l_2[S_2]$  (рис. 5.5,б), так как ток  $I$  пересекает поверхность  $S_2$ . Согласно (5.18), в зависимости от направления  $I$  и выбора направления обхода по  $l_2$   $\mathcal{C}_2 = \pm I$ . То есть равное изменению потенциала  $U_a$  напряжение вектора  $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H}$  на пути  $l_2$  из точки  $a$  в точку  $a$  равно  $\pm I$  и потенциал  $U_a$  будет многозначной функцией положения точки  $a$ . Если совершить  $n$  перемещений в одном и том же направлении по линии  $l_2$  с возвращением в исходную точку  $a$ , то потенциал  $U_a$  изменится на  $\pm nI$ . Чтобы в показанной на рис. 5.5,б ситуации сделать  $U_a$  однозначной функцией положения точки  $a$ , в теории магнитного поля постоянного тока искусственно полагают, что в точках  $p$  на поверхности  $S_I$  (рис. 5.5,б) потенциал  $U(p)$  терпит разрыв, равный  $\mp I$ . Пример того, как при этом условии может меняться потенциал  $U$  по линии  $l_2$  (рис. 5.5,б) показан на рис. 5.5,в. Можно доказать (см. [1], с. 251, [2], с. 323, 324), что в этом случае потенциал  $U$  магнитного поля замкнутого контура  $l_I[S_I]$  линейного тока  $I$  определяет выражение:



**Рис. 5.6.** К определению скалярного потенциала магнитного поля замкнутого линейного тока  $I$ .

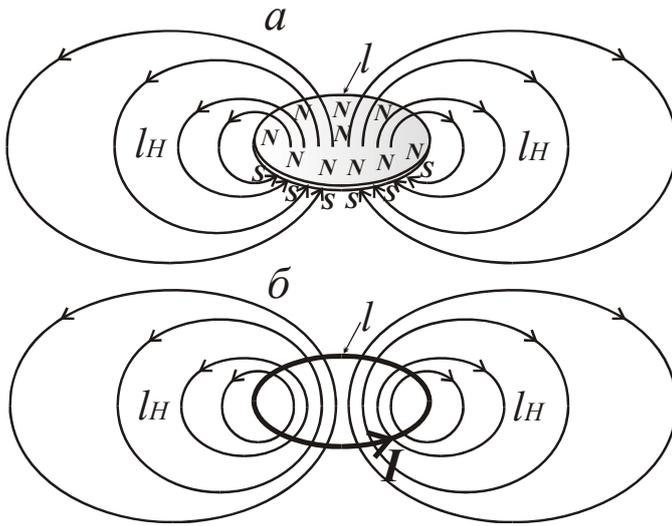
$$U(a) = \frac{-I \cdot \omega(a)}{4\pi}, \quad \text{где } \omega(a) = \int_{S_I} \frac{(\vec{L}_{aq} \cdot d\vec{S})}{L_{aq}^3} - \quad (5.19)$$

угол видимости поверхности  $S_I$  из точки наблюдения  $a$  (рис. 5.6).

Но математически идентичное первому равенству в (5.19) выражение определяет потенциал  $U$  магнитостатического поля  $\vec{H}$  однородного двойного магнитного слоя, лежащего на поверхности  $S$ . Согласно выражению (2.25,а), потенциал  $U$  статического поля  $\vec{f}$  однородного двойного слоя:  $U(a) = -\eta \cdot \omega(a)$ . Принимая во внимание, что, в соответствии с (2.4,б),

$$\vec{H} = \vec{f}/(4\pi), \quad \text{при } \vec{H} = -\text{grad } U \quad \text{имеем } U(a) = \frac{-\eta \cdot \omega(a)}{4\pi}, \quad \text{где } \eta -$$

поверхностная плотность дипольных моментов однородного двойного магнитного слоя на  $S$ , а  $\omega(a)$  - угол видимости поверхности  $S$  из точки  $a$  (см. также [1], с. 104, 132). При сравнении этого выражения для потенциала  $U(a)$  магнитостатического поля однородного двойного магнитного слоя с (5.19) видим, что при  $I = \eta$  электрический ток  $I$  по замкнутой линии  $l[S]$  и однородный двойной магнитный слой, лежащий на поверхности  $S$ , ограниченной такой же линией  $l$ , всюду, кроме "несущей двойной слой" поверхности  $S$  (бесконечно-тонкого слоя между его обкладками), создают одинаковые магнитные поля  $\vec{H}$ .



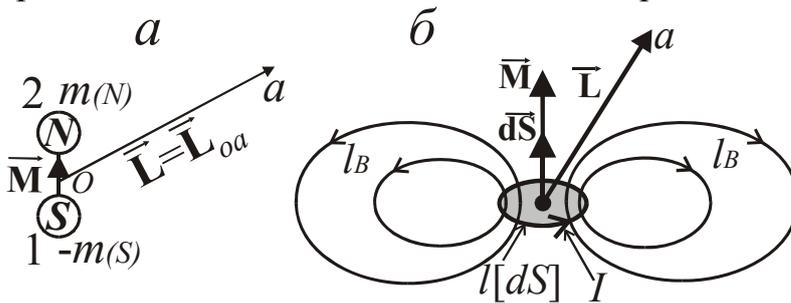
**Рис. 5.7.** Магнитные поля однородного двойного магнитного слоя (а) и замкнутого контура постоянного линейного тока (б).

На рис. 5.7 показаны векторные линии  $l_H$  магнитостатического поля  $\vec{H}$  двойного магнитного слоя и линии  $l_H$  постоянного магнитного поля  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$  (в немагнитной среде) замкнутого линейного тока. Как видно на этом рисунке единственное отличие этих полей  $\vec{H}$  состоит в следующем. В первом случае (рис. 5.7,а) линии  $l_H$  начинаются на одной- и оканчиваются на другой обкладке двойного слоя. Во втором случае (рис. 5.7,б)

линии  $l_H$  (как и линии  $l_B$ )- замкнуты и «сцеплены» с контуром  $l$  тока  $I$ . Заметим, что искусственно делая потенциал  $U$  разрывным на поверхности  $S_I$  (рис. 5.5,в) мы фактически заменяем магнитное поле замкнутого тока  $I$  по линии  $l$  полем однородного двойного магнитного слоя, ограниченного той же линией  $l$ .

### 5.6. Магнитный диполь

Напомним, что в магнитостатике магнитным диполем называют совокупность двух точечных магнитных полюсов  $+m$  (N) и  $-m$  (S) при условии, что расстояние между полюсами много меньше расстояния  $L_{Oa}$  от центра  $O$  диполя до точки наблюдения  $a$ . При обозначениях на рис. 2.13, 5.8,а



**Рис. 5.8.** Магнитный диполь в магнитостатике (а) и как элементарный контур  $l[dS]$  замкнутого линейного тока  $I$  (б).

последнему условию отвечает неравенство  $L_{12} \ll L_{Oa}$ . Здесь  $L_{12}$ - расстояние между центрами полюсов (точками "1" и "2"). При  $m > 0$  момент такого диполя  $\vec{M} = m \cdot \vec{L}_{12}$ . Так как положение в

пространстве центра диполя  $O$  и момент  $\vec{M}$  полностью характеризуют диполь, как источник поля, в теории удобно полагать, что при конечной величине  $M = |\vec{M}|$  длина диполя  $L_{12} \rightarrow 0$ , а  $m \rightarrow \infty$  (см. [1], с. 98, [5], с. 29, 30, 33).

В случае, когда магнитное поле возбуждают электрические токи, магнитным диполем обычно называют замкнутый контур  $l$  электрического тока  $I$  при условии, что поперечные размеры контура  $l$  много меньше, чем расстояние от  $l$  до точки наблюдения  $a$ . При обозначениях на рис. 5.6 этому условию отвечает неравенство:  $D \ll L_{aq}$ , где  $D$ - максимальное расстояние между точками контура  $l[S_I]$  тока  $I$ . На основе выражения (5.19), принимая во внимание, что  $\vec{L}_{aq} = -\vec{L}_{qa}$ , а при  $D \ll L_{aq}$  имеем  $\vec{L}_{qa} \approx \vec{L}_{Oa}$ , не сложно получить выражение для потенциала  $U$  поля  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$  такого магнитного диполя:

$$U(a) = \frac{(\vec{M} \vec{L})}{4\pi L^3}, \quad (5.20)$$

где  $\vec{M}$ - момент магнитного диполя,  $\vec{L} = \vec{L}_{Oa}$ , а  $O$ - точка в «центральной части» поверхности  $S_I$ . В общем случае момент магнитного диполя  $\vec{M} = I \cdot \int_{S_I} \vec{dS}$ , а если контур  $l_I$ - «плоский» и  $S_I$ - часть плоскости, ограниченная линией  $l_I$ , то  $\vec{M} = \vec{1}_n \cdot M$ ,  $M = I \cdot S_I$ , где  $\vec{1}_n$ - единичный вектор по нормали  $n$  к  $S_I$ . То есть в этом случае модуль момента  $|\vec{M}| = M$  равен произведению тока  $I$  в контуре на ограничиваемую контуром площадь  $S_I$  части плоскости.

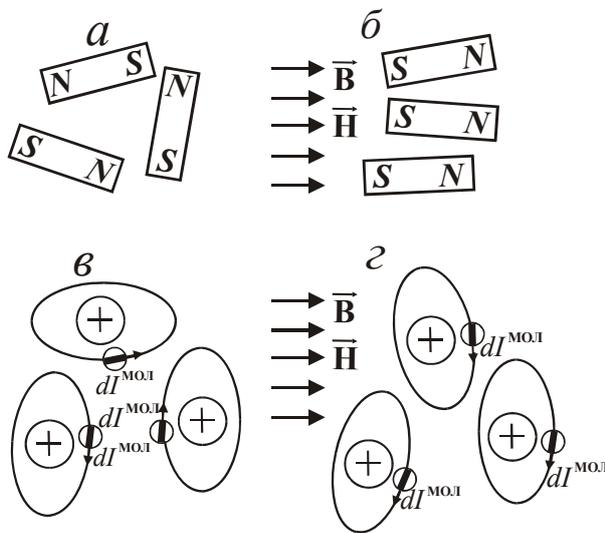
Так как (при  $D \ll L_{qa}$ ), согласно (5.20), поле магнитного диполя полностью определяют момент  $\vec{M}$  и положение точки  $O$ , то в теории магнитного поля тока удобно рассматривать магнитный диполь, как замкнутый контур  $l[dS]$  тока  $I$ , ограничивающий элементарную площадку  $dS$  (рис. 5.8,б). В этом случае момент магнитного диполя  $\vec{M} = I \cdot \vec{dS}$ . На рис. 5.8,б показаны магнитный диполь, а также векторные линии  $l_B$  поля магнитного диполя. Все линии  $l_B$  «сцеплены» с линией  $l[dS]$ , по которой направлен ток  $I$ , и пересекают площадку  $dS$ .

### **5.7. Уравнения магнитного поля постоянного тока в присутствии намагничивающейся среды**

В общем случае возбудителями постоянного магнитного поля могут служить как постоянные электрические токи в проводниках, так и намагниченные тела. Намагничивание различных веществ (магнетиков) имеет свои особенности, но упрощенно пояснить явление намагничивания можно, пользуясь моделями Кулона или Ампера (рис. 5.9).

В далёкой от реальности, но иногда удобной при расчетах и анализе поля, кулоновой модели магнетизма, (рис. 5.9,а,б), применяется аналогия с явлением поляризации диэлектриков. В этой модели атомы и молекулы вещества уподобляются элементарным магнитам (магнитным диполям) с разноименными и одинаковыми по абсолютной величине полюсами  $+m (N)$  и  $-m (S)$ .

В отсутствие магнитного поля  $\vec{H}$ , а также- присущей некоторым веществам постоянной (остаточной) намагниченности, эти элементарные магниты распределены в веществе хаотически (рис. 5.9,а). Но при наличии магнитного поля ( $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ) на полюса диполей (физически фиктивные «магнитные массы»  $\pm m$ ) действует пара противоположно направленных сил. Из-за возникающих вращающих моментов элементарные магниты в веществе приобретают некоторую упорядоченность, они ориентируются преимущественно в одном направлении (рис. 3.6, 5.9,б). В результате каждый элементарный объём  $dV$  намагниченной среды имеет дипольный магнитный момент  $d\vec{M}^{\text{Магн}}$  (рис. 3.7,б). Вектор намагниченности  $\vec{J} = \frac{d\vec{M}^{\text{Магн}}}{dV}$ .



**Рис. 5.9.** Кулонова (а, б) и амперова (в, з) модели намагничивания.

Модель Ампера базируется фактически на планетарной модели атома с положительно заряженным ядром и отрицательно заряженной электронной оболочкой. В рамках этой модели элементарный магнит- это ток, циркулирующей в пределах небольшой частицы вещества- атома, молекулы. Эти элементарные (по величине тока и геометрическим размерам) молекулярные токи на рис. 5.9,в,з обозначены  $dl^{\text{МОЛ}}$ . При  $\vec{B} = 0$  и в отсутствие постоянной намагниченности токи  $dl^{\text{МОЛ}}$  в магнетике ориентированы хаотически (рис. 5.9,в). В присутствии магнитного

поля  $\vec{B}$  последнее, согласно закону Ампера (5.1), оказывает силовое действие на токи  $dl^{\text{МОЛ}}$ . Из-за возникающих вращающих моментов совокупность молекулярных токов становится упорядоченной (рис. 5.9,з) и каждый элемент объёма  $dV$  магнетика приобретает дипольный магнитный момент  $d\vec{M}^{\text{Магн}} = \vec{J} \cdot dV$ . При применении «макроскопического» подхода совокупности токов  $dl^{\text{МОЛ}}$  в намагниченной среде можно поставить в соответствие объёмный электрический ток и характеризовать его вектором плотности молекулярных токов  $\vec{j}^{\text{МОЛ}}$ .

Таким образом, можно полагать, что в присутствии объемных токов в проводниках и намагниченных объектов возбудителями магнитного поля являются суммарные токи, вектор плотности которых  $\vec{j}^{\Sigma} = \vec{j} + \vec{j}^{\text{МОЛ}}$ , где, как и ранее,  $\vec{j}$  - вектор плотности объёмного электрического тока в проводниках, а  $\vec{j}^{\text{МОЛ}}$  - вектор плотности молекулярных токов в намагниченной среде. В присутствии такой среды следует в выражениях (5.2), (5.3), (5.5), (5.6),

полученных для немагнитной среды, заменить  $\vec{j}$  на  $\vec{j}^\Sigma$ . В частности, вместо выражения (5.13)  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , имеем:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}^\Sigma = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}^{\text{МОЛ}}). \quad (5.21)$$

Однако, в отличие от (5.13), уравнением (5.21) затруднительно воспользоваться при решении прямых задач теории магнитного поля постоянного тока (расчетах полей  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ) в присутствии намагничивающейся среды. При постановке таких задач поле  $\vec{j}$  можно полагать заданным (или полученным в результате решения прямой задачи теории стационарного электрического поля для той или иной модели среды). Но поле  $\vec{j}^{\text{МОЛ}}$  связано с намагниченностью среды, которая зависит не только от среды (распределения в пространстве параметров  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ), но и от магнитного поля. Если магнитное поле является искомым (и неизвестным до получения решения прямой задачи), то неизвестно также и зависящее от него поле  $\vec{j}^{\text{МОЛ}}$ .

Поэтому удобно дополнить (5.21) другим уравнением, определяющим магнитное поле электрического тока. Можно доказать ([1], с. 254-255), что  $\vec{j}^{\text{МОЛ}} = \text{rot } \vec{J}$ , где  $\vec{J}$  - вектор намагниченности. Из (5.21) следует, что  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \text{rot } \vec{J}$  или  $\text{rot} (\vec{B}/\mu_0 - \vec{J}) = \vec{j}$ . Обозначая

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{J}, \quad (5.22)$$

получаем уравнение

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad (5.23)$$

где  $\vec{H}$  - уже известный нам вектор, называемый напряженностью магнитного поля. В отличие от (5.21), правая часть уравнения (5.23) не содержит зависящего от магнитного поля слагаемого  $\vec{j}^{\text{МОЛ}}$ .

Установим связь между напряженностью магнитного поля  $\vec{H}$  и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . В соответствии с (5.22),  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$ . Вектор намагниченности  $\vec{J} = \vec{J}^{\text{BP}} + \vec{J}^0$ , где слагаемое  $\vec{J}^{\text{BP}}$  отвечает временной (индуктивной) намагниченности, существующей под действием магнитного поля, а слагаемое  $\vec{J}^0$  - постоянной (остаточной) намагниченности, которая существует независимо от действующего магнитного поля (см. раздел 3.7). Примем, как и для магнитоэстатического поля, допущение о прямой пропорциональной зависимости между  $\vec{J}^{\text{BP}}$  и  $\vec{H}$ , то есть будем полагать, что  $\vec{J}^{\text{BP}} = \varepsilon \vec{H}$ , где  $\varepsilon$  - магнитная восприимчивость. Тогда, как следует из (5.22),  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \varepsilon \vec{H} + \vec{J}^0)$ . Магнитная проницаемость  $\mu = 1 + \varepsilon$ , то есть остаётся справедливым уравнение связи (3.14), полученное ранее для магнитоэстатического поля (см. раздел 3.7):

$$\vec{B} = \mu_0 (\mu \vec{H} + \vec{J}^0) = \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0, \quad (5.24)$$

где  $\mu_a = \mu \cdot \mu_0$  - абсолютная магнитная проницаемость.

Итак, согласно (5.23), (5.14), (5.24), в присутствии магнитной среды систему уравнений магнитного поля постоянного тока в дифференциальной форме удобно представить в следующем виде:

$$\text{I. rot } \vec{H} = \vec{j}, \quad \text{II. div } \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu_0(\mu\vec{H} + \vec{J}^0). \quad (5.25)$$

В соответствии с (5.25), возбудителями вихревой составляющей поля  $\vec{H}$  являются электрические токи с плотностью  $\vec{j}$ , а поле  $\vec{B}$  - соленоидальное (чисто-вихревое). Напомним, что источниками потенциальной составляющей поля  $\vec{H}$  являются намагниченные тела, точнее- те места в них, где  $\text{div } \vec{J} \neq 0$  так как, согласно (3.8,б),  $\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{J}$ .

Чтобы получить интегральную форму 1-го уравнения в (5.25), достаточно применить к полю  $\vec{H}$  формулу Стокса (1.12) и, в соответствии с (5.25), заменить  $\text{rot } \vec{H}$  на  $\vec{j}$ . Интегральная форма второго уравнения в (5.25)- это выражение (5.16). Таким образом, в присутствии намагничивающейся среды уравнения магнитного поля постоянного электрического тока в интегральной форме удобно представить в виде:

$$\text{I. } \oint_{[S]} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_S = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S}), \quad \text{II. } \oint_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = 0. \quad (5.26)$$

Первое из уравнений в (5.26)- это одна из форм записи закона полного тока.

Рассмотрим еще особенности влияния простейшей модели магнитной среды на магнитное поле электрических токов. Пусть всюду (во всем пространстве)  $\nabla\mu = \text{grad } \mu = 0$ ,  $\vec{J}^0 = 0$ , то есть это- модель безграничной, однородной по магнитной проницаемости  $\mu$  среды, в которой нет постоянной намагниченности, но может быть временная намагниченность, существующая под действием магнитного поля. Из 3-го уравнения в (5.25) получаем:  $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$ , где  $\mu = \text{const}$ . Умножая левую и правую части 1-го уравнения в (5.25) на произведение  $\mu_0\mu$ , получаем  $\mu_0\mu \text{rot } \vec{H} = \mu_0\mu \vec{j}$  или (при  $\mu = \text{const}$  и  $\mu_0\mu \text{rot } \vec{H} = \text{rot}(\mu_0\mu\vec{H})$ ):  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0\mu \vec{j}$ . Сравним это уравнение с равенством (5.13) для магнитного поля постоянного тока в вакууме (или в немагнитной среде). Левая часть этого уравнения- та же, что в (5.13), а правая часть отличается множителем  $\mu$ . Это означает, что при заданном распределении токов в безграничной, однородной по  $\mu$  модели среды поле  $\vec{B}$  будет отличаться по абсолютной величине от поля в вакууме в  $\mu$  раз. Тогда, например, для безграничной, однородной по  $\mu$  среды вместо (5.2) получаем:

$$d\vec{B} = \frac{\mu \cdot \mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}]}{L^3} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}]}{L^3}, \quad d\vec{H} = \frac{d\vec{B}}{\mu \cdot \mu_0} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{[d\vec{l} \vec{L}]}{L^3}. \quad (5.27)$$

Из последнего равенства следует, что при  $\vec{J}^0 = 0$  в безграничной однородной по магнитной проницаемости  $\mu$  модели среды напряженность  $\vec{H}$  магнитного поля, возбуждаемого постоянным электрическим током, не зависит от  $\mu$ .

Для векторного потенциала  $\vec{A}$  магнитного поля постоянного тока в такой, однородной по  $\mu$ , модели среды при  $\vec{J}^0=0$ , как следует из (5.12) и второго уравнения в (5.8), справедливы равенства:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_a \vec{j}, \quad \vec{A}(a) = \frac{\mu_a}{4\pi \nu} \int \frac{\vec{j} dV}{L}. \quad (5.28)$$

## 6. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

При рассмотрении постоянного электрического поля и постоянного магнитного поля полагали, что возбудители этих полей и сами поля не меняются со временем. То есть в любой момент времени  $t$  производные  $\frac{\partial \delta}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \vec{E}^{\text{СТР}}}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv 0, \dots$ , где  $\delta$  - объёмная плотность электрических зарядов  $\vec{E}$  - напряжённость электрического поля,  $\vec{E}^{\text{СТР}}$  - напряжённость поля сторонних сил,  $\vec{j}$  - вектор плотности тока,  $\vec{H}$  - напряжённость магнитного поля  $\vec{B}$  - вектор магнитной индукции. В этой теме будем полагать, что возбудители электрического и магнитного полей и сами эти поля переменные, то есть меняются со временем. Теория переменного электромагнитного (ЭМ) поля называется *электродинамикой*.

### 6.1. Квазипостоянное электромагнитное (ЭМ) поле

Мы знаем, что являются возбудителями постоянного электрического поля  $\vec{E}$  и постоянного магнитного поля  $\vec{H}$  и каким уравнениям удовлетворяют эти поля.

Постоянное поле  $\vec{E}$  - кулоново (гальваническое), его создают полные электрические заряды:  $\text{div } \vec{E} = \delta^{\text{плн}} / \epsilon_0$ . Из уравнений  $\text{rot } \vec{E} = 0$ ,  $\oint (\vec{E} d\vec{l}) = 0$ , следует, что постоянное кулоново поле  $\vec{E}$  - потенциальное и

$\vec{E} = -\text{grad } U = -\nabla U$ . Напряжение  $\epsilon_{12} = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l})$  такого поля  $\vec{E}$  между двумя точками "1", "2" не зависит от формы соединяющей эти точки линии (пути) и равно разности потенциалов  $U_1 - U_2$  в этих точках.

Для постоянного магнитного поля  $\vec{H}$  справедливы, в частности, следующие уравнения:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ ,  $\oint (\vec{H} d\vec{l}) = I_S = \int_S (\vec{j} d\vec{S})$ ,  $\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{J}$ .

Возбудителями этого поля являются электрические токи в проводниках и намагниченные тела.

Будут ли справедливы все эти уравнения при изменении со временем возбудителей полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и самих этих полей? Если бы это было так, то изменение со временем возбудителей поля всюду (во всём пространстве) вызывало синхронное изменения полей. Уравнения постоянных полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  были бы применимы для каждого момента времени (мгновения).

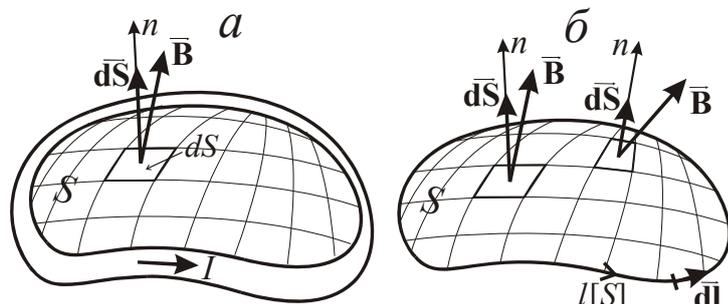
Такое переменное ЭМ поле, для которого в каждый момент времени *с удовлетворяющей нас точностью* справедливы уравнения постоянных полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  (и все следствия из этих уравнений) назовём *квазипостоянным*. Полагать, что (при определённых ограничениях) переменное ЭМ поле является квазипостоянным можно в ряде методов разведочной геофизики. Это- группа методов сопротивлений в электроразведке (вертикальные электрические зондирования, электропрофилеирование, метод заряда) и некоторые электрические методы исследования скважин (каротаж кажущихся сопротивлений, боковой каротаж). Теория этих методов и методика интерпретации результатов измерений основаны на том, что поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  постоянны. Фактически же в этих методах, как правило, возбуждают переменное ЭМ поле и измеряют его характеристики.

Однако в общем случае некоторые из уравнений постоянного ЭМ поля не справедливы при изменении полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  со временем. В этих уравнениях не учтены два явления, присущие только переменному ЭМ полю. Это- электромагнитная индукция и токи смещения.

## 6.2. Электромагнитная индукция. II-е уравнение Максвелла

Вспомним закон электромагнитной индукции (закон Фарадея). Согласно этому закону, в замкнутой проводящей цепи будет существовать электрический ток  $I$ , если меняется магнитный поток  $\Psi$  (поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ ) внутри этой цепи. Если, как показано на рис. 6.1,*а*, эта цепь- замкнутый виток провода, то для наличия в нём электрического тока  $I$  требуется изменение со временем  $t$  магнитного потока  $\Psi$  через поверхность  $S$ . По закону Майкла Фарадея ток  $I = -\frac{d\Psi}{dt} / R$ , где  $R$ - сопротивление цепи.

Но по закону Ома (4.3) ток  $I = \mathcal{E} / R$ , где  $\mathcal{E}$  - напряжение электрического поля  $\vec{E}$ . В данном случае это напряжение в полной (замкнутой) цепи тока,



**Рис. 6.1.** К закону электромагнитной индукции.

равное циркуляции  $\mathcal{C}$  электрического поля  $\vec{E}$  по замкнутой линии  $l$  расположенной в этой цепи (рис. 6.1,*б*). Существование тока  $I$  и поддерживающего его поля  $\vec{E}$  обусловлено явлением электромагнитной индукции (ЭМИ). Такой ток  $I^{\text{ЭМИ}}$  и поле  $\vec{E}^{\text{ЭМИ}}$  называют

индукционными.

Итак, из закона Фарадея и закона Ома следует, что в замкнутой линии, находящейся в полной цепи электрического тока, циркуляция индукционного

электрического поля  $\vec{E}^{\text{ЭМИ}}$ :  $\mathcal{U}^{\text{ЭМИ}} = -d\psi/dt$ . Подставляя в это равенство выражения для  $\mathcal{U}$  и  $\psi$ , получаем:

$$\oint_{l[S]} (\vec{E}^{\text{ЭМИ}} \cdot d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}). \quad (6.1)$$

Джеймс Максвелл высказал предположение, что уравнение вида (6.1) справедливо для всякой замкнутой линии  $l$ , даже если она находится в вакууме или в другом изоляторе, где нет электрического тока. В проводящих же средах (в объёмных проводниках) благодаря полю  $\vec{E}^{\text{ЭМИ}}$  существуют вихревые токи (токи Фуко).

Обусловленное переменным магнитным полем электрическое поле  $\vec{E}^{\text{ЭМИ}}$  по "происхождению" отличается от кулонова поля  $\vec{E}^{\text{Кул}}$ , создаваемого зарядами. Но поля  $\vec{E}^{\text{Кул}}$  и  $\vec{E}^{\text{ЭМИ}}$  оказывают одинаковое силовое действие на электрические заряды. От суммы полей  $\vec{E}^{\text{Кул}}$  и  $\vec{E}^{\text{ЭМИ}}$  зависит электрический ток в проводниках. Поэтому (суммарное) электрическое поле

$$\vec{E} = \vec{E}^{\text{Кул}} + \vec{E}^{\text{ЭМИ}}. \quad (6.2)$$

Так как, в соответствии с (4.13), циркуляция поля  $\vec{E}^{\text{Кул}}$  равна нулю, то, согласно (6.1), (6.2), для суммарного поля  $\vec{E}$  получаем:

$$\oint_{l[S]} (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}). \quad (6.3)$$

Равенство (6.3) в нашей (отечественной) литературе обычно называют вторым (II-ым) уравнением Максвелла в интегральной форме. Согласно этому уравнению, циркуляцию вектора  $\vec{E}$  по линии  $l[S]$  определяет скорость изменения со временем потока вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  через любую, ограниченную линией  $l$ , поверхность  $S$ . Получим дифференциальную форму уравнения (6.3).

Преобразуем левую часть уравнения (6.3) по формуле Стокса (1.12), а в правой части поменяем порядок дифференцирования по времени  $t$  и интегрирования по поверхности  $S$ . Тогда из (6.3) получаем:

$$\int_S (\text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}) = \int_S \left( \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right). \text{ Следовательно, потоки векторов } \text{rot } \vec{E} \text{ и } \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

через поверхность  $S$ - одинаковы. Так как это справедливо для произвольной поверхности  $S$ , то свидетельствует о равенстве векторов  $\text{rot } \vec{E}$  и  $\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$ .

Следовательно, II-ое уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

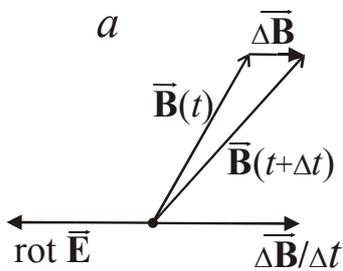
$$\text{rot } \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Согласно (6.4), возбудителем вихревой части поля  $\vec{E}$  является переменное магнитное поле. Там, где меняется со временем магнитное поле

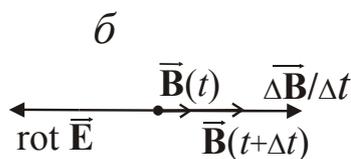
$\vec{V}$  ( $\partial\vec{V}/\partial t \neq 0$ ), пространственная производная  $\text{rot}\vec{E} \neq 0$ . Но условием, необходимым и достаточным для того, чтобы поле  $\vec{E}$  можно было выразить через скалярный потенциал  $U$ , является то, что  $\text{rot}\vec{E} \equiv 0$ . Следовательно, при существовании переменного поля  $\vec{V}$  электрическое поле  $\vec{E}$  (в общем случае) не является потенциальным, то есть переменное поле  $\vec{E}$  не может быть выражено через скалярный потенциал  $U$ , а напряжение  $\mathcal{E}$  поля  $\vec{E}$  между двумя точками пространства не имеет отношения к разности потенциалов  $\Delta U$  в этих точках. Иначе говоря, переменное поле  $\vec{E}$  не может быть выражено через скалярный потенциал  $U$ .

Отметим ещё следующее. У переменного векторного поля может меняться со временем не только его абсолютная величина, но и направление.

Из (6.4) следует, что  $\text{rot}\vec{E} = \frac{-\partial\vec{V}}{\partial t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$ . На рис. 6.2,а показано то, как



могут быть направлены вектор  $\vec{V}(t)$  в момент времени  $t$ , вектор  $\vec{V}(t + \Delta t)$  в момент времени  $t + \Delta t$ , разность этих векторов  $\Delta\vec{V} = \vec{V}(t + \Delta t) - \vec{V}(t)$  и вектор  $\text{rot}\vec{E}$  (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ).



В частном случае, при линейной поляризации переменного векторного поля, векторы, меняясь со временем по абсолютной величине, либо не меняют направления (рис. 6.2,б), либо меняют направление на противоположное. Согласно (6.4), при линейной поляризации переменного поля  $\vec{V}$  вектор  $\text{rot}\vec{E}$  коллинеарен (параллелен, либо антипараллелен) вектору  $\vec{V}$  ( $\text{rot}\vec{E} \parallel \vec{V}$  либо

**Рис. 6.2.**  
Произвольная (а) и  
линейная (б)  
поляризация поля  $\vec{V}$

$\text{rot}\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{V}$ ).

### 6.3. Ток смещения. I-е уравнение Максвелла

Для напряжённости магнитного поля постоянного тока получили уравнения (5.23), (5.26):  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$ ,  $\oint_{[S]} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_S = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S})$ . Можно

показать, что в случае переменного электромагнитного поля эти уравнения противоречат некоторым известным нам физическим явлениям и полученным ранее для переменного тока уравнениям (4.6)- (4.8). Действительно, из уравнения (5.23)  $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$  следует, что  $\text{div}\text{rot}\vec{H} = \text{div}\vec{j}$ . Но вторая производная векторного поля  $\text{div}\text{rot}\vec{H} \equiv 0$ , следовательно  $\text{div}\vec{j} = 0$ . В случае постоянного тока (когда поля  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  и плотности  $\delta$  источников поля  $\vec{E}$ -электрических зарядов не меняются со временем) это действительно так. Но

общем случае, согласно (4.7), для поля  $\vec{j}$  справедливо следующее уравнение непрерывности электрического тока в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (6.5)$$

То есть уравнение  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$  противоречит уравнению (6.5). Напомню ещё, что, согласно (4.6), интегральная форма (4.6) уравнения (6.5):

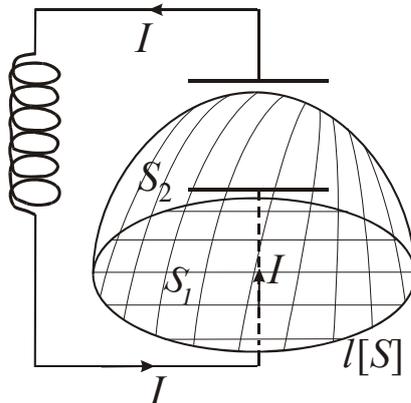
$$\oint_{S[V]} (\vec{j} \cdot d\vec{S}) = -\frac{de_V^{\text{свб}}}{dt}, \quad (6.5, a)$$

где  $e_V^{\text{свб}}$  - свободный электрический заряд в области пространства  $V$ .

Приведём ещё один пример, показывающий, что уравнение  $\oint_{l[S]} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_S$  в случае переменного тока  $I$  противоречит известному нам

физическому явлению. Знаем, что переменный ток  $I$  может существовать в "разомкнутых" цепях, например, в колебательном контуре, одним из участков которого является ёмкость (конденсатор), рис. 6.3.

Представим себе замкнутую линию  $l[S]$ , внутри которой "протекает" ток  $I$ , и две поверхности  $S_1$  и  $S_2$ , каждая из которых ограничена линией  $l[S]$ . Эти поверхности проведены так, что ток  $I$  пересекает поверхность  $S_1$ , но не



**Рис. 6.3.** Переменный ток  $I$  в цепи с конденсатором.

проходит через  $S_2$ , так как последняя расположена в изоляторе (проведена между обкладками конденсатора), рис. 6.3. Обратимся к уравнению  $\oint_{l[S]} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_S$ . При заданном

положении (в пространстве) линии  $l[S]$  левая часть этого уравнения является вполне определённой величиной, меняющейся со

временем в случае переменного поля  $\vec{H}$ . Правая же часть этого уравнения зависит от того, как расположена в пространстве ограниченная

линией  $l[S]$  поверхность  $S$ . Для поверхности  $S_1$  (в зависимости от выбора направления нормали к  $S_1$ ) имеем  $I_{S_1} = \pm I$ , а для поверхности  $S_2$

$I_{S_2} = 0$ . Следовательно, в общем случае, для переменного поля, уравнение

$\oint_{l[S]} (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I_S = \int_S (\vec{j} \cdot d\vec{S})$  и его дифференциальная форма  $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$  не могут

быть справедливы.

Отмеченные выше противоречия обусловлены тем, что при изменении поля со временем вихревое магнитное поле  $\vec{H}$  возбуждают не только электрические токи  $I$  (с плотностью  $\vec{j}$ ) в проводниках, но и другое явление, названное (не совсем удачно) *токами смещения*. Обозначим эти токи  $I^{\text{см}}$ , а их

плотность  $\vec{j}^{\text{см}}$ . Тогда два приведенных выше уравнения (5.23), (5.26) надо заменить следующими:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}^{\text{плн}} = \vec{j} + \vec{j}^{\text{см}}, \quad \oint_{[S]} (\vec{H} \, d\vec{l}) = I_S^{\text{плн}} = I_S + I_S^{\text{см}} = \int_S (\vec{j} \, d\vec{S}) + \int_S (\vec{j}^{\text{см}} \, d\vec{S}), \quad (6.6)$$

где  $\vec{j}^{\text{плн}}$  плотность полного электрического тока, а  $I_S^{\text{плн}}$  - поток вектора  $\vec{j}^{\text{плн}}$  через поверхность  $S$ . Согласно первому уравнению в (6.6),  $0 \equiv \text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j}^{\text{плн}} = \text{div } \vec{j} + \text{div } \vec{j}^{\text{см}}$ . Следовательно  $\text{div } \vec{j}^{\text{плн}} = 0$ , векторные  $I_{j^{\text{плн}}}$  поля  $\vec{j}^{\text{плн}}$  - замкнутые, а  $\text{div } \vec{j}^{\text{см}} = -\text{div } \vec{j}$ , то есть, в соответствии с (6.5),

$$\text{div } \vec{j}^{\text{см}} = \frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}. \quad (6.7)$$

Нам известно и другое уравнение, в которое входит объёмная плотность свободных зарядов. Согласно (3.10), дивергенция вектора электрической индукции  $\text{div } \vec{D} = \delta^{\text{свб}}$ . Дифференцируя левую и правую части этого уравнения по времени, получаем:  $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{D} = \frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$  или  $\text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$ .

Правая часть последнего равенства и уравнения (6.7)- одинаковы, следовательно,  $\text{div } \vec{j}^{\text{см}} = \text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ . Конечно, равенство дивергенций двух векторных полей не всегда означает, что эти поля одинаковы, так как у этих полей могут различаться вихревые составляющие. Но все экспериментальные данные подтверждают, что "плотность тока смещения" это фактически производная по времени вектора электрической индукции, то есть  $\vec{j}^{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

Итак, в соответствии с (6.6), получаем I-е уравнение Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}^{\text{плн}} = \vec{j} + \vec{j}^{\text{см}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.8)$$

и в интегральной форме

$$\oint_{[S]} (\vec{H} \, d\vec{l}) = I_S^{\text{плн}} = I_S + I_S^{\text{см}} = \int_S (\vec{j} \, d\vec{S}) + \int_S \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, d\vec{S} \right), \quad (6.9)$$

где плотность полного тока  $\vec{j}^{\text{плн}} = \vec{j} + \vec{j}^{\text{см}}$ , а  $I_S^{\text{плн}} = I_S + I_S^{\text{см}}$  - поток вектора  $\vec{j}^{\text{плн}}$  через поверхность  $S$ .

Так как  $\vec{j} \neq 0$ , если удельная электропроводность  $\gamma > 0$  и  $\vec{E} \neq 0$  а,  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}$  ( $\epsilon \geq 1$ ), то, согласно (6.8), вихревое магнитное поле  $\vec{H}$  создают (постоянные или переменные) электрические токи с плотностью  $\vec{j}$ , имеющиеся в проводниках, а также переменное электрическое поле (в любой среде или в вакууме). В отсутствии электрического тока в проводниках

единственным возбудителем вихревого поля  $\vec{H}$  является переменное электрическое поле. В случае постоянного поля ( $\partial \dots / \partial t \equiv 0$ ) имеем  $\vec{j}^{cm} = 0$ .

Равенство (6.9) выражает (справедливый для как постоянных, так и для переменных полей, в присутствии или в отсутствие магнетиков) закон полного тока (см. (5.15), (5.26)).

#### 6.4. Система уравнений электродинамики

Система уравнений электродинамики- основа классической теории переменного электромагнитного поля. Она включает уравнения Максвелла и некоторые другие уравнения, выбор которых может зависеть от сложившихся в той или иной научной школе традиций. Мы будем полагать, что, в соответствии с (6.8), (6.4), (3.13), (3.10), система уравнений электродинамики в дифференциальной форме- это следующие четыре уравнения:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \text{II. } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } \operatorname{div} \vec{B} = 0, & \text{IV. } \operatorname{div} \vec{D} = \delta^{cb0}. \end{array} \right\} \quad (6.10)$$

Системы уравнений электродинамики (6.10) в интегральной и поверхностной формах я предлагаю вам записать самостоятельно.

Так как в систему уравнений (6.10) входят пять разных векторных полей, её необходимо дополнить уравнениями связи (материальными уравнениями). При принятии допущения о пропорциональной зависимости между векторами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ , и линейной зависимости полей  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ;  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$ , уравнения связи, в соответствии с (3.11), (3.14), (4.11), можно представить в виде:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 (\mu \vec{H} + \vec{J}^0) = \mu_a \vec{H} + \mu_0 \vec{J}^0, \quad \vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{ср}). \quad (6.11)$$

В уравнения (6.11) входят (оказывающие, в общем случае, влияние на переменное ЭМ поле) электромагнитные параметры среды: диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ , магнитная проницаемость  $\mu$ , удельная электропроводность  $\gamma$  ( $1/\gamma = \rho$ - удельное электрическое сопротивление).

В принципе, в случае переменного ЭМ поля, уравнение III можно и не включать в систему (6.10) так как оно следует из уравнения II этой системы.

Действительно, из уравнения  $\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$  следует, что

$$0 \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{-\partial \operatorname{div} \vec{B}}{\partial t}, \text{ то есть } \frac{\partial \operatorname{div} \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \vec{B} \text{ (нигде и никогда) не}$$

меняется со временем. В случае *переменного* поля  $\vec{B}$  такое возможно лишь в том случае, если  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ .

Из уравнений I и IV системы (6.10) не сложно получить уравнение непрерывности электрического тока. Действительно, из уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ получаем } 0 \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}, \quad \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D}.$$

Так как, согласно уравнению IV в системе (6.10),  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \delta^{\text{свб}}$ , получаем, в соответствии с (6.5),  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{j}} = -\frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$ .

Отметим ещё, что (хотя они и не включены в систему уравнений электродинамики (6.10)), для переменного ЭМ поля остаются справедливыми некоторые уравнения, полученные ранее для постоянных полей. В частности, согласно (3.8,а), (3.8,б), это следующие уравнения для напряжённостей электрического и магнитного полей:

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = \frac{\delta^{\text{плн}}}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{\mathbf{H}} = -\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}}. \quad (6.12)$$

Из (6.10), (6.11), (6.12) следует, что возбудителями вихревой ( $\vec{\mathbf{E}}^{\text{эмн}}$ ) и безвихревой ("дивергентной"-  $\vec{\mathbf{E}}^{\text{Кул}}$ ) составляющих поля  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}^{\text{эмн}} + \vec{\mathbf{E}}^{\text{Кул}}$  являются соответственно переменное магнитное поле и полные электрические заряды.

Поле  $\vec{\mathbf{H}}$  можно представить как сумму 3-х слагаемых:  $\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}^{\text{rot}} + \vec{\mathbf{H}}^{\text{div}} = (\vec{\mathbf{H}}^{\text{j}} + \vec{\mathbf{H}}^{\text{jcm}}) + \vec{\mathbf{H}}^{\text{div}}$ . Возбудителями вихревой составляющей  $\vec{\mathbf{H}}^{\text{rot}} = \vec{\mathbf{H}}^{\text{j}} + \vec{\mathbf{H}}^{\text{jcm}}$  поля  $\vec{\mathbf{H}}$  являются электрические токи и переменное электрическое поле, а источниками безвихревой части  $\vec{\mathbf{H}}^{\text{div}}$  этого поля- намагниченные тела (точнее- те места в них, где  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{J}} \neq 0$ ).

Итак, мы рассмотрели систему уравнений электродинамики в дифференциальной форме (6.10), которую дополняют уравнения связи (6.11). Из уравнений Максвелла (уравнений I, II в системе (6.10)) следует, что при изменении со временем магнитное поле порождает электрическое поле, также переменное, и наоборот. Поэтому (в отличии, например, от электростатического и магнитостатического полей, существующих независимо друг от друга) электрические и магнитные поля, меняющиеся со временем, называют переменным *электромагнитным* полем.

Иногда некоторые из уравнений (6.10), (6.11) можно упростить. Приведём примеры.

1). Постоянная (остаточная) намагниченность  $\vec{\mathbf{J}}^0$  может оказывать значительное влияние на постоянное магнитное поле. Но при рассмотрении (и измерении) переменной составляющей магнитного поля (когда нас не интересует постоянная составляющая полей  $\vec{\mathbf{B}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$ ) 2-е уравнение в (6.11) принимает вид:

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_a \vec{\mathbf{H}}. \quad (6.13)$$

2). Как уже было отмечено, на переменное ЭМ поле (в рамках классической электродинамики) могут оказывать влияние следующие электромагнитные параметры среды:  $\rho=1/\gamma$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$ . Но, если удельное электрическое сопротивление горных пород меняется в очень широких пределах, то магнитная проницаемость  $\mu=1+\alpha$  большинства пород близка к

единице. Поэтому часто в методах переменного электромагнитного поля разведочной геофизики принимают допущение о том, что  $\mu=1$  и  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

3). Можно полагать, что в неподвижных средах (и в течении не очень длительных промежутков времени) параметры среды не меняются со временем. То есть производные по времени:  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial t} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} \equiv 0$ . Тогда в

уравнениях (6.10)  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E})}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , а, в соответствии с (6.13),

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial(\mu_0 \mu \vec{H})}{\partial t} = \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

4). Если мы рассматриваем поле в однородной по электромагнитным параметрам  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$  области пространства, где  $\text{grad } \gamma = \nabla \gamma = 0$ ,  $\text{grad } \varepsilon = \nabla \varepsilon = 0$ ,  $\text{grad } \mu = \nabla \mu = 0$ , то, конечно, в выражениях для пространственных производных с параметрами среды можно оперировать, как с константами. Тогда, например, при  $\text{grad } \mu = 0$  из уравнения III в (6.10) и (6.13) следует:  $\text{div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{div}(\mu_0 \mu \vec{H}) = 0$ ,  $\mu_0 \mu \cdot \text{div } \vec{H} = 0$ , а так как  $\mu_0 \neq 0$  и  $\mu \neq 0$ , то, следовательно,

$$\text{при } \nabla \mu = 0 \text{ справедливо уравнение: } \text{div } \vec{H} = 0. \quad (6.14)$$

Аналогично при  $\nabla \varepsilon = 0$  из уравнения IV в (6.10) и 1-го уравнения в (6.11) получаем:  $\text{div } \vec{D} = \text{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon \text{div } \vec{E} = \delta^{\text{свб}}$ . Отсюда следует, что

$$\text{при } \nabla \varepsilon = 0 \text{ справедливо уравнение: } \text{div } \vec{E} = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}. \quad (6.15)$$

5). Согласно 3-му уравнению в (6.11) в общем случае  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}})$ . Но в тех областях пространства, где напряжённость стороннего поля равна нулю, получаем из этого уравнения закон Ома в дифференциальной форме:

$$\text{при } \vec{E}^{\text{стр}} = 0 \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} = \vec{E} / \rho. \quad (6.16)$$

Рассмотрим теперь, какие особенности присущи переменному ЭМ полю в некоторых частных случаях.

### 6.5. ЭМ поле в изоляторе. Волновое уравнение

В (идеальном) изоляторе удельная электропроводность  $\gamma=0$  и (согласно 3-му уравнению в (6.11))  $\vec{j}=0$ . Если ещё отсутствуют свободные электрические заряды ( $\delta^{\text{свб}}=0$ ), то из (6.10), (6.11), принимая во внимание (6.13), получаем систему уравнений ЭМ поля в изоляторе (в непроводящей среде или в вакууме):

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t}, \quad \text{II. } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \text{III. } \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad \text{IV. } \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = 0. \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_a \vec{\mathbf{E}}, \quad \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_a \vec{\mathbf{H}}. \quad (6.18)$$

Из (6.17), (6.18) видно, что в рассматриваемом случае система уравнений ЭМ поля принимает простой и "симметричный" (для электрического и магнитного полей) вид. Переменное электрическое поле является возбудителем (также переменного) вихревого магнитного поля и наоборот. Поле  $\vec{\mathbf{D}}$ , как и поле  $\vec{\mathbf{B}}$  - чисто вихревое (соленоидальное).

Рассмотрим детальнее уравнения электромагнитного поля в однородном изоляторе, то есть в такой области пространства, где  $\gamma=0$ ,  $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ . При этих условиях, согласно (6.13)- (6.15), из (6.17), (6.18) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}, \quad \text{II. } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\mu_a \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t}, \\ \text{III. } \operatorname{div} \vec{\mathbf{H}} = 0, \quad \text{IV. } \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0. \end{array} \right\} \quad (6.19)$$

То есть при указанных условиях единственным возбудителем (чисто вихревого) поля  $\vec{\mathbf{E}}$  является переменное (чисто вихревое) магнитное поле  $\vec{\mathbf{H}}$  и наоборот, возбудителем (чисто вихревого) поля  $\vec{\mathbf{H}}$  является переменное электрическое поле  $\vec{\mathbf{E}}$ .

Каждое из уравнений I, II системы (6.19) содержит напряжённости электрического  $\vec{\mathbf{E}}$  и магнитного  $\vec{\mathbf{H}}$  полей, а также абсолютные проницаемости среды ( $\varepsilon_a$  или  $\mu_a$ ). Получим из (6.19) такие уравнения, в которые входили бы только  $\vec{\mathbf{E}}$  (или только  $\vec{\mathbf{H}}$ ) и параметры  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ . Например, из уравнения II системы (6.19) следует, что (при  $\nabla \mu = 0$ ) пространственная производная  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\mu_a \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}}{\partial t}$ . Принимая во внимание

уравнение I в (6.19), согласно которому  $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ , и тождественное равенство (1.11) для вторых производных векторного поля  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$ , получаем:  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$ . Так

как в соответствии с уравнением IV в (6.19)  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0$  (и  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{E}} = 0$ ), то  $\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$ . Итак, получили для электрической составляющей ЭМ поля

в однородном изоляторе уравнение

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}, \quad (6.20, a)$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad \text{а} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (6.21)$$

В (6.21)  $c$ - некоторая константа, смысл которой выясним позже, а  $v$  (в однородной среде)- также константа, зависящая от проницаемостей  $\varepsilon, \mu$ .

Аналогичным образом из уравнений I, II, III в (6.19) не сложно получить для магнитного поля  $\vec{H}$  в однородном изоляторе уравнение

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (6.20, б)$$

Уравнения (6.20,а), (6.20,б) для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  содержат вторые пространственные производные ( $\nabla^2 \dots$ ) и вторые производные по времени ( $\partial^2 \dots / \partial t^2$ ). Уравнения такого вида называют (однородными) *волновыми уравнениями*. То есть в однородном изоляторе поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют волновым уравнениям.

Для выяснения главных особенностей полей, удовлетворяющих волновым уравнениям, рассмотрим решения этих уравнений в наиболее простом случае. Обозначим любую скалярную декартову компоненту векторов  $\vec{E}, \vec{H}$  буквой  $\eta$ , то есть  $\eta = E_x, H_y, \dots$ . Согласно (6.20,а), (6.20,б)

компонента  $\eta$  удовлетворяет волновому уравнению  $\nabla^2 \eta = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$  или (в

декартовых координатах)  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ . Пусть особенности

поля таковы, что любая компонента  $\eta$  (помимо времени  $t$ ) зависит лишь от одной декартовой координаты  $z$ . Тогда  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$  и компонента  $\eta$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (6.22)$$

"Одномерное" волновое уравнение вида (6.22) называют *уравнением струны*. Согласно (6.22), вторая производная  $\partial^2 \eta / \partial t^2$  отличается от второй производной  $\partial^2 \eta / \partial z^2$  постоянным множителем  $1/v^2$ . Очевидно, что общее решение уравнения (6.22) можно представить в виде:

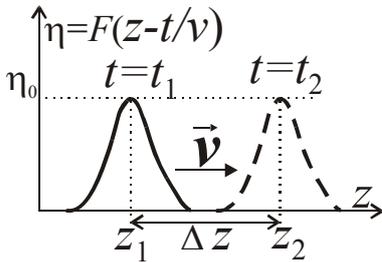
$$\eta = F(z - t/v) + G(z + t/v), \quad (6.23)$$

где  $F$  и  $G$ - две любые (дважды дифференцируемые) функции, а, соответственно,  $(z-t/v)$  и  $(z+t/v)$ - аргументы этих функций. То есть, если, например, в выражение для функции  $F$  входит  $z$  или  $t$ , то не иначе, как в виде разности  $z-t/v$ .

Пусть  $G=0$ . Представим выражение (6.23) для  $\eta$  в следующем виде:

$$\eta = F(\tau), \text{ где } \tau = t - z/v. \quad (6.24)$$

При заданной константе  $v$  компонента  $\eta$  зависит от двух аргументов  $z$  и  $t$ .



**Рис. 6.4.**

Распространение по направлению оси  $Z$ .

Можем придавать времени  $t$  фиксированные значения и рассматривать зависимости  $\eta$  от пространственной координаты  $z$ . Допустим, что в момент времени  $t=t_1$  величина  $\eta$  зависит от  $z$  так, как это показано на рис. 6.4 (сплошная линия). В частности, при  $t=t_1$  каждому значению функции  $\eta=F(z-t/v)$  соответствует некоторый аргумент  $z_1$ . На рис. 6.4 для примера показана координата  $z_1$  максимума  $\eta_0$  на зависимости  $\eta$  от  $z$  при  $t=t_1$ .

Как изменится зависимость  $\eta$  от  $z$  в (более поздний) момент времени  $t_2=t_1+\Delta t$ ? Такая зависимость показана на рис. 6.4 штриховой линией. Следует учесть, что, согласно решению (6.24) уравнения струны (6.22), при заданной функции  $F$  значение величины  $\eta$  полностью определяет аргумент  $\tau=t-z/v$ . Тогда при  $\tau=t_1-z_1/v$  и  $\tau=t_2-z_2/v=t_1+\Delta t-(z_1+\Delta z)/v$ , величина  $\eta$  будет одинакова, если  $\Delta t=\Delta z/v$ , то есть при  $\frac{\Delta z}{\Delta t} = v$ .

На рис. 6.4 видно, что выражение (6.24) описывает распространение со временем некоторого колебания ("импульса", "сигнала") вдоль оси  $Z$  (в направлении увеличения координаты  $z$ ) со скоростью  $v$ . Заметим, что функция  $G$  в (6.23) описывает распространение  $\eta$  со временем со скоростью  $v$  в направлении уменьшения координаты  $z$ . То есть общему решению (6.23) уравнения струны (6.22) соответствуют две плоские волны, распространяющиеся со скоростью  $v$  в противоположных направлениях. У каждой из них в фиксированный момент времени  $t$  значения компоненты  $\eta$  одинаковы в плоскости  $z=\text{const}$ .

Итак,  $v$  это скорость распространения электромагнитных волн (сигналов, колебаний) в изоляторе. Согласно (6.21), эта скорость  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ , а

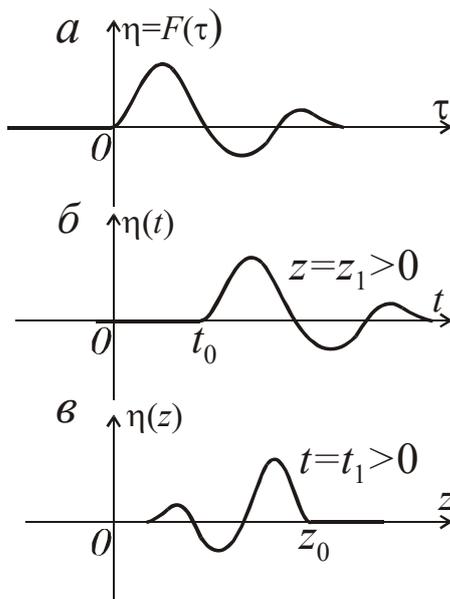
$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . В вакууме, где  $\epsilon=1$ ,  $\mu=1$ , эта скорость  $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Равную

скорости распространения ЭМ волн (и скорости света) в вакууме константу  $c$  называют *электродинамической постоянной*. Ясно, что константа  $c$  связана равенством (6.21) с электрической постоянной  $\epsilon_0$  и магнитной постоянной  $\mu_0$ . Так как скорость света известна нам с конечной точностью ( $c \approx 2.99792458 \dots \cdot 10^8$ , м/с), то при "построении" международной системы физических единиц (СИ) было решено задать для магнитной постоянной  $\mu_0$  фиксированное значение ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м), а электрическую постоянную

определить равенством  $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$ . Тогда при  $c \approx 3 \cdot 10^8$ , м/с имеем  $\varepsilon_0 \approx \frac{10^{-9}}{36 \cdot \pi}$ , Ф/м.

В соответствии с (6.21), в изоляторе при  $\varepsilon > 1$  или  $\mu > 1$  скорость распространения электромагнитных волн меньше скорости света в  $\sqrt{\varepsilon \mu}$  раз, а в немагнитном изоляторе ( $\mu=1$ )- в  $\sqrt{\varepsilon}$  раз: при  $\mu=1$   $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ .

Вернёмся к одному из решений (6.24) уравнения струны (6.22). Напомню, что это решение отвечает распространению плоской волны по направлению оси  $Z$ .



**Рис. 6.5.** Временная (б) и пространственная (в) волны.

Пусть компонента  $\eta = F(\tau)$  зависит от  $\tau$  так, как это показано на рис. 6.5,а. То есть при  $\tau < 0$   $F(\tau) = 0$ , а зависимость  $F(\tau)$  подобна убывающей по амплитуде с ростом  $\tau$  синусоиде. Примем во внимание, что в (6.24)  $\tau = t - z/v$ , следовательно  $t = \tau + z/v$ ,  $z = v(t - \tau)$ . Чем будут отличаться зависимости  $\eta = F(t)$  при  $z = \text{const}$  и  $\eta = F(z)$  при  $t = \text{const}$  от графика на рис. 6.5,а?

На рис. 6.5,б показан график колебаний ("временная волна")- зависимость  $\eta(t)$  в фиксированной точке пространства, точнее- в плоскости  $z = \text{const}$  с координатой  $z = z_1 > 0$ . Так как  $t = \tau + z/v$ , то при  $z = z_1 > 0$   $t > \tau$  на величину  $z_1/v$ . На зависимости  $\eta(t)$  при  $z > 0$  имеем ту же последовательность

значений, что и на графике  $\eta(\tau)$ , но смещённую "вправо" относительно начала  $0$  отсчёта аргумента. При большем, чем  $z_1$ , значении  $z = z_2 = \text{const}$  график на рис. 6.5,б без изменения формы сместится вправо- в сторону **б**ольших значений аргумента  $t$ .

На рис. 6.5,в показан "профиль волны" (или "пространственная волна")- зависимость  $\eta(z)$  в фиксированный момент времени  $t = t_1 > 0$ . Так как  $z = v(t - \tau)$ , то с ростом  $\tau$  координата  $z$  уменьшается. Поэтому (для волны, распространяющейся в направлении оси  $Z$ ) зависимость  $\eta(z)$  отличается от зависимости  $\eta(\tau)$  не только тем, что аргументы  $z$  и  $\tau$  имеют разную размерность (см. рис. 6.5,а,в). Плоскость с координатой, обозначенной  $z_0$  на рис. 6.5,в, отвечает "фронту" плоской волны в момент времени  $t_1$ . Ясно, что при большем, чем  $t_1$ , времени  $t_2 = \text{const}$  график на рис. 6.5,б без изменения формы сместится вправо- в сторону **б**ольших значений аргумента  $z$ .

Вопросы к вам.

1). На какое расстояние  $\Delta z$  по оси  $Z$  переместится волна на рис. 6.5,в за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ ?

2). Как изменятся графики на рис. 6.5,б, в, если зависимость на рис. 6.5,а- это (в отличие от (6.24)) функция  $\eta = G(\tau)$ , где  $\tau = t + z/v$ , описывающая плоскую волну, распространяющуюся в направлении, противоположном направлению оси  $Z$  (в направлении уменьшения координаты  $z$ )?

### 6.6. ЭМ поле в проводящей среде. Телеграфное уравнение

В отличие от изолятора, в проводящей среде есть свободные электрические заряды (плотность  $\delta^{свб} \neq 0$ ), удельная электропроводность  $\gamma > 0$  и вектор плотности тока  $\vec{j} \neq 0$ . В соответствии с (6.10), (6.11), (6.13), в проводящей среде система уравнений ЭМ поля и уравнения связи:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{II. } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{IV. } \text{div } \vec{D} = \delta^{свб}; \end{array} \right\} \quad (6.25)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_a \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{ср}). \quad (6.26)$$

Как мы уже знаем (см. раздел 6.4), из уравнений I, IV в (6.25) можно получить уравнение непрерывности электрического тока (6.5):

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \delta^{свб}}{\partial t}. \quad (6.27)$$

Кроме того, для переменного ЭМ поля, как и для постоянных электрического и магнитного полей, справедливы уравнения (6.12)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\delta^{плн}}{\varepsilon_0}, \quad \text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{J}. \quad (6.28)$$

Согласно уравнению I в (6.25), в отличие от изолятора, в проводящей среде возбудителем вихревой составляющей магнитного поля  $\vec{H}$  может быть не только переменное электрическое поле, но и электрические токи (с плотностью  $\vec{j}$ ).

Рассмотрим подробнее некоторые особенности ЭМ поля в проводящей однородной области пространства, где нет стороннего поля:  $\gamma > 0$ ,  $\nabla \gamma = 0$ ,  $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ ,  $\vec{E}^{ср} = 0$ . Согласно (6.25), (6.26), при этих условиях

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{II. } \text{rot } \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \text{III. } \text{div } \vec{H} = 0, \quad \text{IV. } \text{div } \vec{E} = \frac{\delta^{свб}}{\varepsilon_a} = \frac{\delta^{свб}}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \end{array} \right\} \quad (6.29)$$

Докажем сначала, что при  $\gamma > 0$ ,  $\nabla \gamma = 0$ ,  $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\vec{E}^{ср} = 0$  плотности  $\delta^{свб} = 0$  и  $\delta^{плн} = 0$ . Точнее, если в однородную (по  $\gamma$  и  $\varepsilon$ ) проводящую область

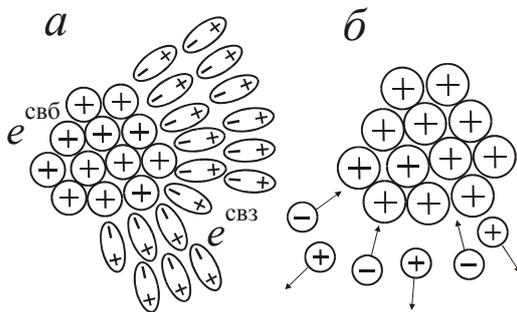
пространства, в которой  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ , "попадёт" электрический заряд, то он быстро исчезнет, так как будет нейтрализован электрическими микрочарядами противоположного знака.

Сравним 1-е уравнение в (6.28) и уравнение IV в (6.29). Так как левые части этих уравнений одинаковы, можем приравнять их правые части:  $\delta^{\text{плн}}/\epsilon_0 = \delta^{\text{свб}}/(\epsilon_0\epsilon)$ . Следовательно в среде, однородной по диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  для плотностей полных, свободных и связанных зарядов справедливы равенства

$$\delta^{\text{плн}} = \delta^{\text{свб}} + \delta^{\text{свз}} = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\epsilon} \quad \text{или} \quad \delta^{\text{свз}} = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \delta^{\text{свб}}. \quad (6.30)$$

В соответствии с первым уравнением в (6.30), в однородном диэлектрике (при  $\epsilon > 1$ ) плотность полных зарядов пропорциональна плотности свободных зарядов и  $\delta^{\text{плн}}$  в  $\epsilon$  раз меньше, чем  $\delta^{\text{свб}}$ . Иллюстрацией того, почему в диэлектрике  $|\delta^{\text{плн}}| \ll |\delta^{\text{свб}}|$  может служить рис. 6.6,а.

Если мы докажем, что при указанных выше условиях (однородности среды по электрическим параметрам и при  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ ) плотность  $\delta^{\text{свб}} = 0$ , то и  $\delta^{\text{плн}} = 0$ , а тогда, согласно первому уравнению в (6.28) и уравнению IV в (6.29),  $\text{div } \vec{E} = 0$ .



**Рис. 6.6.** Связанные заряды  $e^{\text{свз}}$  в диэлектрике частично нейтрализуют свободный заряд  $e^{\text{свб}}$  (а); нейтрализация свободного заряда в проводнике (б).

Из уравнения (6.27)  $\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$

и 3-го уравнения в (6.26)  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}})$

при  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$  получаем:

$\text{div}(\gamma \vec{E}) = -\frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$ . Отсюда следует, что

в среде, однородной по удельной электропроводности ( $\nabla \gamma = 0$ ), имеем

$\text{div } \vec{E} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$ . При сравнении этого

уравнения с уравнением IV в (6.29)

получаем:  $-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t} = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\epsilon_a}$  или

$$\frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t} / \delta^{\text{свб}} = \frac{-\gamma}{\epsilon_a} = \frac{-1}{\tau}, \quad (6.31)$$

где имеющая размерность времени (с) величина

$$\tau = \frac{\epsilon_a}{\gamma} = \epsilon_0 \epsilon \rho - \quad (6.32)$$

время релаксации. Величина  $\tau$  растёт с увеличением удельного электрического сопротивления  $\rho$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ .

Физический смысл, который можно придать этой величине, выясним чуть позже.

Так как  $\delta^{\text{плн}} = \delta^{\text{свб}} / \varepsilon$ , то уравнение (6.31) справедливо для плотности  $\delta$  любых зарядов (свободных, полных или связанных):

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{-1}{\tau} \delta, \quad (6.31, a)$$

Согласно (6.31, a) первая производная функции  $\delta$  по времени  $t$  отличается от функции  $\delta$  постоянным отрицательным множителем  $(-1/\tau)$ . Очевидно, что решением этого уравнения является экспонента. Представим это решение в виде:

$$\delta(t) = \delta(0) \cdot \exp(-t/\tau), \quad (6.33)$$

где  $\delta(0)$  плотность зарядов в момент времени, условно принятый за начало отсчёта времени  $t$ .

Пусть в момент времени  $t=0$  в однородной проводящей среде оказался заряд с плотностью  $\delta(0)$ . Согласно (6.33), через промежуток времени  $t=\tau$  плотность  $\delta(\tau)$  уменьшится по сравнению с  $\delta(0)$  в  $e \approx 2.718$  раз. За время  $t=2\tau$  плотность  $\delta(2\tau)$  будет в  $e^2$  меньше, чем  $\delta(0)$  и так далее. За время  $t=5\tau$  плотность  $\delta(5\tau)$  уменьшится в  $e^5 \approx 150$  раз, то есть заряд "практически исчезнет". Фактически оказавшийся в однородной проводящей среде заряд будет нейтрализован имеющимися в такой среде свободными микрочарядами, имеющими знак, противоположный знаку этого заряда, (рис. 6.6, б).

То есть время релаксации  $\tau$  - это время, за которое плотность (и величина) заряда, "помещённого" в электрически однородную среду, в которой нет стороннего поля, уменьшится в  $e$  раз. Каким может быть это время? Сделаем оценку. Пусть диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon=10$  (значение - типичное для ряда горных пород), а удельное электрическое сопротивление  $\rho=1000$  Ом·м (значение - высокое для большинства осадочных горных пород). Тогда,

согласно (6.32),  $\tau = \varepsilon_0 \varepsilon \rho \approx \frac{10^{-9}}{36 \cdot \pi} \cdot 10 \cdot 1000 \approx 10^{-7}$ , с = 0.1, мкс. Следовательно,

электрический заряд, "появившийся" в однородной проводящей среде, даже при её высоком  $\rho$ , практически мгновенно исчезнет, так как он будет нейтрализован электрическими микрочарядами противоположного знака.

Итак, при  $\gamma > 0$ ,  $\nabla \gamma = 0$ ,  $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\vec{E}^{\text{ср}} = 0$  из 1-го уравнению в (6.28) или уравнения IV в (6.29) получаем:

$$\text{при } \gamma > 0, \nabla \gamma = 0, \nabla \varepsilon = 0, \vec{E}^{\text{ср}} = 0: \quad \text{div } \vec{E} = 0. \quad (6.34).$$

Получим уравнения, которым удовлетворяют поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при  $\gamma > 0$ ,  $\nabla \gamma = 0$ ,  $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ ,  $\vec{E}^{\text{ср}} = 0$ . Из уравнения II системы (6.29) следует,

что (при  $\nabla \mu = 0$ )  $\text{rot rot } \vec{E} = -\mu_a \text{rot } \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \text{rot } \vec{H}}{\partial t}$ . Принимая во внимание

уравнение I в (6.29), согласно которому  $\text{rot } \vec{\mathbf{H}} = \gamma \vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$ , и известное нам равенство (1.11) для вторых производных векторного поля  $\text{rot rot } \vec{\mathbf{E}} \equiv \text{grad div } \vec{\mathbf{E}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}}$ , получаем:

$\text{grad div } \vec{\mathbf{E}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = -\gamma \mu_a \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$ . Так как в соответствии с уравнением (6.34)  $\text{div } \vec{\mathbf{E}} = 0$  (и, следовательно,  $\text{grad div } \vec{\mathbf{E}} = 0$ ), то

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{E}} = \gamma \mu_a \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}. \quad (6.35, a)$$

Аналогично из уравнений I, II, III системы (6.29) для магнитного поля  $\vec{\mathbf{H}}$  получаем:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{H}} = \gamma \mu_a \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2}. \quad (6.35, б)$$

Уравнения (6.35,а), (6.35,б) для полей  $\vec{\mathbf{E}}$  и  $\vec{\mathbf{H}}$  содержат вторые пространственные производные ( $\nabla^2 \dots$ ), первые производные по времени и вторые производные этих полей по времени. Эти уравнения называют (однородными) *телеграфными уравнениями* ("уравнениями телеграфистов"), так как впервые уравнения такого вида были получены Оливером Хевисайдом в 1880-х годах применительно к теории передачи ЭМ сигналов по проводам. При  $\gamma=0$  (в изоляторе) эти уравнения переходят в известные нам волновые уравнения (6.20,а), (6.20,б), но при  $\gamma>0$  телеграфные уравнения отличаются от волновых уравнений тем, что имеют слагаемое с первой производной поля по времени  $t$ .

Даже в простейших случаях (когда какая либо декартова компонента полей  $\vec{\mathbf{E}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$ , помимо времени  $t$ , зависит только от одной декартовой координаты) решения телеграфных уравнений- не столь просты, как, например, решение (6.23) одномерного волнового уравнения (уравнения струны) (6.22). То, чем, в основном, отличаются решения одномерного телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \gamma \mu_a \frac{\partial \eta}{\partial t} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (6.36)$$

от решений уравнения струны (6.22)  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$  можно (упрощенно)

охарактеризовать следующим образом.

1). В отличие от показанных на рис. 6.4, 6.5 графиков форма ЭМ "сигнала" (колебания), удовлетворяющего уравнению (6.36), меняется со временем.

2). В проводящей среде (при  $\gamma>0$ ) по мере распространения убывает электромагнитная энергия такого "сигнала" (см. раздел 6.17).

3). Вместе с тем, скорость  $v$  распространения *фронта* ЭМ колебания в проводящей среде та же, что в изоляторе. В соответствии с (6.21), эта скорость  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a} = c/\sqrt{\epsilon \mu}$ , то есть зависит от проницаемостей среды. В немагнитной среде ( $\mu=1$ ) скорость распространения фронта ЭМ колебания ("сигнала")  $v = c/\sqrt{\epsilon}$  зависит только от диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ .

### 6.7. Квазистационарное электромагнитное поле. Уравнение теплопроводности- диффузии

Понятием "квазистационарное ЭМ поле" пользуются в большинстве методов переменного ЭМ поля разведочной геофизики. При этом полагают (в первую очередь), что при выполнении соответствующих условий в проводящей среде (горных породах) абсолютная величина вектора плотности тока смещения  $|\vec{j}^{см}| = \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| = \epsilon_a \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|$  много меньше абсолютной величины модуля вектора плотности электрического тока  $|\vec{j}|$ . Так как (в тех областях пространства, где  $\vec{E}^{ср} = 0$ ), согласно (6.16),  $\vec{j} = \gamma \vec{E} = \vec{E}/\rho$ , то указанное выше условие квазистационарности ЭМ поля можно определить неравенствами:

$$|\vec{j}^{см}| \ll |\vec{j}| \quad \text{или} \quad \epsilon_a \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \ll \gamma |\vec{E}| \quad \text{или} \quad \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| / |\vec{E}| \ll \frac{\gamma}{\epsilon_a} = \frac{1}{\epsilon_a \rho} = \frac{1}{\tau}, \quad (6.37)$$

где, в соответствии с (6.32),  $\tau$ - время релаксации.

Согласно последнему неравенству в (6.37), для выполнения условия квазистационарности ЭМ поля "относительная скорость" изменения со временем  $t$  электрического поля  $\left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| / |\vec{E}|$  должна быть пренебрежимо мала

по сравнению с величиной  $1/\tau$ , обратной времени релаксации  $\tau$ . Ранее мы оценили, что даже при высоком для большинства горных пород удельном электрическом сопротивлении  $\rho=1000$  Ом·м и при диэлектрической проницаемости  $\epsilon=10$  время релаксации  $\tau \approx 10^{-7}$ , с. Соответственно при таких же значениях  $\rho$  и  $\epsilon$  отношение  $(1/\tau) \approx 10^7$ , 1/с, то есть для выполнения условия квазистационарности (6.37) в "умеренно проводящих" горных породах требуется, чтобы "относительная скорость" изменения со временем  $t$

электрического поля  $\left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| / |\vec{E}|$  была много меньше "очень большой"

величины  $1/\tau$ . Для типичных значений  $\epsilon$  и наиболее часто встречающихся пределах изменения  $\rho$  горных пород это условие, как правило, выполняется с достаточной (для геофизических измерений) точностью во многих методах переменного ЭМ поля разведочной геофизики (МТЗ, МПП, ЗС, ЧЗ, ИК, ВИКИЗ и др.). Поэтому теория и методика интерпретации в этих методах базируется на уравнениях ЭМ поля в "квазистационарном приближении".

При выполнении неравенств в (6.37) из системы уравнений электродинамики (6.10) и уравнений связи (6.11), принимая во внимание (6.13), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}}, \quad \text{II. } \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad \text{III. } \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0, \\ \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \mu \vec{\mathbf{H}} = \mu_a \vec{\mathbf{H}} \quad (A), \quad \vec{\mathbf{j}} = \gamma (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{E}}^{\text{ср}}) \quad (B). \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

В квазистационарном приближении уравнение I в (6.38)- такое же, как уравнение (5.23) для магнитного поля  $\vec{\mathbf{H}}$  постоянного (*стационарного*) электрического тока. С этим и связан термин "*квазистационарное*" ЭМ поле.

Такие уравнения, как (6.5):  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{j}} = -\frac{\partial \delta^{\text{свб}}}{\partial t}$ , IV в (6.10):  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} = \delta^{\text{свб}}$ , в

которые входят плотности электрических зарядов  $\delta^{\text{свб}}$ , не совместны с системой (6.38) уравнений квазистационарного поля. Действительно, из уравнения I в (6.38) следует, что  $0 \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \operatorname{div} \vec{\mathbf{j}}$ , то есть в случае квазистационарного поля токовые линии  $l_j$  (векторные линии вектора плотности тока  $\vec{\mathbf{j}}$ ) могут быть только замкнутыми. Но фактически линии  $l_j$  начинаются и оканчиваются там, где меняются со временем  $t$  плотности  $\delta^{\text{свб}}$  свободных электрических зарядов. В свою очередь, как мы знаем, от  $\delta^{\text{свб}}$  при  $\epsilon > 1$  зависит плотность полных электрических зарядов  $\delta^{\text{пнн}}$ . Поэтому в том случае, когда требуется установить то, как влияет на ЭМ поле создаваемая электрическими зарядами кулонова составляющая поля  $\vec{\mathbf{E}}$ , необходимо пользоваться не системой уравнений квазистационарного поля (6.38), а уравнениями (6.10)- (6.12).

Согласно уравнениям (6.38), в случае квазистационарного ЭМ поля единственным возбудителем вихревой составляющей магнитного поля  $\vec{\mathbf{H}}$  являются электрические токи с плотностью  $\vec{\mathbf{j}}$ . Как и в общем случае (6.10), единственным возбудителем вихревого электрического поля  $\vec{\mathbf{E}}$  является переменное магнитное поле  $\vec{\mathbf{B}}$  ( $\vec{\mathbf{H}}$ ), а поле  $\vec{\mathbf{B}}$ - соленоидальное (чисто вихревое).

Обратим внимание на то, что даже в общем случае, согласно (6.38), на квазистационарное ЭМ поле (в рамках классической электродинамики) могут влиять лишь два электромагнитных параметра среды: удельная электропроводность  $\gamma$  (или удельное электрическое сопротивление  $\rho = 1/\gamma$ ) и магнитная проницаемость  $\mu$ . Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon$  не влияет на характеристики переменного ЭМ поля при выполнении условия квазистационарности (6.37).

Каким уравнениям удовлетворяют электрическая и магнитная составляющие квазистационарного ЭМ поля в однородной области пространства  $V$  (при  $\nabla \gamma = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ ), если в этой области  $\vec{\mathbf{E}}^{\text{ср}} = 0$ ? Из

телеграфного уравнения (6.35,a) для поля  $\vec{E}$ :  $\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

получаем  $\nabla^2 \vec{E} = \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_a \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \mu_a \frac{\partial}{\partial t} (\vec{j} + \vec{j}^{cm})$ . При

выполнении условия квазистационарности (6.37) ( $|\vec{j}^{cm}| \ll |\vec{j}|$ ) получаем:

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma \mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ и, аналогично, } \nabla^2 \vec{H} = \gamma \mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (6.39)$$

То есть в однородной по  $\gamma$  и  $\mu$  области пространства при  $\vec{E}^{стп} = 0$  в случае квазистационарного поля векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют уравнениям (6.39), в которые входят вторые пространственные производные ( $\nabla^2 \dots$ ) и первые производные по времени  $t$ . Уравнения для  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вида (6.39) получили название уравнений *теплопроводности- диффузии*, так первоначально они были получены при математическом описании соответствующих (не электромагнитных) физических явлений.

Какие процессы описывают уравнения (6.39)? Как и при рассмотрении простейшего решения волнового уравнения, обозначим  $\eta = E_x, H_y, \dots$ . Согласно (6.39), скалярная компонента  $\eta$  квазистационарного ЭМ поля удовлетворяет уравнению  $\nabla^2 \eta = \gamma \mu_a \frac{\partial \eta}{\partial t}$ . При  $\eta = \eta(t, z)$  получаем из этого

уравнения для скалярной декартовой компоненты  $\eta$  вектора  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$  "одномерное" уравнение теплопроводности- диффузии:  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} = \gamma \mu_a \frac{\partial \eta}{\partial t}$ .

Приведём одно из решений этого уравнения:  $\eta(z, t) = \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-\gamma \mu_a z^2}{4t}\right)$ , где

$t > 0$ , а константа  $C$  зависит от условий задачи. Видно, что компонента  $\eta$  в фиксированный момент времени  $t$  экспоненциально убывает с увеличением  $|z|$ .

Необходимо отметить также следующее. При справедливости неравенств (6.37) и возможности применения системы уравнений (6.38), требуется фактически выполнение не одного условия (6.37), а 3-х условий квазистационарности ЭМ поля.

1).  $|\vec{j}^{cm}| \ll |\vec{j}|$ , точнее  $|j_l^{cm}| \ll |j_l|$ , где  $j_l^{cm}, j_l$  компоненты векторов  $\vec{j}^{cm}$  и  $\vec{j}$  по любому направлению (линии)  $l$ .

2). Тогда, как следует из уравнения I в (6.38),  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  и  $\text{div } \vec{j} = 0$ . То есть в случае квазистационарного поля токовые линии  $l_j$  могут быть только замкнутыми. Описание переменных электрических токов в разомкнутых для

тока проводимости (с плотностью  $\vec{j}$ ) цепях (контурах) на основе квазистационарного приближения- невозможно.

3). Из уравнения  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ , не содержащего производных по времени, следует, что во всём пространстве вихревая составляющая поля  $\vec{H}$  меняется синхронно с возбуждающими поле  $\vec{H}$  токами. Но фактически, как мы знаем, скорость распространения ЭМ колебаний не может быть больше, чем скорость света. Изменения характеристик ЭМ поля "запаздывают" по отношению к изменению со временем возбудителей поля (электрических токов, зарядов). В уравнении  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  это "запаздывание" не учитывается. Понятно, что запаздывание это тем больше, чем больше расстояния от возбудителей поля до точек наблюдения. Поэтому размеры области пространства  $V$ , где мы рассматриваем ЭМ поле в квазистационарном приближении, не могут быть очень велики, чтобы фактически существующее запаздывание не привело к существенному расхождению между реальным и квазистационарным ЭМ полями.

\*\*\*\*\*

### ***Гармонически меняющееся поле***

Рассмотрим более подробно один из видов зависимости поля от времени- гармонически меняющееся поле. У такого поля характеризующие его скалярные величины (скаляр или скалярные компоненты вектора) меняются со временем по закону синуса или косинуса. Почему именно такой зависимости поля от времени уделим большее внимание, чем другим зависимостям поля от времени? Есть три причины.

1). Гармонически меняющиеся поля широко применяются, в частности, в ЭМ методах геофизики.

2). Теория такого поля- проще, чем теория других переменных полей.

3). Зная, например, решение прямой задачи для гармонически меняющегося поля, можем перейти к другим зависимостям поля от времени, воспользовавшись рядом Фурье (для периодически меняющихся со временем полей) или интегралом Фурье.

### **6.8. Гармонически меняющееся скалярное поле**

Пусть  $\beta(t)$ - гармонически меняющаяся скалярная величина (например, ток  $I$  или напряжение  $\mathcal{E}$ ). Тогда  $\beta(t) = \beta_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ , где  $\beta_0$ - амплитуда,  $\varphi$ -

начальная фаза величины  $\beta$ , сумма  $\frac{2\pi t}{T} + \varphi$ - фаза,  $T$ - период.  $t$ - время (рис.

6.7). Величина, обратная периоду  $1/T=f$ - частота колебаний, а  $2\pi f=\omega$ - круговая частота. При этих обозначениях  $\beta(t) = \beta_0 \cos(\omega t + \varphi)$ .

Если  $\beta$ - скалярное гармонически меняющееся поле (или скалярная компонента векторного гармонически меняющегося поля), то, кроме времени  $t$ ,  $\beta$  зависит от положения в пространстве точки наблюдения  $a$ :

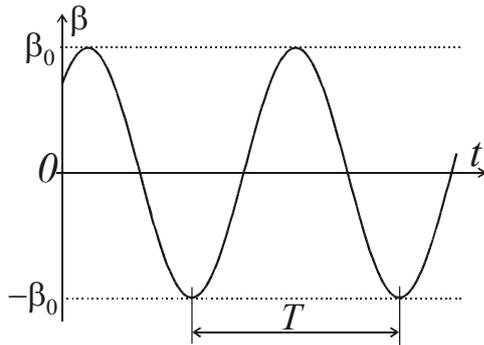
$$\beta(a, t) = \beta_0(a) \cos[\omega t + \varphi(a)]. \quad (6.40)$$

При записи (6.40) принято во внимание, что амплитуды колебаний  $\beta_0$  и начальные фазы  $\varphi$  могут быть разными в разных точках пространства, то есть зависят от положения точки  $a$ .

Из (6.40) следует, что  $\beta(a, t) = \beta_0(a) \{ \cos[\varphi(a)] \cos(\omega t) - \sin[\varphi(a)] \sin(\omega t) \}$ . Так как  $-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \pi/2)$ , то

$$\beta(a, t) = \{ \beta_0(a) \cos[\varphi(a)] \} \cos(\omega t) + \{ \beta_0(a) \sin[\varphi(a)] \} \cos(\omega t + \pi/2). \quad (6.41)$$

Согласно (6.41), гармонически меняющееся скалярное поле можно

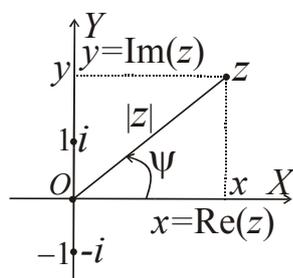


**Рис. 6.7.** Гармонически меняющаяся величина  $\beta$ .

представить, как сумму двух колебаний с нулевой начальной фазой и начальной фазой, равной  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ). Эти слагаемые называют реактивной и активной составляющими поля  $\beta$ .

Гармонически меняющееся поле  $\beta(a, t)$  можно представить в более удобном (для ряда математических преобразований, в частности, при решении прямых задач), по сравнению с (6.40), виде, воспользовавшись комплексной (символической) записью.

Вспомним некоторые определения, понятия, относящиеся к комплексным числам и величинам.



**Рис. 6.8.** Комплексные величины.

Комплексное число (или величина)  $z = x + i \cdot y$ , где  $x$  и  $y$ - соответственно действительная часть ( $\text{Re}(z)$ ) и коэффициент при мнимой части ( $\text{Im}(z)$ ) числа  $z$ , а  $i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

Каждому комплексному числу  $z$  можно поставить в соответствие точку на комплексной плоскости с декартовыми осями  $X, Y$  (рис. 6.8). На оси  $X$  ( $y=0$ ) лежит множество действительных чисел, а на оси  $Y$  ( $x=0$ )- множество мнимых чисел. В частности, оси  $Y$  лежат числа  $i$  и  $-i$  (рис. 6.8). Модуль комплексного числа  $z$ :

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а аргумент комплексного числа  $z$ :  $\psi = \text{Arg}(z) = \arctg(y/x) + n\pi$ ,  $n=0, 1$  (точнее  $\psi = \text{atan2}(y, x)$ ). На рис. 6.8 видно, что  $x = |z| \cos \psi$ ,  $y = |z| \sin \psi$ , следовательно  $z = |z| (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$ .

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$\exp(\pm i\psi) = (\cos \psi \pm i \cdot \sin \psi), \quad (6.42)$$

согласно которой экспонента мнимого аргумента  $i\psi$  может быть выражена через синус и косинус действительного аргумента  $\psi$ . Пользуясь (6.42), можем представить комплексное число (или величину)  $z$  в виде:  $z = |z| \exp(i\psi)$ . При такой форме записи удобно перемножать и делить комплексные величины.

Например, пусть  $z = |z| \exp(i\psi) = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \exp(i\psi_1) \cdot |z_2| \exp(i\psi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \exp(i\psi_1) \cdot \exp(i\psi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \exp[i(\psi_1 + \psi_2)]$ , то есть модуль  $|z|$  произведения  $z$  двух комплексных величин  $z_1, z_2$  равен произведению их модулей  $|z_1| \cdot |z_2|$ , а аргумент  $\psi$  равен сумме  $\psi_1 + \psi_2$  их аргументов. В частности, принимая во внимание, что модуль мнимых чисел  $\pm i$  равен единице, а аргумент  $\text{Arg}(\pm i) = \pm \pi/2$  (см. рис. 6.8), произведение  $\pm i \cdot z = \exp(\pm i \cdot \pi/2) \cdot |z| \cdot \exp(i\psi) = |z| \cdot \exp[i(\psi \pm \pi/2)]$ . Следовательно, аргумент произведения  $\pm i \cdot z$  отличается от аргумента  $z$  на величину  $\pm \pi/2$ .

Перейдём к комплексной записи скалярного гармонически меняющегося поля  $\beta(a, t)$ . В соответствии с (6.40) и формулой Эйлера (6.42) можем представить  $\beta(a, t)$  в следующем виде:

$$\beta(a, t) = \text{Re}[\check{\beta}(a, t)], \text{ где } \check{\beta}(a, t) = \beta_0(a) \exp\{\pm i[\omega t + \varphi(a)]\}, \quad (6.43)$$

так как действительная часть  $\text{Re}\{\pm i[\omega t + \varphi(a)]\} = \cos[\omega t + \varphi(a)]$ . Далее в этой теме будем в (6.43) из знаков  $\pm$  выбирать нижний знак (минус). Какие преимущества имеет запись (6.43) гармонически меняющегося поля  $\beta(a, t)$  по сравнению с более простой и понятной записью (6.40)? Примем во внимание, что экспонента суммы равна произведению экспонент слагаемых (в этой сумме), то есть  $\exp\{-i[\omega t + \varphi(a)]\} = \exp(-i\omega t) \cdot \exp[-i\varphi(a)]$ . Поэтому второе выражение в (6.43) можем представить в следующем виде:

$$\check{\beta}(a, t) = \check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t), \text{ где } \check{\beta}_0(a) = \beta_0(a) \cdot \exp[-i\varphi(a)]. \quad (6.44)$$

Из первого выражения в (6.44) следует что при применении комплексной записи (комплексное) скалярное поле  $\check{\beta}(a, t)$  является произведением двух взаимно-независимых функций. Первая из них- *комплексная амплитуда*  $\check{\beta}_0(a)$  не зависит от времени  $t$ , а вторая- *временной фактор*  $\exp(-i\omega t)$  при фиксированной круговой частоте  $\omega$  зависит только от времени  $t$  и одинаков в любой точке пространства. Согласно второму выражению в (6.44), модуль  $|\check{\beta}_0(a)|$  комплексной амплитуды  $\check{\beta}_0(a)$  равен (действительной) амплитуде  $\beta_0(a)$  поля  $\beta(a, t)$ , а аргумент комплексной амплитуды  $\text{Arg}[\check{\beta}_0(a)] = -\varphi(a)$  равен взятой с противоположным знаком (при временном факторе  $\exp(-i\omega t)$ ) начальной фазе  $\varphi(a)$  поля  $\beta(a, t)$ . В соответствии с (6.44) и формулой Эйлера (6.42) действительная часть комплексной амплитуды  $\text{Re}(\check{\beta}_0(a)) = \beta_0(a) \cdot \cos[\varphi(a)]$ , а коэффициент при её мнимой части  $\text{Im}(\check{\beta}_0(a)) = -\beta_0(a) \cdot \sin[\varphi(a)]$  связаны с амплитудами реактивной и активной составляющих поля  $\beta$  в (6.41).

Итак, при заданных круговой частоте  $\omega$  и времени  $t$  комплексная амплитуда  $\check{\beta}_0(a)$  полностью характеризует зависимость поля  $\beta(a, t)$  (его

амплитуды, начальной фазы, реактивной и активной составляющих) от положения точки  $a$  в пространстве, см. (6.40), (6.41).

То, что при записи в (6.44) для  $\check{\beta}(a, t)$  аргументы (переменные)  $a$ ,  $t$  разделены, делает простым дифференцирование поля  $\check{\beta}(a, t)$  по времени  $t$  и по пространственным координатам. Например,

$$\frac{\partial}{\partial t} \check{\beta}(a, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)] = \check{\beta}_0(a) \frac{\partial}{\partial t} [\exp(-i\omega t)] = -i\omega \check{\beta}_0(a) [\exp(-i\omega t)] =$$

$= -i\omega \check{\beta}(a, t)$ , то есть в любой момент времени  $t$  в произвольной точке  $a$  пространства  $\frac{\partial \check{\beta}}{\partial t} = -i\omega \check{\beta}$ . Учитывая сказанное выше, это означает, что

амплитуда производной  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  поля  $\beta$  (численно) отличается от амплитуды поля

$\beta$  в  $\omega$  раз, а начальные фазы полей  $\frac{\partial \beta}{\partial t}$  и  $\beta$  отличаются на  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ).

Аналогично для пространственных производных поля  $\check{\beta}(a, t)$  можно воспользоваться тем, что временной фактор  $\exp(-i\omega t)$  не зависят от пространственных координат. То есть, например,  $\text{grad}[\check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)] = [\text{grad} \check{\beta}_0(a)] \cdot \exp(-i\omega t)$ .

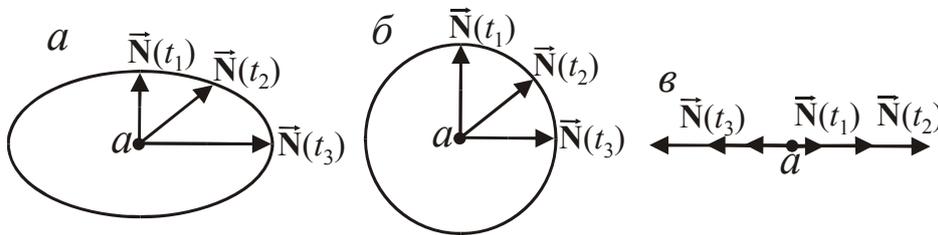
Следует заметить, что при комплексной записи (6.43), (6.44) гармонически меняющихся полей над полями можно проводить только линейные операции (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование). Такие операции выполняются отдельно над действительными и мнимыми частями комплексных величин и результаты таких операций над  $\beta(a, t)$  и  $\text{Re}[\check{\beta}(a, t)]$  будут одинаковы. Если же, например, требуется выполнить перемножение гармонически меняющихся величин, то необходимо вводить комплексно-сопряженные величины, либо применять "действительную" форму записи (6.40). Это же относится и к векторным полям, о которых сейчас пойдёт речь.

### 6.9. Гармонически меняющееся векторное поле

В соответствии с приведенным выше определением у такого поля  $\vec{N}$  скалярная компонента  $N_l$  по любому направлению  $l$  меняется со временем  $t$  по тому же закону (6.40), что и скалярное гармонически меняющееся поле  $\beta(a, t)$ . Это означает, что, например, в декартовой системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  гармонически меняющееся векторное поле  $\vec{N}$  определяет совокупность следующих равенств.

$$\left. \begin{aligned} \vec{N} &= \vec{N}_x + \vec{N}_y + \vec{N}_z = \vec{1}_x N_x + \vec{1}_y N_y + \vec{1}_z N_z, \\ N_x(a, t) &= N_{x0}(a) \cos[\omega t + \varphi_x(a)], \quad N_y(a, t) = N_{y0}(a) \cos[\omega t + \varphi_y(a)], \\ N_z(a, t) &= N_{z0}(a) \cos[\omega t + \varphi_z(a)]. \end{aligned} \right\} (6.45)$$

При этом, конечно, амплитуды  $N_{x0}$ ,  $N_{y0}$ ,  $N_{z0}$  скалярных компонент поля  $\vec{N}$  (в общем случае)- не одинаковы и не одинаковы также начальные фазы  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  этих компонент. Тогда, согласно (6.45), гармонически меняющееся векторное поле- это, в общем случае, сумма 3-х не синхронно меняющихся векторов. Можно доказать что (по крайней мере, если один из этих 3-х векторов равен нулю), гармонически меняющееся векторное поле- эллиптически поляризовано. То есть с течением времени (в данной точке пространства  $a$ ) конец вектора  $\vec{N}$  будет перемещаться по такой линии, как эллипс (рис. 6.9,а).



**Рис. 6.9.** Эллиптическая(а), круговая (б) и линейная (в) поляризация векторного гармонически меняющегося поля.

В частных случаях гармонически меняющееся векторное поле может иметь круговую поляризацию

("вращающееся поле")- рис. 6.9,б или линейную поляризацию рис. 6.9,в. Для линейной поляризации требуется, что бы в какой либо системе координат две из 3-х компонент вектора  $\vec{N}$  были равны нулю, либо чтобы начальные фазы этих 3-х компонент были одинаковы.

Если бы, например, при решении прямых задач теории гармонически меняющегося векторного поля пришлось определять его (в пространственных производных и производных по времени) при помощи выражений вида (6.45), то это было бы очень не просто. А что получится, если подобно (6.43), (6.44) применить для скалярных компонент поля  $\vec{N}$  комплексную запись? Полагая  $N_x(a, t) = \text{Re}[\tilde{N}_x(a, t)]$ ,

$$\tilde{N}_x(a, t) = \tilde{N}_{x0}(a) \cdot \exp(-i\omega t), \quad \tilde{N}_{x0}(a) = N_{x0}(a) \cdot \exp[-i\varphi_x(a)];$$

$$N_y(a, t) = \text{Re}[\tilde{N}_y(a, t)]; \quad \tilde{N}_y(a, t) = \tilde{N}_{y0}(a) \cdot \exp(-i\omega t), \dots$$

в соответствии с (6.45), получаем для вектора  $\vec{N}$  с комплексными скалярными компонентами  $\tilde{N}_x$ ,  $\tilde{N}_y$ ,  $\tilde{N}_z$  следующее выражение:  $\vec{N} = \vec{1}_x \tilde{N}_x + \vec{1}_y \tilde{N}_y + \vec{1}_z \tilde{N}_z = \vec{1}_x \tilde{N}_{x0}(a) \cdot \exp(-i\omega t) + \vec{1}_y \tilde{N}_{y0}(a) \cdot \exp(-i\omega t) + \vec{1}_z \tilde{N}_{z0}(a) \cdot \exp(-i\omega t) = [\vec{1}_x \tilde{N}_{x0}(a) + \vec{1}_y \tilde{N}_{y0}(a) + \vec{1}_z \tilde{N}_{z0}(a)] \cdot \exp(-i\omega t)$ , то есть при применении

комплексной формы записи для векторного гармонически меняющегося поля имеем:

$$\vec{\tilde{N}}(a, t) = \vec{\tilde{N}}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t), \quad (6.46)$$

где  $\vec{\tilde{N}}_0(a) = \vec{\mathbf{i}}_x \tilde{N}_{x_0}(a) + \vec{\mathbf{i}}_y \tilde{N}_{y_0}(a) + \vec{\mathbf{i}}_z \tilde{N}_{z_0}(a)$  - не зависящий от времени вектор с комплексными скалярными компонентами, являющимися комплексными амплитудами соответствующих компонент поля  $\vec{\tilde{N}}$ . Это означает, что, например,  $|\tilde{N}_{x_0}(a)| = N_{x_0}(a)$ , а  $\text{Arg}(\tilde{N}_{x_0}(a)) = -\varphi_x(a)$ .

По форме комплексная запись (6.46) гармонически меняющегося векторного поля  $\vec{\tilde{N}}$  идентична представлению в комплексной форме (6.44) скалярного поля  $\beta$ . В (6.46), как и в (6.44), поле выражено как произведение 2-х взаимно независимых функций аргументов  $a$  (пространственных координат точки наблюдения  $a$ ) и времени  $t$ . Это делает удобным дифференцирование поля  $\vec{\tilde{N}}$  по времени и по пространственным координатам.

Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\tilde{N}} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\tilde{N}}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)] = \vec{\tilde{N}}_0(a) \frac{\partial}{\partial t} [\exp(-i\omega t)] = -i\omega \vec{\tilde{N}}_0(a) [\exp(-i\omega t)] = -i\omega \vec{\tilde{N}}. \end{aligned}$$

Аналогично вторая производная по времени  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{\tilde{N}} =$

$= (-i\omega) \cdot (-i\omega) \cdot \vec{\tilde{N}} = -\omega^2 \vec{\tilde{N}}$ . Для первых пространственных производных получаем:

$$\text{rot}[\vec{\tilde{N}}(a, t)] = [\text{rot} \vec{\tilde{N}}_0(a)] \cdot \exp(-i\omega t),$$

$\text{div}[\vec{\tilde{N}}(a, t)] = [\text{div} \vec{\tilde{N}}_0(a)] \cdot \exp(-i\omega t)$ . Таким образом, временной фактор  $\exp(-i\omega t)$  является множителем как в выражениях для полей  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\tilde{N}}$ , так и в выражениях для пространственных производных или производных этих полей по времени.

Далее при рассмотрении гармонически меняющегося ЭМ поля будем, как правило, пользоваться комплексной формой записи.

### 6.10. Система уравнений гармонически меняющегося ЭМ поля

Пусть скалярные поля  $\delta^{\text{плн}}$ ,  $\delta^{\text{свб}}$ , ... и векторные поля  $\vec{\mathbf{E}}$ ,  $\vec{\mathbf{j}}$ ,  $\vec{\mathbf{H}}$ ,  $\vec{\mathbf{B}}$ ,  $\vec{\mathbf{E}}^{\text{стр}}$ , ... - гармонически меняющиеся с круговой частотой  $\omega$ , но ЭМ параметры среды  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\gamma=1/\rho$  не зависят от времени. В уравнениях Максвелла системы уравнений электродинамики (6.10). есть производные по времени:

$$\text{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \vec{\mathbf{j}} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\mu_a \frac{\partial \vec{\mathbf{H}}}{\partial t}.$$

Знаем, что, в соответствии с (6.44), (6.46), для гармонически меняющихся полей при применении комплексной записи справедливы

выражения (6.44) (6.46):  $\check{\beta}(a, t) = \check{\beta}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)$ ,  
 $\check{\mathbf{N}}(a, t) = \check{\mathbf{N}}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)$ . В частности, для напряженностей стороннего

поля  $\check{\mathbf{E}}^{\text{стр}}$ , электрического поля  $\check{\mathbf{E}}$ , магнитного поля  $\check{\mathbf{H}}$  и объемной плотности  $\check{\delta}^{\text{свб}}$  свободных электрических зарядов при применении комплексной записи справедливы выражения:

$$\left. \begin{aligned} \check{\mathbf{E}}^{\text{стр}}(a, t) &= \check{\mathbf{E}}_0^{\text{стр}}(a) \cdot \exp(-i\omega t), & \check{\mathbf{E}}(a, t) &= \check{\mathbf{E}}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t), \\ \check{\mathbf{H}}(a, t) &= \check{\mathbf{H}}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t), & \check{\delta}^{\text{свб}}(a, t) &= \check{\delta}_0^{\text{свб}}(a) \cdot \exp(-i\omega t). \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Для производных в уравнениях Максвелла получаем:  $\frac{\partial}{\partial t} \check{\mathbf{E}} = -i\omega \check{\mathbf{E}}$ ,

$\frac{\partial}{\partial t} \check{\mathbf{H}} = -i\omega \check{\mathbf{H}}$ . То есть уравнения Максвелла (в дифференциальной форме)

для гармонически меняющегося поля принимают вид:  $\text{rot } \check{\mathbf{H}} = \check{\mathbf{j}} - i\omega \epsilon_a \check{\mathbf{E}}$ ,  
 $\text{rot } \check{\mathbf{E}} = i\omega \mu_a \check{\mathbf{H}}$ . В этих уравнениях нет производных по времени  $t$ . О том, что ЭМ поле зависит от времени, в этих уравнениях свидетельствует лишь наличие в их правых частях множителя  $\omega$ - круговой частоты, пропорциональной частоте колебаний  $f = \omega / (2\pi)$ .

Таким образом, из систем уравнений (6.10), (6.11), (6.13) при применении комплексной записи (6.44), (6.46), (6.47) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \text{rot } \check{\mathbf{H}} &= \gamma \check{\mathbf{E}} - i\omega \epsilon_a \check{\mathbf{E}} + \gamma \check{\mathbf{E}}^{\text{стр}} = \gamma' \check{\mathbf{E}} + \gamma \check{\mathbf{E}}^{\text{стр}}, & \text{II. } \text{rot } \check{\mathbf{E}} &= i\omega \mu_a \check{\mathbf{H}}, \\ \text{III. } \text{div } \check{\mathbf{B}} &= \text{div}(\mu_a \check{\mathbf{H}}) = 0, & \text{IV. } \text{div } \check{\mathbf{D}} &= \text{div}(\epsilon_a \check{\mathbf{E}}) = \check{\delta}^{\text{свб}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

В I-ом уравнении системы (6.48)  $\gamma' = \gamma - i\omega \epsilon_a$  - комплексная удельная электропроводность.

Во все члены уравнений этой системы (6.48) (кроме, конечно, равной нулю правой части уравнения III) входит, как сомножитель, временной фактор  $\exp(-i\omega t)$ . Следовательно, можно, сократив этот множитель, получить для зависящего от времени  $t$  (*переменного*) гармонически меняющегося ЭМ поля систему уравнений вида (6.48), для *постоянных* комплексных величин, полностью определяющих зависимость ЭМ поля от положения точки наблюдения:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \text{rot } \check{\mathbf{H}}_0 &= (\gamma - i\omega \epsilon_a) \check{\mathbf{E}}_0 + \gamma \check{\mathbf{E}}_0^{\text{стр}}, & \text{II. } \text{rot } \check{\mathbf{E}}_0 &= i\omega \mu_a \check{\mathbf{H}}_0, \\ \text{III. } \text{div } \check{\mathbf{B}}_0 &= \text{div}(\mu_a \check{\mathbf{H}}_0) = 0, & \text{IV. } \text{div } \check{\mathbf{D}}_0 &= \text{div}(\epsilon_a \check{\mathbf{E}}_0) = \check{\delta}_0^{\text{свб}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.48, a)$$

Фактически то, что "пространственное распределение" гармонически меняющихся полей можно описать при помощи не зависящих от времени комплексных величин является основным преимуществом (удобством) при применении комплексной записи.

Из (6.48), (6.8) следует, что в тех областях пространства, где  $\check{\mathbf{E}}^{\text{стр}} = 0$ , для гармонически меняющегося ЭМ поля плотность электрических токов

(проводимости)  $\vec{j}$  и плотность токов смещения  $\vec{j}^{\text{CM}}$  - двух возбудителей вихревой составляющей магнитного поля  $\vec{H}$  определяют выражения:  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ,  $\vec{j}^{\text{CM}} = -i\omega \epsilon_a \vec{E}$ . Следовательно, скалярные компоненты векторов  $\vec{j}$ ,  $\vec{j}^{\text{CM}}$  по любому направлению (линии)  $l$  в "комплексной" форме определяют выражения:  $\check{j}_l = \gamma \cdot \check{E}_l$ ,  $\check{j}_l^{\text{CM}} = -i\omega \epsilon_a \cdot \check{E}_l$ . Примем во внимание, что в "действительной" форме, согласно (6.43), скалярная компонента гармонически меняющегося поля  $\beta(a, t) = \text{Re}[\check{\beta}(a, t)]$ ,  $\check{\beta}(a, t) = \beta_0(a) \exp\{-i[\omega t + \varphi(a)]\}$ .

Так как,  $-i \cdot \check{E}_l = -\exp(-i \cdot \pi/2) \cdot E_{l0} \cdot \exp[-i(\omega t + \varphi_{E_l})] = E_{l0} \cdot \exp[-i(\omega t + \varphi_{E_l} + \pi/2)]$ , то,  $j_l^{\text{CM}} = \omega \epsilon_a \cdot E_{l0} \cdot \text{Re}\{\exp[-i \cdot (\omega t + \varphi_{E_l} + \pi/2)]\}$ .

В соответствии с формулой Эйлера (6.42), согласно которой  $\text{Re}[\exp(\pm i\psi)] = \cos \psi$ , для действительных величин компонент  $E_l$ ,  $j_l$ ,  $j_l^{\text{CM}}$  получаем:  $E_l = E_{l0} \cdot \text{Re}\{\exp[-i \cdot (\omega t + \varphi_{E_l})]\} = E_{l0} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{E_l})$ ,

$$j_l = \gamma \cdot E_l = \gamma \cdot E_{l0} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{E_l}),$$

$j_l^{\text{CM}} = \omega \epsilon_a E_{l0} \cdot \cos(\omega t + \varphi_{E_l} + \pi/2) = -\omega \epsilon_a E_{l0} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{E_l})$ . То есть компонента  $j_l$  плотности тока проводимости меняется со временем синхронно с  $E_l$ , а компонента  $j_l^{\text{CM}}$  опережает  $E_l$  по фазе на  $\pi/2$  (рис. 6.10).

Из приведенных выше выражений следует, что амплитуда компоненты  $j_l$ :  $j_{l0} = \gamma \cdot E_{l0}$ , а амплитуда компоненты  $j_l^{\text{CM}}$ :  $j_{l0}^{\text{CM}} = \omega \epsilon_a \cdot E_{l0}$ . Следовательно, отношение амплитуд

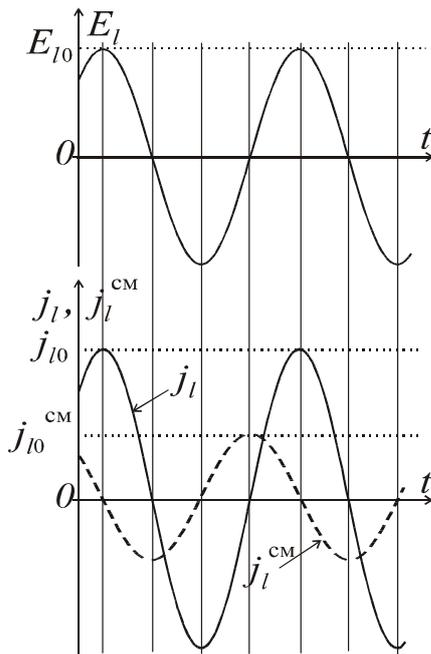
$$\alpha = \frac{j_{l0}^{\text{CM}}}{j_{l0}} = \frac{\omega \epsilon_a}{\gamma} = \omega \epsilon_a \rho = 2\pi f \epsilon_0 \epsilon_r = \omega \tau, \quad (6.49)$$

где, в соответствии с (6.32),  $\epsilon_a \rho = \epsilon_0 \epsilon_r = \tau$  - время релаксации. Отношение

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{j_{l0}}{j_{l0}^{\text{CM}}} = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} = \text{tg} \Delta \text{ называют тангенсом угла потерь } \Delta.$$

Случай, когда  $\alpha = (j_{l0}^{\text{CM}}/j_{l0}) \ll 1$ , то есть  $j_{l0}^{\text{CM}} \ll j_{l0}$  соответствует квазистационарному гармонически меняющемуся ЭМ полю (см. раздел 6.7). В изоляторе ( $\gamma=0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ ) имеем:  $j_{l0}=0$  и  $\alpha \rightarrow \infty$ . Если же в проводящей среде при данной частоте  $f$  имеем:  $\alpha = (j_{l0}^{\text{CM}}/j_{l0}) \gg 1$ , то есть  $j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}$ , то при этом условии среду иногда называют несовершенным диэлектриком.

Оценим, при каких частотах  $f$  в "умеренно-проводящей" среде токи смещения соизмеримы с токами проводимости. Из (6.49) следует, что



**Рис. 6.10.** Зависимость от времени  $t$  компонент

$E_l$ ,  $j_l$  и  $j_l^{cm}$  по (произвольному) направлению  $l$ .

$f = \frac{\alpha}{2\pi\epsilon_0\epsilon\rho}$ . Пусть  $j_{l0}^{cm} = j_{l0}$ , то есть  $\alpha=1$ ,

$\rho=100$  Ом·м,  $\epsilon=10$ . Тогда

$$f \approx \frac{1 \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 100} = 18 \cdot 10^6 \text{ Гц} = 18 \text{ МГц.}$$

Сделанная оценка показывает, что в "умеренно-проводящих" средах, какими являются многие горные породы, (зависящие от диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ ) токи смещения могут оказывать значительное (по сравнению с токами проводимости) влияние на гармонически меняющееся ЭМ поле при очень высоких частотах  $f$ . При невысоких частотах  $f$  в таких средах  $\alpha = (j_{l0}^{cm}/j_{l0}) \ll 1$  и ЭМ поле является квазистационарным.

### 6.11. Уравнение Гельмгольца. Волновое число

Получим уравнения, которым удовлетворяют векторы напряжённостей электрического ( $\vec{E}$ ) и магнитного ( $\vec{H}$ ) гармонически меняющегося поля в однородной среде ( $\nabla\gamma = 0, \nabla\epsilon = 0, \nabla\mu = 0$ ) в

отсутствии стороннего поля ( $\vec{E}^{стп} = 0$ ). При этих условиях и произвольной зависимости от времени для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  были получены телеграфные уравнения (6.35,а, 6.35,б):

$$\nabla^2 \vec{E} = \gamma\mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_a\mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{H} = \gamma\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \epsilon_a\mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

В соответствии с (6.47) при применении для гармонически меняющегося ЭМ поля комплексной записи имеем:  $\vec{E}(a,t) = \vec{E}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)$ ,  $\vec{H}(a,t) = \vec{H}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t)$  и тогда, например, производные по времени в телеграфном уравнении для вектора  $\vec{E}$ :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0(a) \cdot \exp(-i\omega t) = -i\omega \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (-i\omega)(-i\omega)\vec{E} = -\omega^2 \vec{E}.$$

Тогда из уравнения  $\nabla^2 \vec{E} = \gamma\mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_a\mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$  получаем:

$$\nabla^2 \vec{E} = -i\omega\gamma\mu_a \vec{E} - \omega^2\epsilon_a\mu_a \vec{E} \text{ или } \nabla^2 \vec{E} + (\omega^2\epsilon_a\mu_a + i\omega\gamma\mu_a)\vec{E} = 0. \text{ Обозначая } k^2 = \omega^2\epsilon_a\mu_a + i\omega\gamma\mu_a = i\omega\mu_a(\gamma - i\omega\epsilon_a) = i\omega\mu_a\gamma', \quad (6.50)$$

где, в соответствии с (6.48),  $\gamma' = \gamma - i\omega\epsilon_a$  - комплексная удельная электропроводность, получаем для гармонически меняющегося поля  $\vec{E}$  в однородной среде уравнение:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0. \quad (6.51, a)$$

Аналогичным образом для гармонически меняющегося поля  $\vec{H}$  получаем:

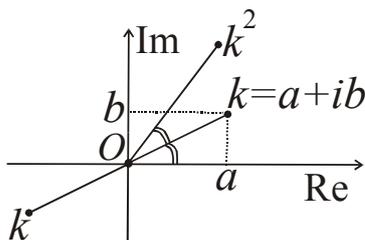
$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \quad (6.51, б)$$

Уравнения вида (6.51,а, 6.51,б) называют (однородным) *уравнением Гельмгольца*. Зависящий от частоты  $f = \omega/(2\pi)$  и электромагнитных параметров среды  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  множитель  $k^2$  в этих уравнениях - квадрат комплексного *волнового числа*  $k = \sqrt{k^2}$ .

Согласно (6.50, 6.51,а, 6.51,б), в однородной среде при  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$  влияние частоты  $f$  и электромагнитных параметров среды  $\gamma$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$  на гармонически меняющееся ЭМ поле полностью определяет волновое число  $k$ . Обозначим комплексную (в общем случае) величину

$$k = a + ib, \quad (6.52)$$

где  $\text{Re}(k) = a$  - действительная часть волнового числа  $k$ , а  $\text{Im}(k) = b$  - коэффициент при мнимой части  $k$ . Величину  $a$  называют фазовой постоянной (коэффициентом фазы), а  $b$  - коэффициентом затухания (поглощения). Причину этого выясним при рассмотрении следующего вопроса.



**Рис. 6.11.** Волновое число  $k$ .

Так как  $k = \sqrt{k^2}$ , а квадратный корень  $\sqrt{k^2}$  имеет два значения, следует определить то, какое из этих двух значений мы выберем. Согласно (6.50),  $k^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a + i\omega \gamma \mu_a$ , то есть при  $\omega > 0$  действительная часть  $\text{Re}(k^2) = \omega^2 \epsilon_a \mu_a > 0$ , а

коэффициент при мнимой части  $k^2$ :  $\text{Im}(k^2) = \omega \gamma \mu_a \geq 0$ . Следовательно, число  $k^2$  лежит в первом квадранте комплексной плоскости (рис. 6.11). При  $k = \sqrt{k^2}$  для модуля и аргумента  $k$  справедливы равенства:  $|k| = \sqrt{|k^2|}$ ,

$\text{Arg}(k) = \frac{\text{Arg}(k^2)}{2} + n\pi$ , где  $n=0$  или  $n=1$ . Два значения  $k = \sqrt{k^2}$  (их

возможное положение на комплексной плоскости) показаны на рис. 6.11. Условимся выбирать то значение  $k$ , которое находится в первом квадранте комплексной плоскости. При этом действительная часть  $k$ :  $a > 0$ , а коэффициент при мнимой части  $k$ :  $b \geq 0$ .

Из (6.52) следует, что  $k^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot ib + (ib)^2$ , то есть  $k^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$ . Сравнивая это равенство с выражением (6.50) для  $k^2$  и принимая во внимание, что для равенства двух комплексных величин необходимо, чтобы были одинаковы их действительные части и одинаковы их

мнимые части, получаем систему двух уравнений: 
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \\ 2ab = \omega \gamma \mu_a \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений для  $a$  и  $b$ :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \alpha^2} + \alpha} = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} + 1}, \\ b &= \sqrt{\frac{\omega \gamma \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \alpha^2} - \alpha} = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} - 1}, \end{aligned} \quad (6.53)$$

где, в соответствии с (6.49),  $\alpha = \frac{j_{l0}^{cm}}{j_{l0}} = \frac{\omega \varepsilon_a}{\gamma} = \omega \varepsilon_a \rho$ .

Итак, в однородной среде векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  гармонически меняющегося ЭМ поля (при применении комплексной записи) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца 6.51,а, 6.51,б. Величину  $k^2$  в этих уравнениях и волновое число  $k = \sqrt{k^2}$  определяют выражения (6.50), (6.52), (6.53).

Рассмотрим теперь то, как зависят  $k^2$ , действительная часть  $a$  и коэффициент  $b$  при мнимой части волнового числа  $k$  от частоты и ЭМ параметров среды в трёх частных случаях.

1). Изолятор ( $\gamma=0$ ). Согласно (6.50), при  $\gamma=0$   $k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a$  - действительная величина, и волновое число  $k = \sqrt{k^2} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  - также действительная величина. То есть в изоляторе,

$$\text{при } \gamma = 0: k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a, \quad k = a = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad b = 0. \quad (6.54, a)$$

В изоляторе  $k$ - действительная величина, пропорциональная частоте и  $\sqrt{\varepsilon \mu}$ .

2). "Несовершенный диэлектрик" ( $j_{l0}^{cm} \gg j_{l0}$ ,  $\alpha \gg 1$ ). В этом случае

$(1/\alpha) \ll 1$ ,  $\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} + 1} \approx \sqrt{2}$  и, согласно 2-му выражению для  $a$  в (6.53),

$a \approx \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ . Чтобы упростить выражение (6.53) для  $b$  воспользуемся

степенным рядом:  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$ . При  $|x| \ll 1$  имеем:

$(1+x)^n \approx 1 + nx$ , в частности,  $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1 + x/2$ . Следовательно,

при  $(1/\alpha) \ll 1$   $\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} - 1} \approx \sqrt{1 + \frac{1}{2\alpha^2}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \alpha} = \frac{\gamma}{\sqrt{2} \cdot \omega \varepsilon_a}$ . Из 2-

го выражения (6.53) для  $b$  получаем:  $b = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_a \mu_a}{2}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{2} \cdot \omega \varepsilon_a} = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} =$

$\frac{1}{2\rho} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ . Отсюда следует, в частности, что при  $j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}$  коэффициент  $b$  при мнимой части волнового числа не зависит от частоты. Итак,

$$\text{при } j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}: \quad a \approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad b \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{1}{2\rho} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (6.54, \text{б})$$

3). Квазистационарное гармонически меняющееся поле ( $j_{l0}^{\text{CM}} \ll j_{l0}$ ,  $\alpha \ll 1$ ). В этом случае из (6.50) получаем:  $k^2 \approx i\omega\gamma\mu_a$ . В первых выражениях

$$(6.53) \text{ для } a \text{ и } b \quad \sqrt{\sqrt{1+\alpha^2} \pm \alpha} \approx 1 \text{ и, следовательно, } a \approx b \approx \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}.$$

Конечно, в случае квазистационарного ЭМ поля волновое число  $k$  не зависит от диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ . Итак,

$$\text{при } j_{l0}^{\text{CM}} \ll j_{l0}: \quad k^2 \approx i\omega\gamma\mu_a, \quad a \approx b \approx \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}. \quad (6.54, \text{в})$$

### 6.12. Плоская гармоническая ЭМ волна, её характеристики

Подобно тому, как уже поступали в разделах 6.5, 6.7, обозначим  $\tilde{\eta}$  любую скалярную компоненту векторов  $\vec{\tilde{E}}$ ,  $\vec{\tilde{H}}$  гармонически меняющегося ЭМ поля. То есть  $\tilde{\eta} = \tilde{E}_x, \tilde{H}_y, \dots$ . Согласно (6.51,а), (6.51,б) компонента  $\tilde{\eta}$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца  $\nabla^2 \tilde{\eta} + k^2 \tilde{\eta} = 0$  или (в декартовых

координатах)  $\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial z^2} + k^2 \tilde{\eta} = 0$ . Пусть любая компонента  $\eta$

(помимо времени  $t$ ) зависит лишь от одной декартовой координаты  $z$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0, \quad \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(z, t) = \tilde{\eta}_0(z) \exp(-i\omega t) \quad \text{и компонента } \tilde{\eta}$$

удовлетворяет уравнению  $\frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial z^2} + k^2 \tilde{\eta} = 0$ .

Примем во внимание, что при применении комплексной записи (6.44), (6.46) для скалярных и векторных гармонически меняющихся полей компонента  $\tilde{\eta}(z, t) = \tilde{\eta}_0(z) \exp(-i\omega t)$ . Временной фактор  $\exp(-i\omega t)$  входит, как множитель в оба члена предыдущего уравнения для  $\tilde{\eta}$ . Сократив его, получаем для комплексной амплитуды  $\tilde{\eta}_0$  компоненты  $\tilde{\eta}$  обыкновенное

дифференциальное уравнение 2-го порядка:  $\frac{d^2 \tilde{\eta}_0}{dz^2} + k^2 \tilde{\eta}_0 = 0$ . Его решениями

являются экспоненты  $\exp(\pm ikz)$ . Точнее, это решение можем представить в виде:  $\tilde{\eta}_0(z) = \tilde{\eta}_0(0) \exp(\pm ikz)$ , где  $\tilde{\eta}_0(0)$  - комплексная амплитуда компоненты  $\tilde{\eta}$  в плоскости  $z=0$ . Выберем одно из 2-х решений:

$\check{\eta}_0(z) = \check{\eta}_0(0) \exp(ikz)$  и умножим левую и правую части этого равенства на временной фактор  $\exp(-i\omega t)$ . Так как  $\check{\eta}_0(z) \exp(-i\omega t) = \check{\eta}(z, t)$ , то  $\check{\eta}(z, t) = \check{\eta}_0(0) \exp(ikz) \exp(-i\omega t) = \check{\eta}_0(0) \exp[-i(\omega t - kz)]$ .

Согласно (6.52) и второму равенству в (6.44),  $k = a + ib$ , а комплексная амплитуда  $\check{\eta}_0(0) = \eta_0(0) \cdot \exp[-i\varphi(0)]$ , где  $\eta_0(0)$  и  $\varphi(0)$  - амплитуда и начальная фаза компоненты  $\eta$  в плоскости  $z=0$ . Следовательно,  $\check{\eta}(z, t) = \eta_0(0) \cdot \exp[-i\varphi(0)] \exp\{-i[\omega t - (a + ib)z]\}$  или (так как  $i \cdot i = -1$ )  $\check{\eta}(z, t) = \{\eta_0(0) \exp(-bz)\} \exp[-i(\omega t - az + \varphi(0))]$ .

Перейдём, в соответствии с первым выражением в (6.43) и формулой Эйлера (6.42), к действительной величине  $\eta(z, t)$ . Так как  $\text{Re}[\exp(-i\psi)] = \cos(\psi)$ , то

$$\eta(z, t) = \{\eta_0(0) \exp(-bz)\} \cos[\omega t - az + \varphi(0)]. \quad (6.55)$$

Вместе с тем, согласно (6.40) ( $\beta(a, t) = \beta_0(a) \cos[\omega t + \varphi(a)]$ ), для скалярной компоненты  $\eta(z, t)$  гармонически меняющегося поля справедливо выражение:

$$\eta(z, t) = \eta_0(z) \cos[\omega t + \varphi(z)], \quad (6.55, a)$$

где  $\eta_0(z)$  и  $\varphi(z)$  - соответственно амплитуда и начальная фаза компоненты  $\eta(z, t)$  в произвольной плоскости  $z=\text{const}$ . При сравнении выражений (6.55), (6.55,a) видим, что

$$\eta_0(z) = \eta_0(0) \exp(-bz), \quad \varphi(z) = \varphi(0) - az \quad (6.56)$$

или

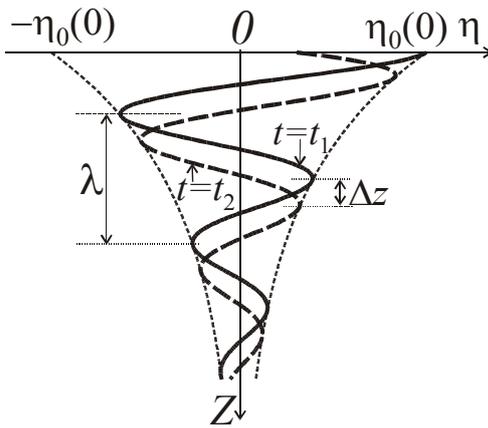
$$\frac{\eta_0(z)}{\eta_0(0)} = \exp(-bz), \quad \varphi(0) - \varphi(z) = az. \quad (6.56, a)$$

Согласно (6.55), при заданных значениях  $\omega$ ,  $a$ ,  $b$  компонента  $\eta$  зависит от двух аргументов:  $z$  и  $t$ . Можем зафиксировать значение одного из этих аргументов и рассматривать зависимость  $\eta$  от другого аргумента. Полагая  $z=\text{const}$ , получим зависимость  $\eta(t)$  того же вида, которая показана графиком колебаний на рис. 6.7. Амплитуду и начальную фазу компоненты  $\eta$  определяют выражения (6.56). Если, наоборот, выбрать  $t=\text{const}$ , то получим зависимость  $\eta(z)$  в фиксированный момент времени.

На рис. 6.12 показаны зависимости  $\eta(z)$  при  $t = t_1$  и  $t = t_2 = t_1 + \Delta t$ , где  $\Delta t > 0$  - малый промежуток времени. Видим, что выражение (6.54) описывает распространение (со временем) плоской гармонической ЭМ волны по направлению оси  $Z$ . При  $b > 0$  распространение сопровождается затуханием.

Заметим, что если бы в решении уравнения  $\frac{d^2 \check{\eta}_0}{dz^2} + k^2 \check{\eta}_0 = 0$  мы выбрали не

$\check{\eta}_0(z) = \check{\eta}_0(0) \exp(ikz)$ , а функцию  $\check{\eta}_0(z) = \check{\eta}_0(0) \exp(-ikz)$  то эта функция описывала бы распространение плоской гармонической волны в направлении уменьшения координаты  $z$ .



**Рис. 6.12.** Зависимости от координаты  $z$  декартовой компоненты  $\eta = E_x, H_y, \dots$  для плоской гармонической волны, распространяющейся по направлению оси  $Z$ .

Из равенств (6.56), (6.56,а) видно, что от величины  $a = \text{Re}(k)$  зависит то, насколько "резко" меняется (в фиксированный момент времени) фаза колебания по направлению распространения волны. Поэтому действительную часть  $a$  волнового числа  $k$  называют *фазовой постоянной* (коэффициентом фазы). От  $b = \text{Im}(k)$  зависит то, как убывает амплитуда колебаний по направлению распространения волны. Поэтому коэффициент  $b$  при мнимой части волнового числа  $k$  называют *коэффициентом затухания* (коэффициентом поглощения).

Как видно на рис. 6.12, за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  все максимумы и минимумы функции  $\eta(z)$  перемещаются по направлению оси  $Z$  на расстояние  $\Delta z = z_2 - z_1$ . Отношение  $\Delta z / \Delta t$  называют *фазовой скоростью*  $v_{\text{фаз}}$ . Определим, от чего она зависит. Понятно, что функция  $\eta(z)$  будет иметь максимум, если, например, аргумент косинуса в (6.54) равен нулю:  $\omega t - az + \varphi(0) = 0$ . Это справедливо как при  $t = t_1, z = z_1$ , так и при  $t = t_2 = t_1 + \Delta t, z = z_2 = z_1 + \Delta z$ , то есть если  $\omega t_1 - az_1 + \varphi(0) = 0$ , то  $\omega t_2 - az_2 + \varphi(0) = 0$ . Отсюда следует, что  $\omega t_2 - az_2 = \omega t_1 - az_1$  или  $a(z_2 - z_1) = \omega(t_2 - t_1)$ ,  $a\Delta z = \omega\Delta t$ . Следовательно, фазовая скорость

$$v_{\text{фаз}} = \Delta z / \Delta t = \omega / a. \quad (6.57)$$

Определим ещё некоторые характеристики плоской гармонической ЭМ волны.

На рис. 6.12 показана *длина волны*  $\lambda$ . Это то расстояние (по направлению распространения волны, в фиксированный момент времени), на котором фазы колебаний отличаются на  $2\pi$  радиан ( $360^\circ$ ). Примем во внимание, что, согласно второму выражению в (6.56,а), при  $z = \lambda$   $\varphi(0) - \varphi(\lambda) = a\lambda = 2\pi$ . Отсюда следует, что

$$\lambda = (2\pi) / a, \quad (6.58)$$

то есть длина волны  $\lambda$  обратно пропорциональна фазовой постоянной  $a$ . Чем больше  $a$ , тем короче длина волны  $\lambda$ .

За *глубину проникновения*  $\delta$  гармонической ЭМ волны условно принято то расстояние (по направлению распространения волны), на котором амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2.718$  раз. В соответствии с этим определением и первым равенством в (6.56,а), при  $z = \delta$  отношение

$\frac{\eta_0(\delta)}{\eta_0(0)} = \exp(-b \cdot \delta) = \exp(-1)$ . Следовательно, произведение  $b \cdot \delta = 1$  и для плоской гармонической ЭМ волны

$$\delta = 1 / b. \quad (6.59)$$

То есть глубина проникновения  $\delta$  обратно пропорциональна коэффициенту затухания  $b$ . Чем больше  $b$ , тем меньше глубина проникновения  $\delta$ .

Получим выражения для величин  $v_{\text{фаз}}$ ,  $\lambda$  и  $\delta$  в 3-х частных случаях.

1). Изолятор ( $\gamma=0$ ). В этом случае, согласно (6.54,a),  $k = a = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ ,  $b = 0$  и из (6.57), (6.58), (6.59) следует, что: при  $\gamma = 0$ :

$$v_{\text{фаз}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = v, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{v}{f}, \quad \delta \rightarrow \infty. \quad (6.60, a)$$

Здесь, в соответствии с (6.21),  $v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$  - скорость распространения ЭМ поля в изоляторе,  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  - электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме,  $f = \omega / (2\pi)$  - частота колебаний (в Гц). То есть в изоляторе скорости  $v_{\text{фаз}}$  и  $v$  - одинаковы, длина волны  $\lambda$  обратно пропорциональна  $f$  и  $\sqrt{\epsilon \mu}$ , а глубина проникновения  $\delta$  - бесконечно велика (рис. 6.13,a). Не случайно до Земли из удалённых галактик доходят ЭМ сигналы, так как межзвёздное пространство - практически изолятор.

2). "Несовершенный диэлектрик" ( $j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}$ ,  $\alpha \gg 1$ ). Для этого случая величины  $a$  и  $b$  определяют приближённые выражения (6.54,b):  $a \approx \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ ,  $b \approx \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{1}{2\rho} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ . В соответствии с (6.57), (6.58), (6.59) получаем:

при  $j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}$ :

$$v_{\text{фаз}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = v, \quad \lambda \approx \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{v}{f}, \quad \delta \approx \frac{2}{\gamma} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} = 2\rho \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}}. \quad (6.60, б)$$

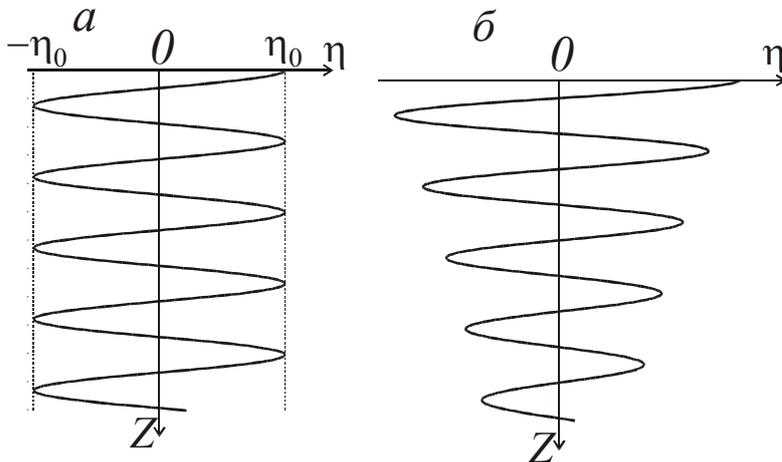
Согласно (6.60,б), для характеристик  $v_{\text{фаз}}$  и  $\lambda$  плоской гармонической ЭМ волны при  $j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}$  (приближённо) справедливы выражения (6.60,a) для изолятора, но величина  $\delta$  ограничена. Из выражения для  $\delta$  в (6.60,б) следует, что в несовершенном диэлектрике глубина проникновения  $\delta$  зависит, в основном, от удельного электрического сопротивления  $\rho$  среды ( $\delta$  пропорциональна  $\rho$ ) и не зависит от частоты  $f = \omega / (2\pi)$ .

Оценим отношение  $\delta$  к  $\lambda$ :  $\frac{\delta}{\lambda} \approx \frac{2}{\gamma} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \cdot \frac{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega \epsilon_a}{\gamma} = \frac{\alpha}{\pi} \gg 1$  при

$\alpha \gg 1$ . То есть при тех частотах и электрических параметрах среды, когда

последняя является несовершенным диэлектриком, расстояние  $\delta$ , на котором амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз- много больше, чем длина волны  $\lambda$  (рис. 6.13,б).

3). Квазистационарное гармонически меняющееся поле ( $j_{10}^{cm} \ll j_{10}$ ,  $\alpha \ll 1$ ). При этих условиях получили выражение (6.54,в):  $a \approx b \approx \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}}$ .



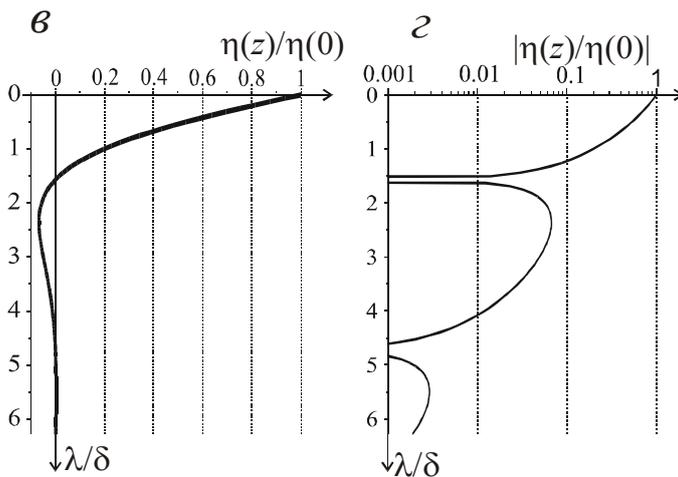
Тогда, согласно (6.57), (6.59), (6.58),

при  $j_{10}^{cm} \ll j_{10}$  :

$$v_{\text{фаз}} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu_a}} = \sqrt{\frac{2\omega\rho}{\mu_a}}$$

$$\delta \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_a}} = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_a}}$$

$$\lambda \approx 2\pi \cdot \delta. \quad (6.60, в)$$



**Рис. 6.13.** Зависимости от координаты  $z$  (при  $t=\text{const}$ ) декартовой компоненты  $\eta$ . ( $E_x, H_y, \dots$ ) для плоской гармонической волны, распространяющейся по направлению оси  $Z$ , в изоляторе (а), в несовершенном диэлектрике (б), в случае квазистационарного ЭМ поля (в, г).

Отсюда следует, что скорость  $v_{\text{фаз}}$

квазистационарного гармонически меняющегося ЭМ поля зависит от частоты  $f = \omega/(2\pi)$ .

Такое явление называют "частотная дисперсия".

Глубина проникновения  $\delta$  растёт с увеличением  $\rho$  и с понижением частоты. На том, что глубина проникновения квазистационарного ЭМ поля зависит от частоты основаны ЭМ методы

электроразведки, которые называют "частотные зондирования".

Ясно, что при  $a \approx b$  имеем  $\lambda \approx 2\pi \cdot \delta$ . Это означает, что на интервале, равном длине  $\lambda$  плоской волны, "укладывается"  $2\pi$  глубин проникновения  $\delta$ , то есть на этом интервале (даже для не имеющей "геометрического расхождения" плоской волны) амплитуда колебаний уменьшается в  $\exp(2\pi) \approx 535$  раз. На рис. 6.13,в показан пример зависимости  $\eta = E_x, H_y, \dots$  от отношения  $(\lambda/\delta)$  при  $t=\text{const}$  для случая квазистационарного поля. На рис.

6.13,2 показана аналогичная зависимость для абсолютной величины  $|\eta|$  при логарифмическом горизонтальном масштабе.

### 6.13. Поперечность ЭМ волны. Импеданс

В предыдущем вопросе полагали, что  $\check{\eta} = \check{E}_x, \check{H}_y, \dots$ ,  $\check{\eta} = \check{\eta}(z, t) = \check{\eta}_0(z) \exp(-i\omega t)$ . При этих условиях из уравнения Гельмгольца

(6.51) получили уравнение:  $\frac{\partial^2 \check{\eta}}{\partial z^2} + k^2 \check{\eta} = 0$ , решения которого можно

представить в виде

$$\check{\eta}(z, t) = \check{\eta}(0, t) \exp(\pm ikz). \quad (6.61)$$

Верхнему (+) и нижнему (-) знакам в аргументе экспоненты отвечают плоские гармонические ЭМ волны, распространяющаяся, соответственно, по направлению оси  $Z$  (по направлению орта  $\vec{1}_z$ ) и в противоположном этой оси направлении  $-\vec{1}_z$ .

Но, если всё это справедливо для любой декартовой компоненты  $\check{E}_x, \check{H}_y, \dots$  векторов  $\check{\vec{E}}, \check{\vec{H}}$  то, в соответствии с (6.46), эти векторы можем представить в виде:

$$\check{\vec{E}}(z, t) = \check{\vec{E}}_0(z) \exp(-i\omega t), \quad \check{\vec{H}}(z, t) = \check{\vec{H}}_0(z) \exp(-i\omega t). \quad (6.62)$$

Удовлетворяющему этим выражениям ЭМ полю соответствуют две плоские гармонические волны, распространяющиеся в направлениях  $\pm \vec{1}_z$ .

При  $\check{\vec{E}}^{\text{стр}} = 0$  уравнения Максвелла (6.48) для гармонически меняющегося ЭМ поля: I.  $\text{rot } \check{\vec{H}} = (\gamma - i\omega\epsilon_a) \check{\vec{E}}$ , II.  $\text{rot } \check{\vec{E}} = i\omega\mu_a \check{\vec{H}}$ . Упростим запись этих уравнений для случая, когда справедливы выражения (6.62). Мы знаем, что, согласно (1.9,a),  $\text{rot } \check{\vec{H}} = [\nabla \check{\vec{H}}]$ . В этом векторном произведении оператор набла в декартовой системе координат определяет выражение:  $\nabla = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}$ . При условиях (6.62) производные

декартовых компонент  $\check{\vec{H}}$  по  $x$  и по  $y$  равны нулю, поэтому  $\text{rot } \check{\vec{H}} = \left[ \vec{1}_z \frac{\partial \check{\vec{H}}}{\partial z} \right]$

и аналогично  $\text{rot } \check{\vec{E}} = \left[ \vec{1}_z \frac{\partial \check{\vec{E}}}{\partial z} \right]$ . Следовательно, для удовлетворяющего

условиям (6.62) ЭМ поля из уравнений (6.48) при  $\check{\vec{E}}^{\text{стр}} = 0$  получаем:

$$\text{I. } \left[ \vec{1}_z \frac{\partial \check{\vec{H}}}{\partial z} \right] = (\gamma - i\omega\epsilon_a) \check{\vec{E}}, \quad \text{II. } \left[ \vec{1}_z \frac{\partial \check{\vec{E}}}{\partial z} \right] = i\omega\mu_a \check{\vec{H}}. \quad (6.63)$$

Знаем, что результат векторного произведения это- вектор, ортогональный перемножаемым векторам. Поэтому из уравнения I в (6.63)

следует, что  $(\gamma - i\omega\epsilon_a)\vec{\vec{E}} \perp \vec{\vec{1}}_z$  и, следовательно,  $\vec{\vec{E}} \perp \vec{\vec{1}}_z$ ,  $\vec{\vec{E}}_z = 0$ . Аналогично из уравнения II в (6.63) следует, что  $i\omega\mu_a\vec{\vec{H}} \perp \vec{\vec{1}}_z$ , то есть  $\vec{\vec{H}} \perp \vec{\vec{1}}_z$ ,  $\vec{\vec{H}}_z = 0$ . Но мы рассматриваем случай, когда ЭМ волны распространяются в направлениях  $\pm\vec{\vec{1}}_z$ . Векторы  $\vec{\vec{E}}$  и  $\vec{\vec{H}}$  ортогональны этим направлениям. Следовательно ЭМ волна- волна *поперечная*.

Допустим теперь, что удовлетворяющее условию (6.62) поле  $\vec{\vec{E}}$ - линейно поляризовано (см. рис. 6.9,в) и направим оси  $X, Y$  декартовых координат так, чтобы  $\vec{\vec{E}}_y = 0$ ,  $\vec{\vec{E}} = \vec{\vec{1}}_x \vec{\vec{E}}_x$ . Для скалярной компоненты  $\vec{\vec{E}}_x$  справедливо выражение (6.61), то есть  $\vec{\vec{E}} = \vec{\vec{1}}_x \vec{\vec{E}}_x(0, t) \exp(\pm ikz)$  Подставляя это выражение для  $\vec{\vec{E}}$  во второе уравнение в (6.63), получаем:  $[\vec{\vec{1}}_z \vec{\vec{1}}_x] \frac{\partial \vec{\vec{E}}_x}{\partial z} = i\omega\mu_a \vec{\vec{H}}$ .

Согласно (6.61),  $\frac{\partial \vec{\vec{E}}_x}{\partial z} = \pm ik \vec{\vec{E}}_x$  а так как  $[\vec{\vec{1}}_z \vec{\vec{1}}_x] = \vec{\vec{1}}_y$  то (при указанных выше условиях) из второго уравнения в (6.63) следует, что  $\pm ik \vec{\vec{E}}_x \vec{\vec{1}}_y = i\omega\mu_a \vec{\vec{H}}$ ,  $\vec{\vec{H}} = \vec{\vec{1}}_y \frac{\pm k}{\omega\mu_a} \vec{\vec{E}}_x = \vec{\vec{1}}_y \vec{\vec{H}}_y$ , где  $\vec{\vec{H}}_y = \frac{\pm k}{\omega\mu_a} \vec{\vec{E}}_x$ . То есть при линейной поляризации поля  $\vec{\vec{E}}$  плоских гармонических ЭМ волн поле  $\vec{\vec{H}}$  также поляризовано линейно; векторы  $\vec{\vec{E}}$ ,  $\vec{\vec{H}}$  взаимно перпендикулярны и ортогональны направлениям  $\pm\vec{\vec{1}}_z$  распространения таких волн.

Ограничимся далее верхними знаками (+) в полученных выражениях (плоская волна, распространяющаяся в направлении  $\vec{\vec{1}}_z$ ) и (сокращая временной фактор  $\exp(-i\omega t)$ ) перейдём к выражениям для комплексных амплитуд  $\vec{\vec{E}}_{x0}$ ,  $\vec{\vec{H}}_{y0}$ . Тогда, в соответствии с выражением (6.50) для  $k^2$

$$\vec{\vec{H}}_{y0} = \frac{k}{\omega\mu_a} \vec{\vec{E}}_{x0} = \frac{1}{Z} \vec{\vec{E}}_{x0}, \quad Z = \frac{\vec{\vec{E}}_{x0}}{\vec{\vec{H}}_{y0}} = \frac{\omega\mu_a}{k} = \frac{\omega\mu_a}{\sqrt{i\omega\mu_a(\gamma - i\omega\epsilon_a)}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\omega\epsilon_a + i\gamma}}. \quad (6.64)$$

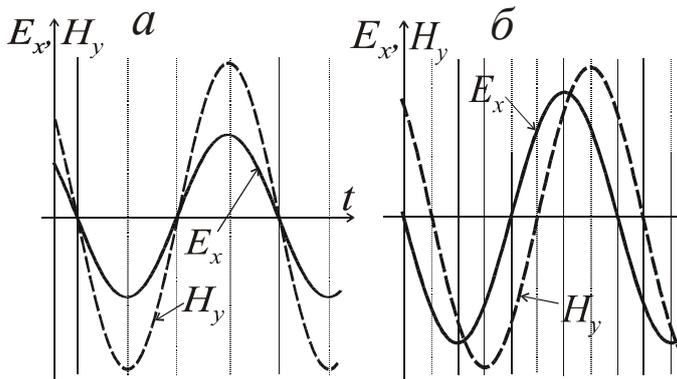
Согласно (6.64), отношение взаимно ортогональных компонент векторов  $\vec{\vec{E}}$  и  $\vec{\vec{H}}$  зависит от частоты  $f = \omega/(2\pi)$  или периода колебаний  $T=1/f$  и (в общем случае)- трёх электромагнитных параметров среды:  $\gamma, \epsilon, \mu$ . Определяющую это отношение величину  $Z = \vec{\vec{E}}_{x0}/\vec{\vec{H}}_{y0}$  называют *импедансом* или *волновым сопротивлением*. Размерность импеданса  $[Z]=[E]/[H]=(В/м)/(А/м)=В/А=Ом$  (отсюда- "волновое сопротивление").

Из (6.64) следует, что импеданс может быть комплексной величиной. Согласно (6.64),  $\vec{\vec{E}}_{x0} = Z \cdot \vec{\vec{H}}_{y0}$ . При перемножении 2-х комплексных величин аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей. То есть при

комплексном  $Z$  аргументы комплексных амплитуд  $\vec{E}_{x0}$  и  $\vec{H}_{y0}$  не будут одинаковыми. При применении комплексной записи (см. (6.44)) мы выяснили, что аргумент комплексной амплитуды равен (взятой с обратным знаком) начальной фазе. Следовательно, при комплексном  $Z$  компоненты  $E_x$  и  $H_y$  имеют разные фазы (меняются не синхронно). Получим выражения для импеданса в трёх частных случаях.

1). Изолятор ( $\gamma=0$ ). При этом, согласно (6.64),

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (6.64, a)$$



**Рис. 6.14.** Зависимости от времени  $t$  (при  $z=\text{const}$ ) компонент  $E_x$ ,  $H_y$  плоской гармонической волны, распространяющейся по направлению оси  $Z$ , в изоляторе (а), в случае квазистационарного ЭМ поля (б).

В соответствии с (6.64,а), для рассматриваемой плоской линейно поляризованной ЭМ волны распространяющейся (в направлении  $\vec{1}_z$ ) в изоляторе импеданс  $Z$  - действительная положительная величина. Так как  $\vec{E}_{x0} = Z \cdot \vec{H}_{y0}$  это означает, что компоненты  $E_x$  и  $H_y$

имеют одинаковые начальные фазы (меняются синхронно), рис. 6.14,а. Соотношение между амплитудами этих компонент зависит от проницаемостей  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и не

зависит от частоты. В частности, в вакууме ( $\varepsilon=1$ ,  $\mu=1$ ), а, практически, и в воздухе,  $Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx \sqrt{[(4\pi \cdot 10^{-7}) \cdot 36\pi]/10^{-9}} = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 10 = 120 \cdot \pi$ , Ом. То есть численно амплитуда компоненты  $E_x$  (в В/м) в  $120 \cdot \pi$  раз больше, чем амплитуда компоненты  $H_y$  (в А/м).

2). Несовершенный диэлектрик ( $j_{l0}^{\text{CM}} \gg j_{l0}$ ,  $\omega\varepsilon_a \gg \gamma$ ). В этом случае, согласно (6.64), импеданс приближённо определяет выражение (6.64,а)

3). Квазистационарное гармонически меняющееся поле ( $j_{l0}^{\text{CM}} \ll j_{l0}$ ,  $\omega\varepsilon_a \ll \gamma$ ). При этих условиях из (6.64) получаем

$$Z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{i\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} \cdot i^{-1/2} = \sqrt{2\pi\mu_0 \cdot f \cdot \mu \cdot \rho} \cdot \exp(-i\pi/4), \quad (6.64, б)$$

где принято во внимание, что  $\omega=2\pi f$ ,  $\mu_a=\mu_0\mu$ ,  $\gamma=1/\rho$ , а  $\sqrt{1/i} = \sqrt{-i} = 1 \cdot \exp\frac{-i\pi/2}{2}$  (см. рис 6.8). Согласно (6.64,б), модуль импеданса  $|Z|$  (и отношение амплитуд компонент  $E_x$  и  $H_y$ ) зависит от частоты  $f$ , удельного

электрического сопротивления  $\rho$  и (в магнитных средах) от магнитной проницаемости  $\mu$ . При заданной частоте в немагнитной среде модуль импеданса зависит только от  $\rho$ . Аргумент импеданса  $Z$  равен  $-\pi/4$ . Так как  $\vec{E}_{x0} = Z \cdot \vec{H}_{y0}$ , это означает, что

при  $\vec{H}_y = \vec{H}_{y0} \exp(-i\omega t)$  имеем  $\vec{E}_x = \sqrt{\omega\mu_a\rho} \cdot \vec{H}_{y0} \times \exp[-i(\omega t + \pi/4)]$ . Следовательно, у рассматриваемой плоской ЭМ волны компонента  $E_x$  опережает компоненту  $H_y$  по фазе на  $\pi/4$  ( $45^\circ$ ), см. рис. 6.14,б. Более подробно...

Пусть в соответствии с (6.40), (6.43), (6.44),  $H_y = H_{y0}(z) \cos[\omega t + \varphi_{Hy}(z)]$ , а в комплексной форме  $\vec{H}_y = H_{y0}(z) \exp\{-i[\omega t + \varphi_{Hy}(z)]\}$  Тогда, согласно (6.64,б),  $\vec{E}_x = E_{x0}(z) \exp\{-i[\omega t + \varphi_{Ex}(z)]\} = \sqrt{2\pi\mu_0 f \mu \rho} \cdot H_{y0}(z) \exp\{-i[\omega t + \varphi_{Hy}(z)]\} \times \exp(-i\pi/4) = \sqrt{2\pi\mu_0 f \mu \rho} \cdot H_{y0}(z) \exp\{-i[\omega t + \varphi_{Hy}(z) + \pi/4]\}$ . То есть в действительной форме  $E_x = E_{x0}(z) \cos[\omega t + \varphi_{Ex}(z)] = \sqrt{2\pi\mu_0 f \mu \rho} \cdot H_{y0}(z) \cos[\omega t + \varphi_{Hy}(z) + \pi/4]$ , откуда следует, что амплитуда  $E_{x0} = \sqrt{2\pi\mu_0 f \mu \rho} \cdot H_{y0}$ , а начальная фаза  $\varphi_{Ex} = \varphi_{Hy} + \pi/4$  (см. рис. 6.14,б).

#### 6.14. Электродинамические потенциалы

От случая гармонически меняющегося поля вернёмся к произвольной зависимости ЭМ поля от времени. При этом, согласно (6.10), система уравнений электродинамики в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \text{I. } \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \text{II. } \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{III. } \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \text{IV. } \operatorname{div} \vec{D} &= \delta^{\text{свб}}. \end{aligned}$$

Мы знаем, что статические поля  $\vec{G}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и стационарное электрическое поле  $\vec{E}$  могут быть выражены через скалярный потенциал  $U$ , например  $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$ . Согласно (5.7), магнитное поле  $\vec{B}$  постоянного электрического тока всегда можно выразить через векторный потенциал  $\vec{A}$ :  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ .

Более сложное, чем эти постоянные поля, переменное ЭМ поле тоже может быть выражено через потенциалы, называемые *электродинамическими*. В общем случае ЭМ поле можно определить при помощи двух таких потенциалов- векторного  $\vec{A}$  и скалярного  $U$ . Сделать это можно различным образом, то есть можно по-разному "связать" электродинамические потенциалы с векторами ЭМ поля. Приведём один из возможных подходов.

Согласно уравнению III приведенной выше системы ( $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ), поле  $\vec{B}$  - чисто вихревое. Равенство нулю дивергенции поля- условие, необходимое и достаточное для того, чтобы это векторное поле можно было выразить, как

ротор другого векторного поля. То есть аналогично (5.7) для переменного поля  $\vec{\mathbf{B}}$  имеем:

$$\vec{\mathbf{B}} = \text{rot } \vec{\mathbf{A}}. \quad (6.65)$$

Подставим выражение (6.65) для  $\vec{\mathbf{B}}$  в уравнение II приведенной выше системы:  $\text{rot } \vec{\mathbf{E}} = \frac{-\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \frac{-\partial \text{rot } \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}$  или  $\text{rot} \left( \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \right) = 0$ . Но

равенство нулю ротора векторного поля — это условие, необходимое и достаточное для того, чтобы это поле можно было выразить как градиент  $\text{grad } U$  (либо  $-\text{grad } U$ ) скалярного поля  $U$  (такое векторное поле-

потенциальное). Итак, потенциальное поле  $\vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\text{grad } U$  или

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } U. \quad (6.66)$$

Из (6.65), (6.66) следует, что ЭМ поле  $(\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{E}})$  может быть выражено через векторный  $(\vec{\mathbf{A}})$  и скалярный  $(U)$  электродинамические потенциалы (электрического типа). В случае постоянного электрического и магнитного полей производная  $\partial \vec{\mathbf{A}} / \partial t \equiv 0$  и из выражений (6.65), (6.66) получаем известные нам по предыдущим темам равенства:  $\vec{\mathbf{B}} = \text{rot } \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{E}} = -\text{grad } U$ .

При известных электродинамических потенциалах  $\vec{\mathbf{A}}, U$  соответствующее им ЭМ поле  $\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{E}}$  может быть определено единственным образом, так как дифференцирования в правых частях выражений (6.65), (6.66) ( $\text{rot } \vec{\mathbf{A}}, \partial \vec{\mathbf{A}} / \partial t, \text{grad } U$ )- это однозначные математические операции. Напротив, одному и тому же ЭМ полю может отвечать множество пар электродинамических потенциалов  $\vec{\mathbf{A}}, U$ . Пусть  $\vec{\mathbf{A}}, U$ - потенциалы некоторого ЭМ поля  $\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{E}}$ , связанные с этим полем равенствами (6.65), (6.66). Не сложно доказать, что тогда потенциалами этого ЭМ поля будут также векторное поле  $\vec{\mathbf{A}}_1 = \vec{\mathbf{A}} + \text{grad } T$  и скалярное поле  $U_1 = U - \frac{\partial T}{\partial t}$ , где  $T$ -

любое (дифференцируемое) скалярное поле. Действительно, в соответствии с (6.65),  $\text{rot } \vec{\mathbf{A}}_1 = \text{rot}(\vec{\mathbf{A}} + \text{grad } T) = \text{rot } \vec{\mathbf{A}} + \text{rot } \text{grad } T = \text{rot } \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$  так как  $\text{rot } \text{grad } T \equiv 0$ . В соответствии с (6.66),  $-\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}_1}{\partial t} - \text{grad } U_1 =$

$$= -\frac{\partial(\vec{\mathbf{A}} + \text{grad } T)}{\partial t} - \text{grad} \left( U - \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \frac{\partial \text{grad } T}{\partial t} - \text{grad } U + \text{grad} \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \text{grad } U = \vec{\mathbf{E}}, \text{ так как } \frac{\partial \text{grad } T}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

То, что мы имеем некоторую свободу в выборе электродинамических потенциалов, позволяет упростить решение прямых задач теории переменного ЭМ поля и делает целесообразным применение этих потенциалов. Так как  $\text{rot}(\vec{A} + \text{grad } T) = \text{rot} \vec{A} = \vec{B}$ , то (зависящая от  $\text{grad } T$ ) потенциальная составляющая поля  $\vec{A}$  может быть выбрана произвольно. Но от этой составляющей зависит производная  $\text{div} \vec{A}$ . Следовательно выбор  $\text{div} \vec{A}$  также может быть сделан произвольно. Выбор  $\text{div} \vec{A}$  называют калибровкой (условием калибровки, нормированием) векторного электродинамического потенциала  $\vec{A}$ . Калибровка позволяет упростить уравнения для потенциалов  $\vec{A}$ ,  $U$ . Вследствие этого решения прямых задач электродинамики часто бывает проще сначала получить для потенциалов  $\vec{A}$ ,  $U$ , а затем, на основе этих решений, перейти, к векторам ЭМ поля, пользуясь равенствами (6.65), (6.66).

В некоторых случаях электродинамические потенциалы бывает удобнее ввести не равенствами (6.65), (6.66), а иными способами (потенциалы магнитного типа, вектор Герца- см. [1], стр. 303- 305).

### **6.15. Уравнения Даламбера. Запаздывающие потенциалы**

Пусть среда- однородна по проницаемостям: ( $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ ). При этих условиях из уравнений I.  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и IV.  $\text{div} \vec{D} = \delta^{\text{свб}}$  системы (6.10) при учёте того, что согласно (6.11), (6.13),  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , получаем:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \varepsilon_a \text{div} \vec{E} = \delta^{\text{свб}}.$$

Умножим левую и правую части 1-го из этих уравнений на  $\mu_a$  и разделим левую и правую части 2-го уравнения на  $\varepsilon_a$  ( $\mu_a$  и  $\varepsilon_a$  - константы при  $\nabla \varepsilon = 0$ ,  $\nabla \mu = 0$ ).

$$\mu_a \text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{B} = \mu_a \vec{j} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}.$$

В соответствии с (6.21), скорость распространения ЭМ колебаний  $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$

(см. замечание "3" в конце раздела 6.6). Тогда для ЭМ поля в среде, однородной по проницаемостям  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , получаем уравнения:

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{j}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}.$$

Подставляя в эти равенства выражения (6.65)  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  и (6.66)  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } U$  для  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$ , получаем уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \operatorname{grad} U \right) + \mu_a \vec{\mathbf{j}}, \quad \operatorname{div} \left( -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} - \operatorname{grad} U \right) = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}.$$

Примем во внимание тождественное равенство (1.11) для вторых производных векторного поля:  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{A}}$  и то, что  $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \nabla^2 U$ . Следовательно,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} - \nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \operatorname{grad} \frac{\partial U}{\partial t} + \mu_a \vec{\mathbf{j}}, \quad -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} - \nabla^2 U = \frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}$$

или

$$\operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \mu_a \vec{\mathbf{j}} = \nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 U + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = -\frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}.$$

Выберем следующую калибровку:  $\operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial U}{\partial t}$ . Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{\mathbf{A}} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \text{ и, следовательно, потенциалы } \vec{\mathbf{A}}, U \text{ удовлетворяют}$$

неоднородным волновым уравнениям-уравнениям Даламбера:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{\mathbf{j}}, \quad \nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a}. \quad (6.67)$$

В тех областях пространства, где  $\vec{\mathbf{j}} = 0$ ,  $\delta^{\text{свб}} = 0$  для потенциалов  $\vec{\mathbf{A}}, U$  справедливы однородные волновые уравнения:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 U - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Для постоянных электрического и магнитного полей  $\left( \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \equiv 0, \frac{\partial U}{\partial t} \equiv 0 \right)$

получаем из (6.67) известные нам уравнения Пуассона (5.28), (4.16) для векторного потенциала  $\vec{\mathbf{A}}$  магнитного поля  $\vec{\mathbf{B}}$  постоянного тока и скалярного потенциала  $U$  постоянного электрического поля  $\vec{\mathbf{E}}$ . Принимая во внимание равенства (3.8,a), можем представить эти уравнения в следующем виде:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} = -\mu_a \vec{\mathbf{j}}, \quad \nabla^2 U = -\frac{\delta^{\text{свб}}}{\varepsilon_a} = -\frac{\delta^{\text{плн}}}{\varepsilon_0}. \quad (6.68)$$

При записи 2-го уравнения в (6.68) принято во внимание то, что, если  $\nabla \varepsilon = 0$ , то, согласно 1-му уравнению в (6.30),  $\delta^{\text{плн}} = \delta^{\text{свб}} / \varepsilon$ .

Решения уравнений (6.68) нам известны. В соответствии с (5.28), (4.32,a), (6.68) если объёмные токи и заряды занимают область пространства  $V$ , то потенциалы в точке наблюдения  $a$  определяют следующие выражения:

$$\vec{\mathbf{A}}(a) = \frac{\mu_a}{4\pi v} \int_V \frac{\vec{\mathbf{j}}(q) dV}{L_{qa}}, \quad U(a) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_a} \int_V \frac{\delta^{\text{свб}}(q) dV}{L_{qa}}. \quad (6.68, a)$$

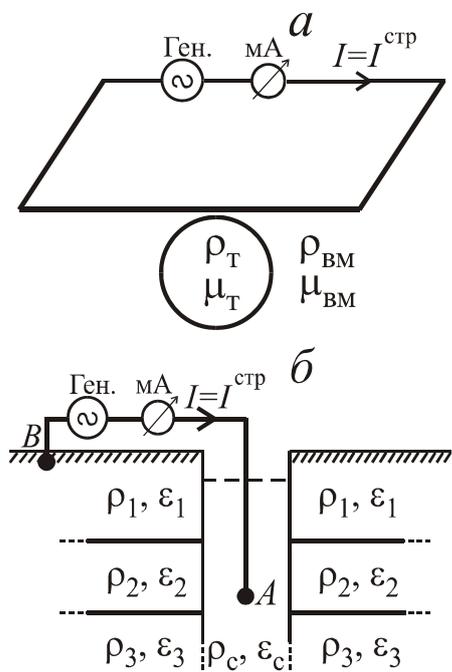
Уравнения Даламбера (6.67) для потенциалов  $\vec{A}$ ,  $U$  отличаются от (6.68) наличием слагаемых со вторыми производными потенциалов по времени. Решения уравнений Даламбера:

$$\vec{A}(a,t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(q,\tau)dV}{L_{qa}}, \quad U(a,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\delta^{cb6}(q,\tau)dV}{L_{qa}}, \quad (6.69)$$

где  $\tau = t - L_{qa}/v$ , а  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$ , как нам известно, это- скорость распространения ЭМ колебаний. Из (6.69) следует, что электродинамические потенциалы  $\vec{A}(a,t)$ ,  $U(a,t)$  в момент времени  $t$  определяют распределение в пространстве (в области  $V$ ) соответственно электрических токов и зарядов в более ранние моменты времени  $\tau$ . Поэтому такие потенциалы называют *запаздывающими*. Для распространения от возбудителей ЭМ поля (точек  $q$ ) до точек наблюдения  $a$  требуется время  $\Delta t = t - \tau = L_{qa}/v$ .

Отметим ещё, что при  $L_{qa} \rightarrow 0$  имеем  $\tau = t$ . Это означает, что при  $L_{qa} \rightarrow 0$ , решения (6.69) уравнений Даламбера (6.67) в каждый момент времени  $t$  совпадают с решениями (6.68,а) уравнений Пуассона (6.68), то есть при этом условии "запаздывания" нет. Это обстоятельство помогает задать условия у особых точек и линий при решении прямых задач теории переменного ЭМ поля.

### 6.16. Сторонние возбудители ЭМ поля



**Рис. 6.15.** Сторонние токи в замкнутой линии (а) и в, линии, заканчивающейся электродами или ёмкостями (б).

Решения (6.69) уравнений Даламбера (6.67)- наглядны и просты, но практически ими трудно воспользоваться для расчёта потенциалов  $\vec{A}$ ,  $U$  в присутствии проводящей среды. Мы знаем, что согласно (4.25), (4.27), распределение полных электрических зарядов в такой среде зависит не только от параметров среды (модели среды), но от электрического поля  $\vec{E}$ . В свою очередь, от поля  $\vec{E}$  в проводящей среде зависит поле вектора плотности тока  $\vec{j}$ , создаваемое токами и переменным электрическим полем магнитное поле  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  и т. д. Так как при постановке и решении прямых задач электродинамики поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  - неизвестны (это- искомые поля), то не могут быть заданы правые части уравнений (6.67) и их решений (6.69). Что же, кроме модели среды, может быть задано при постановке и решении прямых задач электродинамики при неизвестном ЭМ поле?

Есть часть электрических токов и зарядов, которые можно полагать не зависящими от модели среды и искомого ЭМ поля. Такие токи и заряды в электродинамике называют *сторонними*. Таким сторонним током  $I^{\text{стр}}$  может быть проводящая, изолированная от окружающей среды линия искусственно создаваемого (и контролируемого нами) электрического тока  $I$  (в "проводе", рис. 6.15,а). При этом нам известно положение этой линии относительно модели среды и значение тока  $I$  в каждый момент времени. Можно полагать, что величина такого тока  $I = I^{\text{стр}}$  не зависит от модели среды и суммарного ЭМ поля. Если линии тока  $I^{\text{стр}}$  заканчиваются токовыми электродами  $A, B$  (либо ёмкостями, если линия тока  $I^{\text{стр}}$  заканчивается в изоляторе), то во многих случаях при заданном токе  $I^{\text{стр}}$  можно полагать заданными заряды электродов (рис. 6.15,б).

Совокупности элементарных сторонних токов  $dI^{\text{стр}}$  можно поставить в соответствие объёмный ток  $I^{\text{стр}}$  с плотностью  $\vec{j}^{\text{стр}}$ . В каком виде мы можем представить систему уравнений электродинамики, чтобы она содержала произвольно задаваемое при решении прямых задач поле  $\vec{j}^{\text{стр}}$ ? Приведём один из возможных подходов. Из I-го уравнения системы (6.10) и уравнений связи (6.11) получаем:  $\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \gamma \vec{E}^{\text{стр}}$ . Первое и второе слагаемые

в правой части этого уравнения зависят от электрического поля  $\vec{E}$ , но последнее слагаемое можем полагать не зависящим от ЭМ поля. Обозначая  $\gamma \vec{E}^{\text{стр}} = \vec{j}^{\text{стр}}$ , получаем:

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}^{\text{стр}}. \quad (6.70)$$

В соответствии с (6.48) для гармонически меняющегося поля при применении комплексной записи уравнение (6.70) принимает вид:

$$\text{rot } \vec{H} = (\gamma - i\omega\epsilon_a) \vec{E} + \vec{j}^{\text{стр}} = \gamma' \vec{E} + \vec{j}^{\text{стр}}, \quad (6.70, a)$$

где  $\gamma' = \gamma - i\omega\epsilon_a$  - комплексная удельная электропроводность. В уравнениях (6.70), (6.70,а) поле  $\vec{j}^{\text{стр}}$  можно полагать заданным при постановке и решении прямых задач электродинамики.

Приведём пример того, как при известных сторонних токах можно определить некоторые другие возбудители поля. Пусть мы рассматриваем такую область пространства  $V$ , где среда однородна по  $\gamma$  и  $\epsilon$ , а ЭМ поле гармонически меняющееся. Из (6.70,а) при  $\nabla\gamma = 0$ ,  $\nabla\epsilon = 0$  получаем:  $0 \equiv \text{div rot } \vec{H} = (\gamma - i\omega\epsilon_a) \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{j}^{\text{стр}}$ , то есть  $\text{div } \vec{E} = -\text{div } \vec{j}^{\text{стр}} / (\gamma - i\omega\epsilon_a)$ . Но, в соответствии с (6.12),  $\text{div } \vec{E} = \delta^{\text{плн}} / \epsilon_0$ . Из последних двух равенств следует, что  $\delta^{\text{плн}} / \epsilon_0 = -\text{div } \vec{j}^{\text{стр}} / (\gamma - i\omega\epsilon_a)$  или

$$\tilde{\delta}^{\text{плн}} = -\varepsilon_0 \frac{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}^{\text{стр}}}{\gamma - i\omega\varepsilon_a}. \quad (6.71)$$

Получим интегральную форму этого уравнения. Проинтегрируем левую и правую части уравнения (6.71) по области пространства  $V$  и воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского (1.13):

$$\int_V \tilde{\delta}^{\text{плн}} dV = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma - i\omega\varepsilon_a} \int_V \operatorname{div} \tilde{\mathbf{j}}^{\text{стр}} dV \equiv -\frac{\varepsilon_0}{\gamma - i\omega\varepsilon_a} \oint_{S[V]} (\tilde{\mathbf{j}}^{\text{стр}} \mathbf{d}\vec{S}), \quad \text{то есть полный}$$

электрический заряд  $\tilde{e}_V^{\text{плн}}$  в области  $V$  определяет выражение:

$$\tilde{e}_V^{\text{плн}} = -\frac{\varepsilon_0}{\gamma - i\omega\varepsilon_a} \tilde{I}_S^{\text{стр}}. \quad (6.71, a)$$

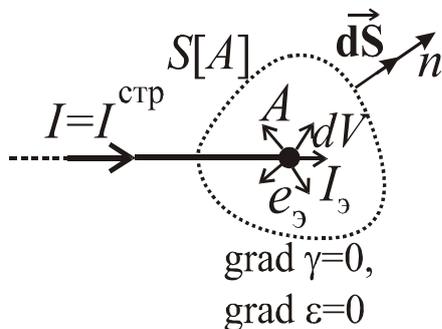
Здесь  $\tilde{I}_S^{\text{стр}} = \oint_{S[V]} (\tilde{\mathbf{j}}^{\text{стр}} \mathbf{d}\vec{S})$  - поток вектора  $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{стр}}$  через границу  $S[V]$  области  $V$ ,

который с точностью до знака равен стороннему току через поверхность  $S[V]$ .

Воспользуемся выражением (6.71, a) для определения полного заряда  $\tilde{e}_\mathcal{E}$  точечного токового электрода  $A$  (или ёмкости), которым заканчивается линия гармонически меняющегося тока  $I^{\text{стр}} = I$  (рис. 6.16). Применяя это выражение к окрестности точки  $A$  (элементарному объёму  $dV$ , ограниченному поверхностью  $S[A]$ ) и принимая во внимание, что в рассматриваемом случае ток  $I$  направлен внутрь  $dV$ , а нормали  $n$  к  $S[A]$  и векторы  $\mathbf{d}\vec{S}$  - наружу относительно  $dV$ , получаем:  $\tilde{e}_\mathcal{E} = -\frac{\varepsilon_0 (-\tilde{I})}{\gamma - i\omega\varepsilon_a}$  или  $\tilde{e}_\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 \tilde{I}}{\gamma - i\omega\varepsilon_a}$ .

Если окружающая точку  $A$  среда- изолятор ( $\gamma=0$ ), либо выполняется неравенство  $\gamma \ll \omega\varepsilon$ , то  $\tilde{e}_\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 \tilde{I}}{-i\omega\varepsilon_a} = \frac{\tilde{I}}{\omega\varepsilon} \exp(i\pi/2)$ . Отсюда, например,

следует, что фазы тока  $I$  и заряда  $e_\mathcal{E}$  различаются на  $\pi/2$ . В случае квазистационарного гармонически меняющегося поля ( $\gamma \gg \omega\varepsilon$ ) получаем выражение  $\tilde{e}_\mathcal{E} = \varepsilon_0 \tilde{I} / \gamma$ , из которого, в частности, следует, что фазы тока  $I$  и заряда  $e_\mathcal{E}$  - одинаковы. При  $\gamma \gg \omega\varepsilon$  выражение для  $e_\mathcal{E}$  совпадает с известным



**Рис. 6.16.** К определению заряда  $\tilde{e}_\mathcal{E}$ .

нам равенством, определяющим заряд расположенного в однородной (по  $\rho=1/\gamma$ ) среде токового точечного электрода  $A$  с постоянной эмиссией  $I_\mathcal{E}=I$ :  $e_\mathcal{E} = \varepsilon_0 \rho I$  (см. раздел 4.11).

Получим ещё уравнение для векторного электродинамического потенциала гармонически меняющегося ЭМ поля, которое содержит не зависящее от модели среды поле  $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{стр}}$ . Согласно (6.70, a) и уравнениям II, III, в (6.48),

$$\text{I. } \text{rot } \vec{\vec{H}} = \gamma' \vec{\vec{E}} + \vec{\vec{j}}^{\text{стр}}, \quad \text{II. } \text{rot } \vec{\vec{E}} = i\omega\mu_a \vec{\vec{H}}, \quad \text{III. } \text{div } \vec{\vec{B}} = \text{div}(\mu_a \vec{\vec{H}}) = 0. \quad (6.72)$$

Из уравнения III в (6.72) следует, что  $\vec{\vec{B}} = \mu_a \vec{\vec{H}} = \text{rot } \vec{\vec{A}}$  и

$$\vec{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \vec{\vec{A}}. \quad (6.73)$$

Подставляя выражение (6.73) для  $\vec{\vec{H}}$  в уравнение II в (6.72), получаем  $\text{rot } \vec{\vec{E}} = i\omega \text{rot } \vec{\vec{A}}$  или  $\text{rot}(\vec{\vec{E}} - i\omega \vec{\vec{A}}) = 0$ ,  $\vec{\vec{E}} - i\omega \vec{\vec{A}} = -\text{grad } \vec{U}$ ,

$$\vec{\vec{E}} = i\omega \vec{\vec{A}} - \text{grad } \vec{U}. \quad (6.74)$$

Выражения (6.73), (6.74) позволяют определить ЭМ поле, если известны векторный ( $\vec{\vec{A}}$ ) и скалярный ( $\vec{U}$ ) электродинамические потенциалы.

Далее полагаем, что среда- однородна по ЭМ параметрам ( $\nabla\gamma = 0$ ,  $\nabla\varepsilon = 0$ ,  $\nabla\mu = 0$ ) и, соответственно,  $\nabla\gamma' = 0$ , где  $\gamma' = \gamma - i\omega\varepsilon_a$  - комплексная удельная электропроводность. Подставляя выражения (6.73), (6.74) для  $\vec{\vec{H}}$  и  $\vec{\vec{E}}$  в I-е уравнение в (6.72), получаем:  $\frac{1}{\mu_a} \text{rot rot } \vec{\vec{A}} = i\omega\gamma' \vec{\vec{A}} - \text{grad}(\gamma' \vec{U}) + \vec{\vec{j}}^{\text{стр}}$ ,

$$\text{rot rot } \vec{\vec{A}} = i\omega\mu_a\gamma' \vec{\vec{A}} - \text{grad}(\mu_a\gamma' \vec{U}) + \mu_a \vec{\vec{j}}^{\text{стр}}.$$

Так как  $\text{rot rot } \vec{\vec{A}} \equiv \text{grad div } \vec{\vec{A}} - \nabla^2 \vec{\vec{A}}$ , то получаем:  $\text{grad div } \vec{\vec{A}} - \nabla^2 \vec{\vec{A}} = i\omega\mu_a\gamma' \vec{\vec{A}} - \text{grad}(\mu_a\gamma' \vec{U}) + \mu_a \vec{\vec{j}}^{\text{стр}}$  или  $\text{grad}(\text{div } \vec{\vec{A}} + \mu_a\gamma' \vec{U}) = \nabla^2 \vec{\vec{A}} + i\omega\mu_a\gamma' \vec{\vec{A}} + \mu_a \vec{\vec{j}}^{\text{стр}}$ . Согласно (6.50),  $i\omega\mu_a\gamma' = k^2$ , где  $k$  - волновое число. Применяя калибровку  $\text{div } \vec{\vec{A}} = -\mu_a\gamma' \vec{U}$ , получаем для векторного электродинамического потенциала неоднородное уравнение Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{\vec{A}} + k^2 \vec{\vec{A}} = -\mu_a \vec{\vec{j}}^{\text{стр}}. \quad (6.75)$$

Из условия калибровки следует, что  $\vec{U} = -\frac{1}{\mu_a\gamma'} \text{div } \vec{\vec{A}}$ . Подставляя это выражение для  $\vec{U}$  в (6.74), получаем:  $\vec{\vec{E}} = i\omega \vec{\vec{A}} + \frac{1}{\mu_a\gamma'} \text{grad div } \vec{\vec{A}}$  или

$$\vec{\vec{E}} = i\omega \left( \vec{\vec{A}} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{\vec{A}} \right). \quad (6.74, a)$$

Согласно (6.73), (6.74,a), при известном векторном потенциале  $\vec{\vec{A}}$  мы можем определить ЭМ поле, не привлекая при решении задачи скалярный потенциал  $\vec{U}$ . В каждой однородной по ЭМ параметрам области среды

потенциал  $\check{\check{A}}$  удовлетворяет уравнению (6.75), а при  $\check{\check{j}}^{\text{стр}} = 0$  - однородному уравнению Гельмгольца  $\nabla^2 \check{\check{A}} + k^2 \check{\check{A}} = 0$ .

### 6.17. Уравнение баланса ЭМ энергии. Вектор Умова-Пойнтинга

ЭМ поле существует не изолированно, а во взаимодействии с другими полями и веществом (материей, средой). Для возбуждения ЭМ поля требуются затраты энергии. В свою очередь ЭМ энергия переходит в энергию другого вида- тепловую. ЭМ энергию в области пространства  $V$  определяет выражение:

$$W_V = \frac{1}{2} \int_V [(\vec{E} \vec{D}) + (\vec{H} \vec{B})] dV. \quad (6.76)$$

Здесь  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ - напряжённость электрического поля и вектор электрической индукции,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ - напряжённость магнитного поля и вектор магнитной индукции. Произведения  $(\vec{E} \vec{D})dV$  и  $(\vec{H} \vec{B})dV$  определяют энергию соответственно электрического и магнитного полей в элементарном объёме  $dV$  области  $V$  (рис. 6.17,а).

Дифференцируя левую и правую части (6.76) по времени  $t$  и принимая во внимание систему уравнений электродинамики (6.10) после преобразований (см. [1], стр. 274-275) получаем уравнение баланса ЭМ энергии:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW_V}{dt} = P - Q - \oint_{S[V]} (\vec{Y} \mathbf{d}\vec{S}), \quad \text{где } P = \int_V (\vec{j} \vec{E}^{\text{стр}}) dV, \\ Q = \int_V \rho j^2 dV, \quad \vec{Y} = [\vec{E} \vec{H}]. \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

В (6.77)  $\vec{j}$ - вектор плотности тока,  $j = |\vec{j}|$ ,  $\vec{E}^{\text{стр}}$ - напряжённость поля сторонних сил,  $\rho$ - удельное электрическое сопротивление,  $\vec{Y}$ - вектор Умова-Пойнтинга, физический смысл которого выясним позже.

Производная  $dW_V/dt$  определяет скорость изменения со временем ЭМ энергии  $W_V$ . При  $dW_V/dt > 0$ ,  $dW_V/dt < 0$  и  $dW_V/dt = 0$  ЭМ энергия в области  $V$  соответственно возрастает, убывает и не меняется со временем. Если за единицу времени энергия  $W_V$  линейно меняется со временем  $t$ , то производная  $dW_V/dt$  численно равна изменению  $W_V$  за единицу времени.

Слагаемое  $P$  в выражении (6.77) для  $dW_V/dt$  определяет скорость перехода других (сторонних) видов энергии в ЭМ энергию  $W_V$  в области  $V$ . Величина  $P > 0$  во внутренних (активных) участках цепей электрического тока, где  $\vec{E}^{\text{стр}} \neq 0$  и скалярное произведение  $(\vec{j} \vec{E}^{\text{стр}}) > 0$  (см. рис. 4.8,б).

Слагаемое  $(-Q)$  в выражении (6.77) для  $dW_V/dt$  характеризует скорость перехода энергии  $W_V$  в тепловую энергию (джоулево тепло). При  $Q = 0$  ЭМ энергия не переходит в тепловую- нет "тепловых потерь". Из выражения (6.77) для  $Q$  следует, что  $Q = 0$  в двух следующих случаях.

1). Очевидно, что при  $\rho=0$  (идеальный проводник) и ограниченной плотности  $j$  электрического тока произведение  $\rho \cdot j^2 = 0$  и  $Q = 0$ .

2). При  $\rho \rightarrow \infty$  ( $1/\rho = \gamma = 0$ )- в изоляторе также получаем  $Q = 0$ . Действительно, по закону Ома в дифференциальной форме  $j^2 = \gamma^2 E^2$  и  $\rho j^2 = \gamma^2 E^2 / \gamma = \gamma E^2 = 0$  при  $\gamma = 0$  и ограниченной величине  $E$ . То есть в изоляторе  $Q = 0$ . Именно с этим связано, в частности, то, что плоская ЭМ волна распространяется в изоляторе без изменения формы и амплитуды колебаний (рис. 6.4, 6.13,a), а, согласно (6.54,a), (6.60,a), в изоляторе коэффициент поглощения  $b=0$ , глубина проникновения  $\delta=\infty$ .

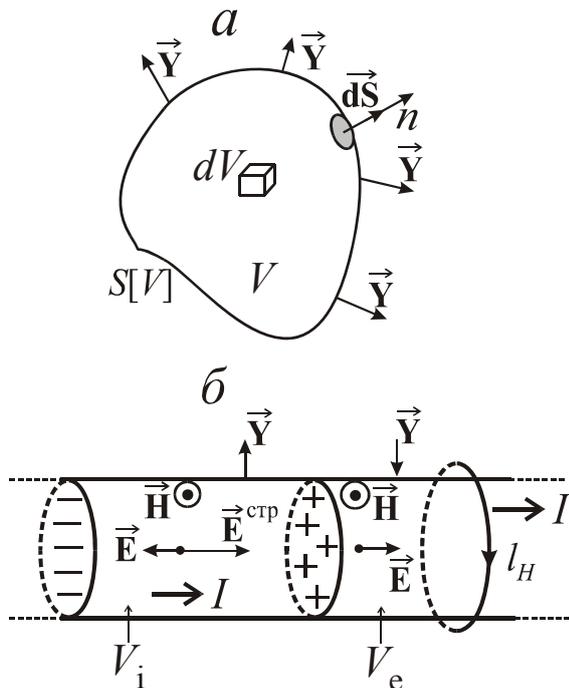
Для выяснения того, какой физический смысл имеет вектор Умова-Пойнтинга  $\vec{Y}$ , упростим выражение (6.77) для случая, когда  $\gamma = 0$  (изолятор). При этом  $\vec{j} = 0$ ,  $P = 0$ ,  $Q = 0$  и из (6.77) получаем:

$$\oint_{S[V]} (\vec{Y} \, d\vec{S}) = - \frac{dW_V}{dt}. \tag{6.78}$$

Сравним это уравнение с интегральной формой уравнения непрерывности электрического тока (6.5,a):

$$\oint_{S[V]} (\vec{j} \, d\vec{S}) = - \frac{de_V^{свб}}{dt}. \tag{6.5,a}$$

Эти уравнения математически идентичны. В правой части уравнения непрерывности  $e_V^{свб}$  - свободный электрический заряд, а в левой части (6.5,a)  $\vec{j}$  - вектор плотности электрического тока- "вектор плотности потока свободных электрических зарядов". Аналогично, в правой части уравнения (6.78)  $W_V$  - ЭМ энергия. Тогда, по аналогии с (6.5,a), в левой части уравнения (6.78)  $\vec{Y}$  - вектор плотности потока ЭМ энергии. Это означает, что направление вектора  $\vec{Y}$  совпадает с направлением перемещения ЭМ энергии, а абсолютная величина  $|\vec{Y}|$  численно равна количеству этой энергии, проходящей в единицу времени через единичную площадку (часть плоскости



**Рис. 6.17.** К выражениям (6.76), (6.77) (а). Направления векторов Умова-Пойнтинга у поверхности внутреннего и внешнего участков цепи постоянного тока (б).

площадью  $1 \text{ м}^2$ ), нормальную к направлению  $\vec{Y}$ .

Так как  $\vec{Y} = [\vec{E} \vec{H}]$ , то в каждый момент времени  $\vec{Y} \perp \vec{E}$ ,  $\vec{Y} \perp \vec{H}$  и векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{Y}$  образуют правую тройку (см. рис. 1.1,б,в). В зависимости

от направления векторов  $\vec{Y}$  ЭМ энергия может "выходить" из области  $V$  (рис. 6.17,а), "входить" в  $V$ , либо "проходить" через  $V$ , не меняя величины  $W_V$ .

Рассмотрим детальнее следствия из уравнения (6.77) для  $dW_V/dt$  в случае постоянного электрического тока (стационарных полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ). При  $\partial\vec{E}/\partial t \equiv 0$ ,  $\partial\vec{H}/\partial t \equiv 0$ , имеем  $dW_V/dt \equiv 0$  и из (6.77) получаем:

$$\oint_{S[V]} (\vec{Y} \, d\vec{S}) = P - Q, \quad \text{а при } \vec{E}^{\text{стр}} = 0: \quad \oint_{S[V]} (\vec{Y} \, d\vec{S}) = -Q. \quad (6.79)$$

Пусть протяжённая часть цепи постоянного электрического тока  $I$  имеет форму прямого кругового цилиндра (рис. 6.17,б). Во внутреннем (активном) участке  $V_i$  этой цепи, где  $\vec{E}^{\text{стр}} \neq 0$  и  $P > 0$ , электрический ток с плотностью  $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стр}})$  поддерживают действующие на свободные микрочастицы поля  $\vec{E}$  и  $\vec{E}^{\text{стр}}$ . Для упрощения ситуации векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{E}^{\text{стр}}$  на рис. 6.17,б-антипараллельны и тогда, при  $E < E^{\text{стр}}$ , направление  $\vec{j}$  противоположно направлению  $\vec{E}$ . Во внешнем участке  $V_e$  цепи тока, где  $\vec{E}^{\text{стр}} = 0$ ,  $P = 0$ ,  $\vec{j} = \gamma\vec{E}$  и (в изотропной по  $\gamma$  среде) направления векторов  $\vec{j}$ ,  $\vec{E}$  - одинаковы.

Для рассматриваемой цепи электрического тока векторные линии  $l_H$  магнитного поля  $\vec{H}$  - окружности с осью по оси тока. Направление  $l_H$  образует правовинтовую систему с направлением тока  $I$ . На рис. 6.17,б показаны направления векторов  $\vec{H}$  (в проводнике с током  $I$ ) у поверхности проводника и соответствующие направлениям векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  направления векторов  $\vec{Y} = [\vec{E} \, \vec{H}]$ . Как видно на этом рисунке, у поверхности участка  $V_i$  поток ЭМ энергии направлен "наружу"- из цепи электрического тока. Следовательно, поток  $\oint_{S[V_i]} (\vec{Y} \, d\vec{S}) > 0$ . В соответствии с первым равенством в

(6.79), это означает, что в области  $V_i$  имеем  $P > Q$ , то есть не вся сторонняя энергия в  $V_i$  переходит в тепловую энергию в этой области. Часть её выходит из области  $V_i$  в виде потока ЭМ энергии. У поверхности внешней части  $V_e$  цепи электрического тока векторы  $\vec{Y}$  направлены в область  $V_e$  и поток  $\oint_{S[V_e]} (\vec{Y} \, d\vec{S}) < 0$ . Согласно последнему равенству (6.79), в случае стационарного

поля, вся ЭМ энергия, поступающая (в виде потока вектора  $\vec{Y}$ ) из  $V_i$  в  $V_e$ , переходит в области  $V_e$  в тепловую энергию.

## 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Теория упругости- один из разделов механики сплошной среды. То есть мы, как и ранее, будем применять "макроскопический подход" и ,отвлекаясь от атомарно-молекулярного строения вещества, полагать, что среда-сплошная. В теории упругости изучают упругие напряжения, упругие деформации и связь между ними. При этом принимают допущение, что

деформации- бесконечно малы и (в абсолютно-упругой среде) пропорциональны вызвавшим их упругим напряжениям. Законы и уравнения теории упругости служат для обоснования теории распространения упругих колебаний. Понятно, что теория распространения упругих колебаний имеет прямое отношение к такому методу разведочной геофизики, как сейсморазведка.

### 7.1. Упругие напряжения. Виды напряжений

Пусть на упругое тело действуют "внешние" силы  $\vec{F}$  (рис. 7.1,а). Под действием сил  $\vec{F}$  упругое тело может изменить свою форму и объем и в этом теле возникнут некоторые "внутренние" силы. Говорят, что упругое тело находится в напряжённом состоянии. Силы в таком упругом теле можно определить, пользуясь понятием "упругие напряжения". Как можно

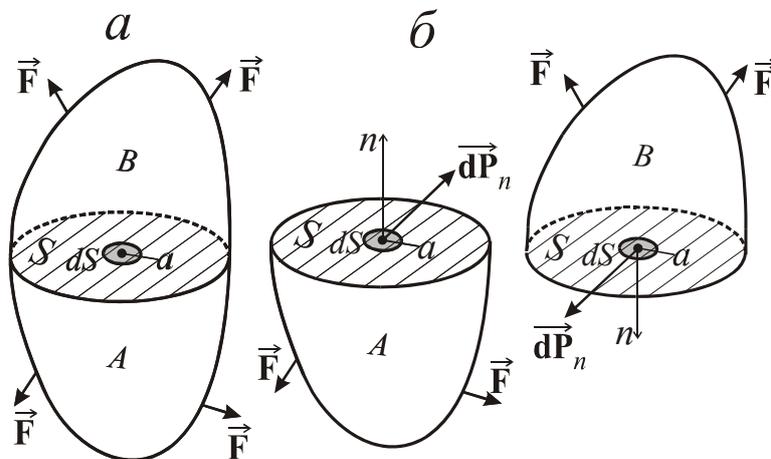


Рис. 7.1. Вектор упругого напряжения

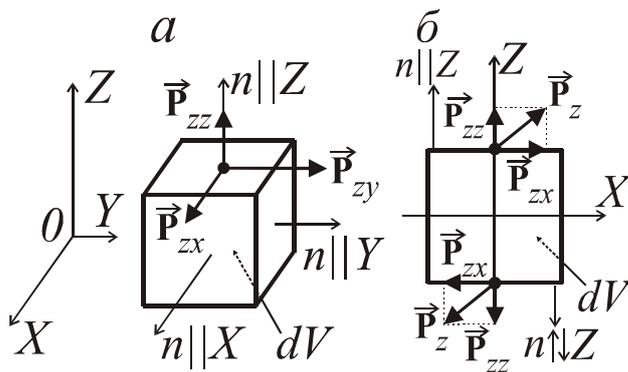
$$\vec{P}_n = d\vec{P}_n / dS.$$

охарактеризовать упругие напряжения в произвольной точке  $a$ ? Разделим упругое тело на две части  $A, B$  плоскостью  $S$ , проходящей через точку  $a$  и отделим друг от друга эти части вместе с приложенными к ним силами  $\vec{F}$ . К частям плоскости  $S$  (участкам границы тел  $A, B$ ) приложим такие силы, чтобы объёмы и формы тел  $A, B$  не изменились. Для этого, в частности, на элементарных площадках  $dS$  с (наружными по отношению к  $A, B$ ) нормальными  $n$  и центрами в точке  $a$  потребуется приложить силы  $d\vec{P}_n$  (рис. 7.1,б). Индекс "n" у сил  $d\vec{P}_n$  в данном случае обозначает не направления этих сил, а то, что это- силы на площадках  $dS$  с нормальными  $n$ .

Вектор  $\vec{P}_n$  упругого напряжения на площадках  $dS$  определяет выражение:  $\vec{P}_n = d\vec{P}_n / dS$ . Ясно, что абсолютная величина вектора  $\vec{P}_n$  аналогична давлению (и имеет ту же, что у давления, размерность- Н/м<sup>2</sup>), но это- давление внутри упругого тела (упругой среды). Как и у силы  $d\vec{P}_n$ , у вектора упругого напряжения  $\vec{P}_n$  индекс "n" обозначает то, что это- упругое напряжение на элементарной площадке  $dS$  с нормалью  $n$ . Вектор  $\vec{P}_n$  можно представить как сумму векторных компонент. В декартовых координатах  $\vec{P}_n = \vec{P}_{nx} + \vec{P}_{ny} + \vec{P}_{nz} = \vec{1}_x P_{nx} + \vec{1}_y P_{ny} + \vec{1}_z P_{nz}$ .

Первый индекс "n" у скалярных компонент  $P_{nx}$ ,  $P_{ny}$ ,  $P_{nz}$  (по-прежнему) обозначает направление нормали к  $dS$ , а второй - то, проекцию на какую ось  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (или орт  $\vec{1}_x$ ,  $\vec{1}_y$ ,  $\vec{1}_z$ ) характеризует эта компонента. Но вектор напряжения  $\vec{P}_n$  не является величиной достаточно общей для того, чтобы полностью характеризовать напряжённое состояние в точке  $a$ , так как этот вектор зависит не только от положения точки  $a$  в упругом теле, но и от ориентации  $dS$  (и, соответственно, нормали  $n$  к  $dS$ ), то есть  $\vec{P}_n = \vec{P}_n(a, n)$ .

В декартовых координатах нормальными к площадкам  $dS$  могут быть оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  (или, точнее, направления  $\pm \vec{1}_x$ ,  $\pm \vec{1}_y$ ,  $\pm \vec{1}_z$ ). Векторы упругих напряжений на площадках с нормальными  $\pm \vec{1}_x$ ,  $\pm \vec{1}_y$ ,  $\pm \vec{1}_z$  определим следующим образом:  $\vec{P}_x = \vec{1}_x P_{xx} + \vec{1}_y P_{xy} + \vec{1}_z P_{xz}$ ,  $\vec{P}_y = \vec{1}_x P_{yx} + \vec{1}_y P_{yy} + \vec{1}_z P_{yz}$ ,  $\vec{P}_z = \vec{1}_x P_{zx} + \vec{1}_y P_{zy} + \vec{1}_z P_{zz}$ . Как и ранее, первый индекс у компонент напряжений определяет направление нормали к площадке  $dS$ , а второй показывает то, проекцию на какую ось декартовых координат характеризует эта скалярная компонента.



**Рис. 7.2.** Компоненты упругих напряжений.

На рис. 7.2,а показаны векторные компоненты  $\vec{P}_{zx}$ ,  $\vec{P}_{zy}$ ,  $\vec{P}_{zz}$  вектора напряжения  $\vec{P}_z$  на площадке  $dS_z$  с нормалью  $Z$ . Видно, что компоненты  $\vec{P}_{zx}$ ,  $\vec{P}_{zy}$  направлены по касательным ("тангенциально") к такой площадке  $dS_z$ , а компонента  $\vec{P}_{zz}$  - по нормали к площадке  $dS_z$ . Аналогично на каждой из площадок  $dS_x$ ,  $dS_y$  с нормальными

$X$ ,  $Y$  упругие напряжения характеризуют одна нормальная и две тангенциальные компоненты.

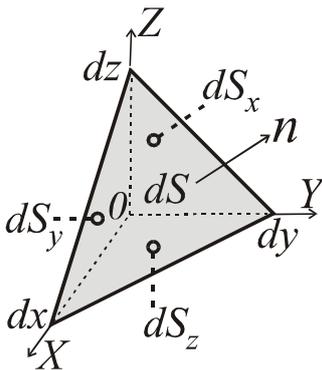
Для шести тангенциальных и трёх нормальных компонент упругих напряжений на площадках  $dS_x$ ,  $dS_y$ ,  $dS_z$  в теории упругости применяют обозначения:  $P_{xy} = \tau_{xy}$ ,  $P_{yx} = \tau_{yx}$ ,  $P_{zx} = \tau_{zx}$ ,  $P_{xz} = \tau_{xz}$ ,  $P_{zy} = \tau_{zy}$ ,  $P_{yz} = \tau_{yz}$ ,  $P_{xx} = \sigma_x$ ,  $P_{yy} = \sigma_y$ ,  $P_{zz} = \sigma_z$ .

На рис. 7.2,б показаны сечение координатного элемента объёма  $dV$ , векторы  $\vec{P}_z$  и их векторные компоненты  $\vec{P}_{zx}$ ,  $\vec{P}_{zy}$ ,  $\vec{P}_{zz}$  на двух противоположных гранях  $dV$  с нормальными  $n \parallel Z$  и  $n \uparrow \downarrow Z$ . В показанном на 7.2,б случае векторы  $\vec{P}_z$  оказывают одинаковое (деформирующее) действие на элемент  $dV$  упругой среды. Но, если определять скалярные компоненты векторов  $\vec{P}_z$  на этих гранях по обычным правилам (1.3), то они будут различаться по знаку.

Поэтому в теории упругости принято следующее правило определения скалярных компонент напряжений. Если, как на рис. 7.2,б  $n \parallel Z$  или  $n \uparrow \downarrow Z$ , то

$P_{zx} = \tau_{zx} = P_z \cos(\vec{P}_z, Z) \cos(n, Z), \dots, P_{zz} = \sigma_z = P_z \cos(\vec{P}_z, X) \cos(n, Z)$ , (7.1)  
где  $P_z = |\vec{P}_z|$ ,  $\cos(n, Z) = 1$  при  $n \parallel Z$ ,  $\cos(n, Z) = -1$  при  $n \uparrow \downarrow Z$ , а  $n$ -нормаль к площадке, наружная по отношению к элементу объёма  $dV$ .

## 7.2. Тензор упругих напряжений



**Рис. 7.3.** К определению упругого напряжения на произвольно ориентированной элементарной площадке  $dS$  с нормалью  $n$ .

Итак, мы можем характеризовать упругое напряжение векторами  $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$  на 3-х взаимно-перпендикулярных элементарных площадках или 9-ю скалярными компонентами этих векторов (3-мя нормальными напряжениями  $\sigma$  и 6-ю тангенциальными напряжениями  $\tau$ ). Достаточно ли этих 9-и скалярных величин для того, чтобы полностью определить напряжённое состояние в бесконечно-малой окрестности точки  $a$  упругой среды? Если это так, то по этим 9-и компонентам можно определить напряжение на произвольно ориентированной площадке в окрестности точки  $a$ . Проверим это, а также получим выражения, определяющие правила преобразования компонент упругих напряжений при повороте осей декартовых координат.

На рис. 7.3 показан элементарный объём  $dV$  в упругой среде в форме четырёхгранника. Три ограничивающие его грани  $dS_x, dS_y, dS_z$  с (наружными по отношению к  $dV$ ) нормальными  $-\vec{i}_x, -\vec{i}_y, -\vec{i}_z$  лежат в координатных плоскостях, а четвёртая грань  $dS$  с нормалью  $n$  ориентирована произвольно. Масса четырёхгранника  $dm = \rho dV$ , где  $\rho$ - плотность. По второму закону Ньютона

$$\vec{a} = \sum d\vec{F} / dm \quad \text{или} \quad \sum d\vec{F} = dm \vec{a}, \quad (7.2)$$

где  $\vec{a}$  - ускорение, а  $\sum d\vec{F}$  - сумма сил, действующих на массу  $dm$ . Различают объёмные и поверхностные силы:  $\sum d\vec{F} = \sum d\vec{F}^{\text{объ}} + \sum d\vec{F}^{\text{пов}}$ .

$d\vec{F}^{\text{объ}}$  - это одна из сил, действующих на всю массу  $dm$  (например, сила тяготения, сила инерции).  $\sum d\vec{F}^{\text{объ}}$  пропорциональна  $dm$ . Поэтому обозначим  $\sum d\vec{F}^{\text{объ}} = \vec{F} dm = \vec{F} \rho dV$ . Здесь  $\sum d\vec{F}^{\text{объ}} / dm = \vec{F}$  - сумма объёмных сил ("массовых сил"), отнесённая к единице массы;  $|\vec{F}| = F$  - конечная величина.

$\sum d\vec{F}^{\text{пов}}$  - сумма сил, действующих на поверхность массы  $dm$ . Для показанного на рис. 7.3 четырёхгранника  $\sum d\vec{F}^{\text{пов}}$  - это сумма произведений упругих напряжений на гранях элементарного объёма  $dV$  на площади этих граней:  $\vec{P}_x dS_x, \vec{P}_y dS_y, \vec{P}_z dS_z, \vec{P}_n dS_n$ . Таким образом, из (7.2) получаем:

$$\vec{F} \rho dV + \vec{P}_x dS_x + \vec{P}_y dS_y + \vec{P}_z dS_z + \vec{P}_n dS_n = \rho dV \vec{a}. \quad (7.3)$$

В этом выражении  $P, F, a, \rho$  - конечные величины. Если полагать, что длины рёбер четырёхгранника ( $dx, dy, \dots$ )- бесконечно-малые величины 1-го порядка, то площади граней ( $dS_x = dy \cdot dz / 2, dS_y = dx \cdot dz / 2, \dots$ )- бесконечно-малые величины 2-го порядка, а объём  $dV = dx \cdot dy \cdot dz / 6$ - бесконечно-малая величина 3-го порядка.

Пренебрегая в (7.3) членами, содержащими множитель  $dV$ , получаем:

$$\vec{P}_n dS_n = -\vec{P}_x dS_x - \vec{P}_y dS_y - \vec{P}_z dS_z.$$

Перейдём от этого равенства векторов к равенствам компонент векторов по направлениям осей  $X, Y, Z$ . Учтём, что  $dS_x = dS \cos(n, X), dS_y = dS \cos(n, Y), dS_z = dS \cos(n, Z)$ . Так как (наружные по отношению к  $dV$ ) нормали к граням  $dS_x, dS_y, dS_z$  антипараллельны осям  $X, Y, Z$ , то, принимая во внимание (7.1), получаем следующие равенства для декартовых компонент векторов  $\vec{P}_n, \vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ :

$$\begin{aligned} P_{nx} &= P_{xx} \cos(n, X) + P_{yx} \cos(n, Y) + P_{zx} \cos(n, Z), \\ P_{ny} &= P_{xy} \cos(n, X) + P_{yy} \cos(n, Y) + P_{zy} \cos(n, Z), \\ P_{nz} &= P_{xz} \cos(n, X) + P_{yz} \cos(n, Y) + P_{zz} \cos(n, Z). \end{aligned}$$

Применяя для нормальных и тангенциальных компонент напряжений принятые в теории упругости обозначения ( $P_{xx} = \sigma_x, P_{yx} = \tau_{yx}, \dots$ ), получаем:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x \cos(n, X) + \tau_{yx} \cos(n, Y) + \tau_{zx} \cos(n, Z), \\ P_{ny} &= \tau_{xy} \cos(n, X) + \sigma_y \cos(n, Y) + \tau_{zy} \cos(n, Z), \\ P_{nz} &= \tau_{xz} \cos(n, X) + \tau_{yz} \cos(n, Y) + \sigma_z \cos(n, Z). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из этих выражений следует, что по 9-и компонентам напряжений на площадках  $dS_x, dS_y, dS_z$  можно определить компоненты упругих напряжений  $P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}$  и вектор напряжения  $\vec{P}_n = \vec{1}_x P_{nx} + \vec{1}_y P_{ny} + \vec{1}_z P_{nz}$  на произвольно ориентированной площадке  $dS$  с нормалью  $n$ . Это означает, что девять компонент упругих напряжений  $\sigma_x, \tau_{yx}, \dots$  полностью характеризуют напряжённое состояние в окрестности точки  $a$  упругой среды.

Пусть нам известны эти девять компонент напряжений в системе координат  $x, y, z$  с осями  $X, Y, Z$ . Получим выражения, определяющие компоненты напряжений в другой системе координат  $x', y', z'$  с осями  $X', Y', Z'$ ,

$Z'$  (при повороте осей). Заменяя в (7.4) направление  $n$  на направления  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , получаем 9 равенств:

$$\left. \begin{aligned} P_{x'x} &= \sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z), \\ P_{x'y} &= \tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z), \\ P_{x'z} &= \tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z), \\ P_{y'x} &= \sigma_x \cos(Y', X) + \tau_{yx} \cos(Y', Y) + \tau_{zx} \cos(Y', Z), \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

В левых частях (7.5)  $P_{x'x}$ ,  $P_{x'y}$ , ... это- компоненты напряжений по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  на площадках с нормальными, коллинеарными осям  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ . Воспользуемся равенствами

$$\left. \begin{aligned} P_{x'x'} &= \sigma_{x'} = P_{x'x} \cos(X', X) + P_{x'y} \cos(X', Y) + P_{x'z} \cos(X', Z), \\ P_{x'y'} &= \tau_{x'y'} = P_{x'x} \cos(Y', X) + P_{x'y} \cos(Y', Y) + P_{x'z} \cos(Y', Z), \dots \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Подставляя (7.5) в правые части (7.6), получаем выражения, определяющие правила преобразования компонент упругих напряжений при повороте осей декартовых координат. Например,

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= (\sigma_x \cos(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) + \tau_{zx} \cos(X', Z)) \cos(X', X) + \\ &+ (\tau_{xy} \cos(X', X) + \sigma_y \cos(X', Y) + \tau_{zy} \cos(X', Z)) \cos(X', Y) + \\ &+ (\tau_{xz} \cos(X', X) + \tau_{yz} \cos(X', Y) + \sigma_z \cos(X', Z)) \cos(X', Z) \end{aligned}$$

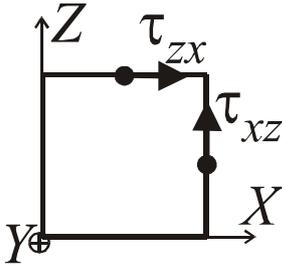
или

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x \cos^2(X', X) + \tau_{yx} \cos(X', Y) \cos(X', X) + \\ &+ \tau_{zx} \cos(X', Z) \cos(X', X) + \\ &+ \tau_{xy} \cos(X', X) \cos(X', Y) + \sigma_y \cos^2(X', Y) + \\ &+ \tau_{zy} \cos(X', Z) \cos(X', Y) + \\ &+ \tau_{xz} \cos(X', X) \cos(X', Z) + \tau_{yz} \cos(X', Y) \cos(X', Z) + \\ &+ \sigma_z \cos^2(X', Z). \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

В левой части равенств вида (7.7)- компоненты упругих напряжений в системе координат  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  с осями  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ , а в правой части- компоненты упругих напряжений в системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  с осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и косинусы углов между направлениями осей  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  и  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Совокупность 9-и скалярных величин, удовлетворяющих правилам преобразования вида (7.7) при повороте осей декартовых координат, называют *тензором* (истинным, тензором второго ранга). Итак, *тензор упругих напряжений*:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$



**Рис. 7.4.**  
Тангенциальные  
упругие  
напряжения.

Иногда тензор упругих напряжений можно определить меньшим (чем 9) числом компонент. На рис. 7.4 видно, что тангенциальные компоненты напряжений могут вызвать повороты элементарных объёмов упругой среды. При  $\tau_{xz} \neq \tau_{zx}$  существует вращающий момент, вызывающий поворот такого элементарного объёма вокруг оси  $Y$ . Поэтому если таких поворотов- нет, или мы их не рассматриваем (как при изучении "чистой деформации", см. ниже), то можем полагать, что  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$  и тензор напряжений характеризуют только 6 скалярных

величин.

При определённых направлениях осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  тензор упругих напряжений принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (7.8, a)$$

В этом случае ненулевые компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  называют главными напряжениями, а направления осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ - главными направлениями тензора упругих напряжений. И, наконец, если все тангенциальные напряжения равны нулю, а  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$  (где  $P$ - давление), то этому отвечает (присущий жидкостям) случай "всестороннего сжатия".

### 7.3. Вектор смещения. Деформации

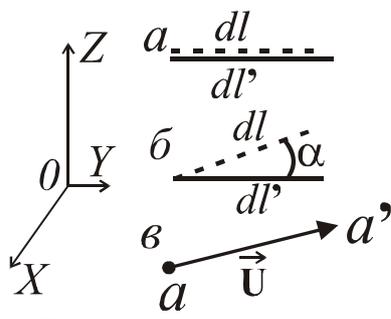
Будем рассматривать деформации, которые могут произойти в упругой среде с элементарными отрезками  $dl$ , (ограниченными отрезками  $dl$ ) элементарными площадками  $dS$  и (ограниченными  $dS$ ) элементарными объёмами  $dV$ . На рис. 7.5,а,б (и ниже) штриховыми линиями показаны отрезки  $dl$  до деформации упругой среды, а сплошными линиями-получаемые из  $dl$  в результате деформации отрезки  $dl'$ . При рассмотрении элементарных отрезков  $dl$  результатом деформации упругой среды может быть следующее.

- 1). Перемещение  $dl$  без изменения длины отрезка  $dl$  или его поворота.
- 2). Растяжение-сжатие отрезка (рис. 7.5,а). При этом в теории упругости полагают, что отношение  $(dl' - dl)/dl$ - бесконечно-малая величина, то есть относительное изменение длины  $dl$ - бесконечно-мало.
- 3). Поворот отрезка на угол  $\alpha$ , где  $\alpha$ - бесконечно-малая величина (рис. 7.5,б).
- 4). Совместное проявление тех явлений, которые описаны выше.

Деформации можно выразить через поле смещений  $\vec{U}$ . Вектор смещения  $\vec{U}$  характеризует величину и направление смещения точки  $a$  при деформации упругой среды (действию сил на такую среду). Пусть до

деформации точка  $a$  имела декартовы координаты  $x, y, z$ , а в результате деформации переместилась в точку  $a'$  с координатами  $x+dx, y+dy, z+dz$  (рис. 7.5,б). Вектор смещения  $\vec{U} = \vec{1}_x dx + \vec{1}_y dy + \vec{1}_z dz$ . В теории упругости для скалярных компонент вектора смещения приняты обозначения:  $dx=U_x=U, dy=U_y=V, dz=U_z=W$ , то есть в декартовых координатах (при применяемых в теории упругости обозначениях) вектор смещения

$$\vec{U} = \vec{1}_x U + \vec{1}_y V + \vec{1}_z W. \quad (7.9)$$



**Рис. 7.5.** Изменения элементарных отрезков  $dl$  (а, б) и вектор смещения  $\vec{U}$  (в).

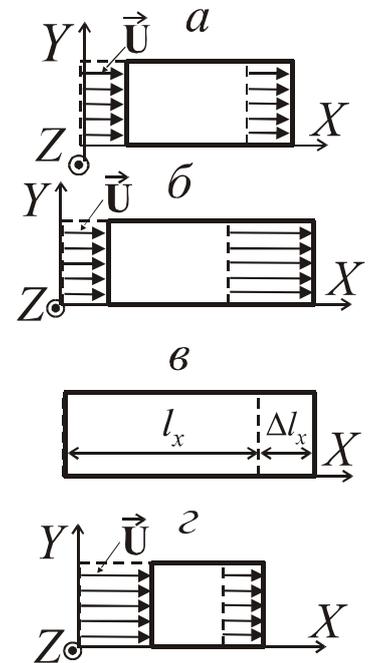
элементарного объёма  $dV$  упругой среды, при которых объём  $dV$  испытывает растяжение по направлению оси  $X$ . В этом случае компонента  $U$  вектора смещения  $\vec{U}$  растёт с увеличением координаты  $x$  и производная  $\partial U / \partial x > 0$ . Напротив, при  $\partial U / \partial x < 0$  (рис. 7.6,з) объём  $dV$  испытывает сжатие по направлению оси  $X$ . То есть производная  $\frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon_x$  характеризует деформации растяжения (при  $\epsilon_x > 0$ ) или сжатия (при  $\epsilon_x < 0$ ) по направлению оси  $X$ .

При показанном на рис. 7.6,в "равномерном" растяжении или сжатии участка упругой среды (в форме прямоугольного параллелепипеда) по направлению оси  $X$  его относительное растяжение (или сжатие-"укорочение")  $\Delta l_x / l_x$  равно производной  $\partial U / \partial x$ . То

есть величина  $\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$  характеризует относительные удлинения- сжатия элементов упругой среды по направлению оси  $X$ . Аналогично производные  $\epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}$  характеризуют деформации растяжения- сжатия элементов  $dV$  упругой среды по направлениям осей  $Y, Z$  и имеют смысл относительных удлинений или сжатий элементов  $dV$  по этим направлениям.

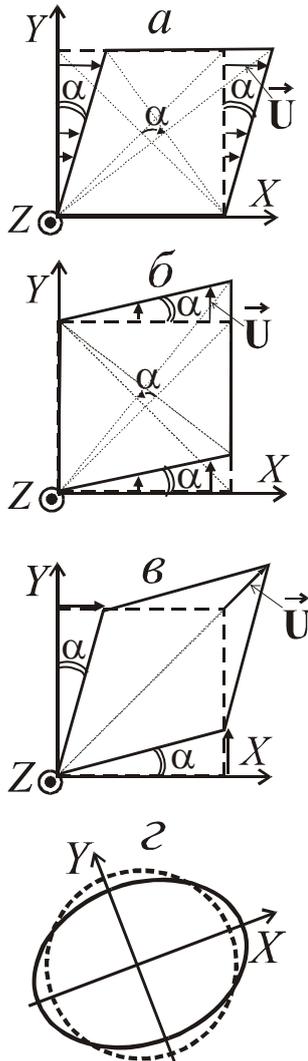
Как связано поле  $\vec{U}$  с деформациями? Если в окрестности данной точки упругой среды поле  $\vec{U}$  - однородно (рис. 7.6,а), то деформации- нет. Элементарный объём упругой среды без изменения формы и объёма перемещается в направлении вектора  $\vec{U}$  на расстояние  $|\vec{U}|$ .

На рис. 7.6,б показаны такие векторы смещения в окрестности прямоугольного сечения



**Рис. 7.6.** Смещения без деформаций (а) и деформации растяжения-сжатия (б- з).

Итак, величины  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , равные производным декартовых компонент  $U_x=U, U_y=V, U_z=W$  соответственно по координатам  $x, y, z$ , характеризуют относительные растяжения-сжатия элементов упругой среды по направлениям осей  $X, Y, Z$ .



**Рис. 7.7.**  
Деформации сдвига  
(а-в). Главные  
направления  
тензора  
деформации (г).

А какие явления характеризуют производные скалярных декартовых компонент  $U, V, W$ , вектора смещения  $\vec{U}$  по направлениям, ортогональным компонентам  $\vec{1}_x U, \vec{1}_y V, \vec{1}_z W: \partial U/\partial y, \partial V/\partial x, \dots$ ?

На рис. 7.7,а показано то, что может произойти с лежащей в плоскости  $z=\text{const}$  элементарной квадратной координатной площадкой со сторонами  $dx, dy$ , если  $\vec{U} = \vec{1}_x U$  и производная  $\partial U/\partial y > 0$ . То, как при этом изменится координатный элемент объема  $dV$  (сечение которого показано на рис. 7.7,а), в теории упругости называют *деформацией сдвига*. При этом произойдут два явления: 1) "чистая" деформация сдвига, связанная с изменением формы ("скошение" прямых углов у координатного элемента объема  $dV$ ); 2) поворот элемента  $dV$  на угол  $\alpha$ .

На рис. 7.7,б показано, какие изменения с сечением координатного элемента объема могут произойти в том случае, когда  $\vec{U} = \vec{1}_y V$  и производная  $\partial V/\partial x > 0$ . При сравнении рис. 7.7,а и рис. 7.7,б видно, что, если для описания чистой деформации сдвига воспользоваться полусуммой

$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ , то производные  $\partial V/\partial x$  и  $\partial U/\partial y$

оказывают одинаковое влияние на изменение формы  $dV$  (чистую деформацию сдвига). Заметим, что повороты элементарных объемов  $dV$  на этих

рисунках имеют противоположное направление. Поэтому чистую деформацию сдвига принято характеризовать следующими величинами:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right).$$

То, что произойдет с лежащей в плоскости  $z=\text{const}$  элементарной координатной площадкой со сторонами  $dx, dy$  при  $\partial V/\partial x = \partial U/\partial y > 0$  и, соответственно,  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} > 0$  показано на рис. 7.7,в. В этом случае при бесконечно-малых углах  $\alpha$  (в радианах)  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \partial V/\partial x = \partial U/\partial y = \text{tg } \alpha \approx \alpha$ .

Отметим, что при деформациях сдвига (и бесконечно-малых углах  $\alpha$ ) не происходит изменения площадей показанных на рис. 7.7,а,б координатных площадок и объёмов  $dV$  элементов упругой среды. То есть при деформации сдвига, в отсутствие деформаций сжатия-растяжения, объёмы  $dV$  не меняются.

#### 7.4. Тензор деформаций

При рассмотрении "чистой" деформации (без перемещения и поворотов элементарных объёмов  $dV$ ) тензор деформаций включает три компоненты деформации сжатия-растяжения и шесть компонент "чистой" деформации сдвига:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

По определению компонент  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \dots$  ясно, что это- симметричный тензор и, даже в общем случае, чистую деформацию сдвига фактически определяют шесть скалярных величин. Если, при некоторых направлениях осей  $X, Y, Z$  вместо (7.10) имеем:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (7.10, a)$$

то компоненты  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  называют главными компонентами тензора деформаций (главными "удлинениями"), а направления  $X, Y, Z$ - главными направлениями (главными осями) тензора деформаций. Если до деформации элементарный объём  $dV$  упругой среды имеет форму шара, то в результате деформации он примет форму эллипсоида с осями по главным направлениям тензора деформаций (рис. 7.7,г).

#### 7.5. Вектор вращения. Дилатация

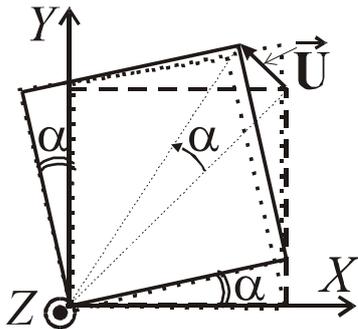
*Вектор вращения*

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{U} = \vec{1}_x \omega_x + \vec{1}_y \omega_y + \vec{1}_z \omega_z. \quad (7.11)$$

Из определения (7.11) понятия "вектор вращения" и выражения (1.9) для ротора векторного поля в декартовых координатах следует, что, например, скалярная компонента  $\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)$ , то есть эту компоненту вектора вращения  $\vec{\omega}$  определяют те же производные  $\partial V/\partial x, \partial U/\partial y$ , что и компоненты  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right)$  тензора чистой деформации. Отличие

выражений для  $\omega_z$  и для  $\gamma_{xy}$  - лишь в одном знаке ("-" вместо "+"). Но компонента  $\omega_z$  характеризует иное, чем  $\gamma_{xy}$ , явление.

Рассмотрим случай, когда производная  $\partial V/\partial x > 0$ , а производная  $\partial U/\partial y = -\partial V/\partial x < 0$ . При этих условиях характеризующие деформации чистого сдвига компоненты тензора деформации  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$ , а для компоненты  $\omega_z$  вектора вращения  $\vec{\omega}$  имеем:  $\omega_z = \partial V/\partial x = -\partial U/\partial y > 0$ . Этот случай иллюстрирует рис. 7.8. На рисунке видно, что при этих условиях



**Рис. 7.8.** К определению z-компоненты  $\omega_z$  вектора вращения  $\vec{\omega}$ .

лежащая в плоскости  $z = \text{const}$  элементарная координатная площадка не испытывает чистой деформации сдвига. Она поворачивается на (бесконечно-малый) угол  $\alpha \approx \text{tg} \alpha = \partial V/\partial x = -\partial U/\partial y = \omega_z$ . При  $\omega_z > 0$  направление этого поворота образует правовинтовую систему с направлением оси Z.

Следовательно, компоненты  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  вектора вращения  $\vec{\omega}$  характеризуют (бесконечно-малые, в радианах) углы поворотов элементов  $dV$  среды вокруг осей X, Y, Z соответственно. Согласно (7.11) и выражению (1.9), в декартовых координатах для x- компоненты и y- компоненты

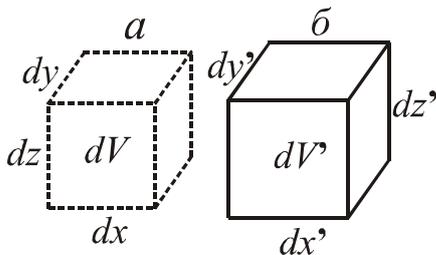
вектора вращения справедливы выражения:  $\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right)$ ,

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right).$$

Пусть до деформации элемент упругой среды имел объём  $dV$ , в результате деформации (сжатия-растяжения) объём  $dV$  изменился и стал равен  $dV'$ . Дилатация  $\theta$  равна относительному изменению объёма  $dV$ :

$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV}. \tag{7.12}$$

Далее будет удобно полагать, что  $dV$  и  $dV'$ - координатные элементы объёма в декартовых координатах (рис. 7.9). Тогда  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ ,  $dV' = dx' \cdot dy' \cdot dz'$  и из (7.12)



**Рис. 7.9.** К определению дилатации  $\theta$ .

получаем:

$$\theta = \frac{dx' \cdot dy' \cdot dz' - dx \cdot dy \cdot dz}{dx \cdot dy \cdot dz} = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dz'}{dz} - 1.$$

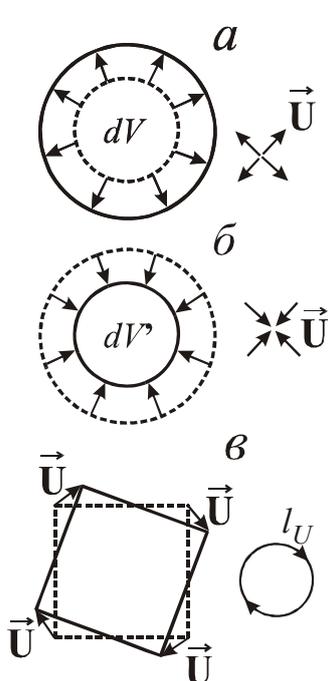
Примем во внимание, что  $\frac{dx'}{dx} = \frac{dx' - dx + dx}{dx} = \frac{dx' - dx}{dx} + 1 = \epsilon_x + 1$ , где, в соответствии в (7.10) и рис. 7.6, б-г,  $\epsilon_x$ -

компонента тензора деформации, характеризующая деформацию растяжения-сжатия по оси  $X$ . Аналогичным образом,  $\frac{dy'}{dy} = \varepsilon_y + 1$ ,  $\frac{dz'}{dz} = \varepsilon_z + 1$  и  $\theta = (\varepsilon_x + 1) \cdot (\varepsilon_y + 1) \cdot (\varepsilon_z + 1) - 1 = \theta = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \dots - 1$ . Так как в теории упругости деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  - бесконечно-малые величины, то, пренебрегая бесконечно-малыми величинами более высокого порядка (произведениями  $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$ , ...), получаем:  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ . Принимая во внимание то, что  $\varepsilon_x = \partial U / \partial x$ ,  $\varepsilon_y = \partial V / \partial y$ ,  $\varepsilon_z = \partial W / \partial z$  и выражение (1.7) для дивергенции вектора, получаем:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{U}, \quad (7.12, a)$$

то есть дивергенция поля смещений  $\vec{U}$  равна относительным изменениям  $\theta$  объёмов  $dV$  элементов упругой среды при деформациях. Такие изменения объёмов  $dV$  могут происходить при деформациях сжатия-растяжения.

Итак, согласно (7.11), (7.12), (7.12, a), производная  $\operatorname{rot} \vec{U} = 2\vec{\omega}$  характеризует повороты элементов  $dV$  упругой среды, а производная  $\operatorname{div} \vec{U} = \theta$  - изменения объёмов  $dV$ . Мы знаем, что в частных случаях векторное поле может быть 1) потенциальным или 2) соленоидальным (чисто-вихревым).



**Рис. 7.10.**  
Особенности полей  $\vec{U}$  при деформациях растяжения (а), сжатия (б), при поворотах (в).

1). При потенциальном поле  $\vec{U}$  имеем:  $\operatorname{rot} \vec{U} = 2\vec{\omega} \equiv 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{U} = \theta \neq 0$ . Потенциальную составляющую поля смещений  $\vec{U}$  обозначим  $\vec{U}_p$ . Такое поле можно выразить через скалярный потенциал, который в теории упругости принято обозначать  $\varphi$ :

$$\vec{U}_p = \operatorname{grad} \varphi. \quad (7.12, б)$$

Следовательно, при потенциальном поле смещений  $\vec{U}_p$  элементы упругой среды могут испытывать деформации сжатия-растяжения, могут меняться их объёмы  $dV$ , но нет поворотов этих элементов (и деформаций сдвига). Простейшие (и, несколько, "утрированные") примеры, характеризующие особенности таких полей  $\vec{U} = \vec{U}_p$ , приведены на рис. 7.10, а, б. В первом случае (растяжение  $dV$ ) в окрестности  $dV$  имеем  $\operatorname{div} \vec{U} = \theta > 0$ , во втором (сжатие  $dV$ ) -  $\operatorname{div} \vec{U} = \theta < 0$ .

2). При соленоидальном поле  $\vec{U} = \vec{U}_s$  имеем:  $\operatorname{rot} \vec{U} = 2\vec{\omega} \neq 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{U} = \theta \equiv 0$ . Удовлетворяющее

таким уравнениям соленоидальное (чисто-вихревое) поле смещений обозначим  $\vec{U}_S$ . Знаем, что такое поле можно выразить через векторный потенциал, который в теории упругости обозначают  $\vec{\Psi}$ :

$$\vec{U}_S = \text{rot } \vec{\Psi}. \quad (7.12, \text{в})$$

При таком поле смещений ( $\vec{U} = \vec{U}_S$ ) элементы упругой среды могут испытывать повороты (и деформации сдвига), но нет деформаций сжатия-растяжения и изменения объёмов  $dV$ . Простейший пример того, что может происходить с элементом упругой среды при таком поле смещений приведен на рис. 7.10,в. Здесь же показана векторная линия  $l_U$ , по касательной к которой направлены векторы  $\vec{U}$ .

В общем случае поле смещений  $\vec{U} = \vec{U}_P + \vec{U}_S$ .

### 7.6. Закон Гука. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона

Закон Гука устанавливает (для идеально-упругой среды) прямую пропорциональную зависимость между упругими деформациями и вызвавшими их упругими напряжениями: деформация = const  $\times$  напряжение. Но, согласно (7.10), чистую деформацию характеризуют 6 компонент симметричного тензора деформаций. При симметричном тензоре упругих напряжений (7.8) его также определяют 6 компонент: 3 нормальных напряжения и 3 тангенциальных напряжения. Ограничимся случаем изотропной упругой среды, параметры которой одинаковы по всем направлениям. В такой среде нормальные упругие напряжения вызывают деформации сжатия-растяжения, а тангенциальные напряжения- деформации сдвига. При этом можем представить закон Гука в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_2 \sigma_z, \\ \varepsilon_y &= c_2 \sigma_x + c_1 \sigma_y + c_2 \sigma_z, \\ \varepsilon_z &= c_2 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_1 \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= c_3 \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = c_3 \tau_{zx}, \\ \gamma_{xy} &= c_3 \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

где  $c_1, c_2, c_3$ - константы, зависящие от свойств упругой среды. Эти три константы можем выразить через два упругих параметра среды: модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

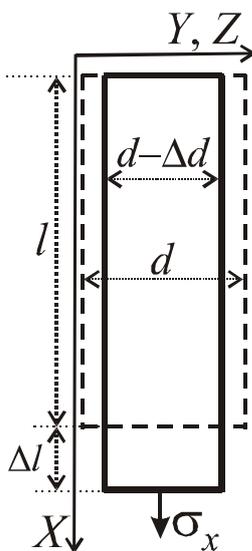
Рассмотрим случай, когда нормальное напряжение  $\sigma_x > 0$ , а все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. В этом случае координатный элемент упругой среды (либо упругое тело в форме прямоугольного параллелепипеда с рёбрами, параллельными осям декартовых координат) испытывает (продольное) растяжение по направлению оси  $X$  и (поперечные) сжатия по направлениям осей  $Y, Z$  (рис.

7.11). При этом  $\varepsilon_x > 0$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_z < 0$  и, как следует из (7.13),  $\varepsilon_x = c_1 \sigma_x$ ,  $\varepsilon_y = c_2 \sigma_x$ ,  $\varepsilon_z = c_2 \sigma_x$ .

Обозначая  $c_1 = 1/E$ , получаем:  $\varepsilon_x = \sigma_x / E$ . Каков физический смысл модуля Юнга  $E$ ? из равенства  $\varepsilon_x = \sigma_x / E$  следует, что  $E = \sigma_x / \varepsilon_x$ . Но деформация  $\varepsilon_x$  равна относительному удлинению (или сжатию при  $\varepsilon_x < 0$ ) по направлению оси  $X$ . В соответствии с обозначениями на рис. 7.11,  $\varepsilon_x = \Delta l / l$  и

$$E = \sigma_x \frac{l}{\Delta l}. \quad (7.14)$$

При  $\Delta l = l$  имеем:  $E = \sigma_x$ , то есть модуль Юнга  $E$  равен такому нормальному напряжению (при одноосном растяжении), при котором длина  $l$  увеличится в два раза (правда немного найдётся материалов, которые бы такое выдержали). Из (7.14) следует, что чем меньше относительное растяжение упругой среды при заданном положительном нормальном напряжении, тем больше у такой среды модуль Юнга.



**Рис. 7.11.** К закону Гука.

Так как при  $\sigma_x > 0$ , имеем  $\varepsilon_y = \varepsilon_z < 0$ , обозначим в (7.13)  $c_2 = \frac{-\nu}{E}$ , где  $\nu$  - коэффициент Пуассона. Выясним, что характеризует этот коэффициент в случае одноосного

растяжения. Из равенств  $\varepsilon_y = c_2 \sigma_x$ ,  $c_2 = \frac{-\nu}{E}$  следует, что

$\nu = -E \frac{\varepsilon_y}{\sigma_x}$ . Но деформация  $\varepsilon_y$  в данном случае

характеризует относительное поперечное сжатие ( $-\Delta d / d$ ) по оси  $Y$  или  $Z$  (рис. 7.11). Принимая во внимание выражение (7.14) для  $E$ , получаем:

$$\nu = -\sigma_x \frac{l}{\Delta l} \left( \frac{-\Delta d / d}{\sigma_x} \right) \text{ или}$$

$$\nu = \frac{\Delta d / d}{\Delta l / l}. \quad (7.15)$$

То есть коэффициент Пуассона  $\nu$  можно определить, как (извините за тавтологию) отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному удлинению при одноосном растяжении. Ясно, что  $\nu$  - безразмерная величина. У большинства твёрдых веществ, в частности у горных пород, коэффициент Пуассона может составлять от 0.1 до 0.4. Отметим, что слабо сцементированные горные породы с низкими "прочностными свойствами" имеют повышенные значения коэффициента Пуассона, поэтому его определение является одной из важных задач геофизических методов при инженерных изысканиях под строительство.

Коэффициенты в законе Гука (7.13) обозначили:  $c_1 = 1/E$ ,  $c_2 = -\nu/E$ . Тогда первые три равенства в (7.13) принимают следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Множители  $c_3$  в (7.13) тоже можно выразить через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Пусть последние три равенства - это закон Гука для главных направлений  $X, Y, Z$  тензора упругих напряжений и тензора чистой деформации. Если воспользоваться выражениями вида (7.7), определяющими правилами преобразования компонент тензора при повороте осей координат, то после преобразований получаем:  $c_3 = \frac{1+\nu}{E}$ ,  $\gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \dots$

Итак, закон Гука (7.13) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} (7.16)$$

Получим ещё одно выражение для дилатации  $\theta$ . Согласно (7.12,а), (7.16),

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) + \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Отсюда следует, что

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (7.17)$$

В частности, как уже было отмечено в разделе 7.2, при (характерном для жидкости) всестороннем сжатии имеем:  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$  (где  $P$ - давление). В этом случае из (7.17) получаем:  $\theta = -\frac{1-2\nu}{E} 3P$ . Для "абсолютно-упругой, несжимаемой жидкости" при конечном давлении  $P$  дилатация  $\theta=0$ . Из последнего выражения для  $\theta$  следует, что этому случаю (формально) соответствует значение коэффициент Пуассона  $\nu = 0.5$ .

### 7.7. Выражение упругих напряжений через деформации

В законе Гука (7.16) упругие деформации выражены через упругие напряжения и параметры упругой среды ( $E, \nu$ ). Но иногда, наоборот, требуется выразить упругие напряжения через деформации. Получим такие выражения. Из 1-го равенства в (7.16) следует, что  $\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] =$   
 $= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z + \sigma_x - \sigma_x)] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . Но, согласно

$$(7.17), \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E \cdot \theta}{1 - 2\nu}. \quad \text{Следовательно,} \quad \varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \frac{E \cdot \theta}{(1 - 2\nu)} = \\ = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu \cdot \theta}{(1 - 2\nu)}, \quad \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x = \varepsilon_x + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \theta, \quad \sigma_x = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \theta + \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_x.$$

В левой части последнего равенства - нормальное напряжение  $\sigma_x$ , а в правой - характеризующие деформацию среды величины  $\theta$  и  $\varepsilon_x$ , а также - параметры упругой среды:  $E$  и  $\nu$ . Введя обозначения

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (7.18)$$

получаем для нормального напряжения  $\sigma_x$  следующее выражение:  $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$ . Аналогичные равенства, конечно, справедливы и для других нормальных напряжений, то есть

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \quad \sigma_z = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z. \quad (7.19)$$

Выражения для тангенциальных напряжений  $\tau_{yz}$ , ... легко получить из трёх последних равенств в (7.16). Принимая во внимание обозначение (7.18) для  $\mu$ , имеем:

$$\tau_{yz} = 2\mu\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = 2\mu\gamma_{zx}, \quad \tau_{xy} = 2\mu\gamma_{xy}. \quad (7.20)$$

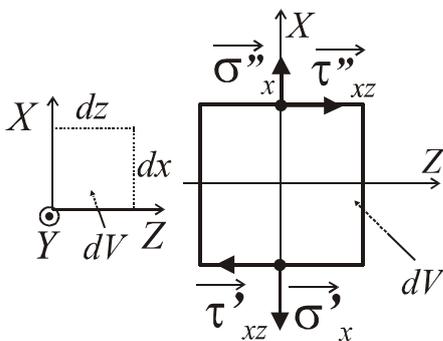
Определяемые выражениями (7.18) параметры  $\lambda$ ,  $\mu$  упругой среды называют *упругими постоянными Ламэ*. Параметр  $\mu$  называют также *модулем сдвига*. Согласно (7.18), упругие постоянные Ламэ зависят только от модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

### 7.8. Уравнение передачи упругих колебаний (уравнение Ламэ)

Применим 2-й закон Ньютона к координатному элементу объёма  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  с массой  $dm = \rho \cdot dV$  (рис.7.12). После преобразований (см. [1], стр. 353- 354) получаем уравнение Ламэ:

$$(\lambda + \mu) \text{grad } \theta + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (7.21).$$

Здесь  $\vec{U}$  - вектор смещения,  $\rho$  - плотность,  $\lambda$ ,  $\mu$  - упругие постоянные Ламэ,  $t$  - время,  $\vec{F}$  - сумма объёмных ("массовых") сил  $d\vec{F}^{\text{объ}}$ , действующих на массу  $dm = \rho \cdot dV$ , делённая на  $dm$ . (см. раздел 7.2).



**Рис. 7.12.** К выводу уравнения Ламэ.

Уравнение (7.21) называют *уравнением Ламэ* или *уравнением передачи колебаний* в абсолютно-упругой среде. Полю  $\vec{F}$  в этом уравнении в теории распространения упругих колебаний можно придать смысл тех (нормированных на  $dm$ ) сил, которые заставляют некоторые элементы  $dV$  упругой среды (или области  $V$  такой среды) совершать

вынужденные колебания (смещения). В тех областях пространства, где  $\vec{F} = 0$ , получаем уравнение Ламэ для свободных колебаний:

$$(\lambda + \mu) \text{grad } \theta + \mu \nabla^2 \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (7.21, a)$$

Воспользуемся тождественным равенством (1.11)  $\nabla^2 \vec{U} \equiv \text{grad div } \vec{U} - \text{rot rot } \vec{U}$  и представим это уравнение в виде:

$$(\lambda + \mu) \text{grad } \theta + \mu \text{grad div } \vec{U} - \mu \text{rot rot } \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad \text{Так как } \text{div } \vec{U} = \theta, \text{ а } \text{rot } \vec{U} = 2\vec{\omega}, \text{ то из (7.21, a) получаем:}$$

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad } \theta - 2\mu \text{rot } \vec{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}. \quad (7.22)$$

### 7.9. Волновые уравнения для продольных и поперечных упругих волн

Покажем, что в среде, однородной по параметрам  $\rho, \lambda, \mu$  (заметим, что и уравнения (7.21)- (7.22) тоже получены при этих условиях), следствиями (7.22) являются два уравнения, описывающие независимое распространение 2-х типов упругих волн (2-х видов поля смещений  $\vec{U}$ ). Распространений первой из них (поля  $\vec{U}_p$ ) сопровождается деформациями сжатия-растяжения и изменениями объёмов  $dV$  элементов упругой среды, которые характеризует дилатация  $\theta = \text{div } \vec{U}_p$  (см. (7.12)- (7.12,б)). Распространение второй упругой волны (поля  $\vec{U}_s$ ) сопровождается поворотами элементарных объёмов  $dV$  упругой среды (которые определяют компоненты вектора вращения  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{U}_s$ ), а также- чистыми деформациями сдвига ( $\gamma_{yz}, \dots$ ) (см. 7.12,в и рис 7.7, 7.8)).

Из равенства (7.22) для векторных полей следует равенство дивергенций этих полей. Следовательно, из (7.22) при  $\nabla \lambda = 0, \nabla \mu = 0, \nabla \rho = 0$  получаем:

$$(\lambda + 2\mu) \text{div grad } \theta - 2\mu \text{div rot } \vec{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \text{div } \vec{U}}{\partial t^2}. \quad \text{Принимая во внимание, что}$$

$$\text{div grad } \theta = \nabla^2 \theta, \text{ div rot } \vec{\omega} \equiv 0, \text{ а } \text{div } \vec{U} = \theta, \text{ получаем: } (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

или

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}, \quad \text{где } v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}. \quad (7.23)$$

Итак, для дилатации  $\theta = \text{div } \vec{U}_p$  получили волновое уравнение. Такому же уравнению в однородной по  $\rho, \lambda, \mu$  среде удовлетворяет связанная с  $\theta$  и деформациями сжатия-растяжения потенциальная часть  $\vec{U}_p$  поля смещений

$$\nabla^2 \vec{U}_P = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_P}{\partial t^2} \quad (7.23, a)$$

и скалярный потенциал  $\varphi$  поля смещений  $\varphi$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{v_P^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (7.23, б)$$

связанный с  $\vec{U}_P$  равенством (7.12,б):  $\vec{U}_P = \text{grad } \varphi$ .

Уравнения (7.23), (7.23,а), (7.23,б) для  $\theta$ ,  $\vec{U}_P$  и  $\varphi$  математически идентичны уравнениям (6.20,а), (6.20,б) для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного поля в изоляторе. В разделе 6.5 было показано, что волновые уравнения описывают распространение ЭМ колебаний со скоростью  $v$ . Следовательно, уравнения (7.23), (7.23,а), (7.23,б) для  $\theta$ ,  $\vec{U}_P$  и  $\varphi$  описывают распространение составляющей  $\vec{U}_P$  поля смещений (сопровожающееся изменениями объёмов  $dV$  упругой среды и деформациями сжатия-растяжения) со скоростью  $v_P$ , зависящей от параметров  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  упругой среды.

Вернёмся к уравнению (7.22) и приравняем роторы его левой и правой частей:  $(\lambda + 2\mu) \text{rot grad } \theta - 2\mu \text{rot rot } \vec{\omega} = \rho \frac{\partial^2 \text{rot } \vec{U}}{\partial t^2}$ . Так как  $\text{rot grad } \theta \equiv 0$ ,  $\text{rot rot } \vec{\omega} \equiv \text{grad div } \vec{\omega} - \nabla^2 \vec{\omega}$ ,  $\text{rot } \vec{U} = 2\vec{\omega}$ ,  $\text{div } \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{div rot } \vec{U} \equiv 0$  получаем волновое уравнение для вектора вращения

$$\nabla^2 \vec{\omega} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \vec{\omega}}{\partial t^2}, \quad \text{где } v_S = \sqrt{\mu/\rho}. \quad (7.24)$$

Такому же уравнению в однородной по  $\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  среде удовлетворяет связанная с вектором  $\vec{\omega}$  (и деформациями сдвига) вихревая часть  $\vec{U}_S$  поля смещений  $\vec{U}$ :

$$\nabla^2 \vec{U}_S = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_S}{\partial t^2} \quad (7.24, a)$$

и векторный потенциал  $\vec{\Psi}$  поля смещений  $\vec{U}_S$

$$\nabla^2 \vec{\Psi} = \frac{1}{v_S^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}, \quad (7.24, б)$$

связанный с  $\vec{U}_S$  равенством (7.12,в):  $\vec{U}_S = \text{rot } \vec{\Psi}$ .

Из сказанного выше ясно, что величина  $v_S$  в уравнениях (7.24), (7.24,а), (7.24,б)- это скорость распространения полей  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{U}_S$  и  $\vec{\Psi}$ .

Итак, из (7.23)- (7.24,а) следует, что в однородной упругой среде распространяются независимо друг от друга (и с разными скоростями) два

типа упругих колебаний и связанные с ними составляющие поля смещений  $\vec{U}$ . Потенциальная часть  $\vec{U}_P$  поля смещений, деформации сжатия-растяжения и связанные с ними изменения элементарных объёмов  $dV$  упругой среды распространяются со скоростью  $v_P$ . Вихревая часть  $\vec{U}_S$  поля смещений, связанные с ней повороты элементов  $dV$ , а также деформации сдвига, распространяются со скоростью  $v_S$ .

Выясним то, от чего в абсолютно-упругой среде зависит отношение  $v_P/v_S$ . Согласно (7.18), (7.23), (7.24),  $\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2\nu}{(1-2\nu)} + 2} =$

$$= \sqrt{2 \frac{\nu + 1 - 2\nu}{1 - 2\nu}}, \text{ то есть}$$

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}} = \sqrt{2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}}. \quad (7.25)$$

Из (7.25) следует, что отношение  $v_P/v_S > \sqrt{2}$  и зависит только от коэффициента Пуассона  $\nu$ . Следовательно, при известных скоростях  $v_P, v_S$  можно определить коэффициент Пуассона упругой среды. Чем больше коэффициент Пуассона, тем больше отношение  $v_P/v_S$ . Ясно, что скорость  $v_P$  всегда больше, чем  $v_S$ . Отсюда- происхождение индексов у этих скоростей и соответствующих составляющих поля смещений: "P"- prima (первая), "S"- secunda (вторая).

Упругие волны, распространяющиеся со скоростями  $v_P$  и  $v_S$  называют соответственно продольными и поперечными. Это связано с тем, что у первых из них (P-волны) смещения  $\vec{U}_P$  точек среды происходят в направлениях коллинеарных (продольных) направлению распространения волны. У S-волны векторы смещения  $\vec{U}_S$  ортогональны (поперечны) направлению её распространения.

Отметим ещё, что ранее, на основе равенства (7.17), мы выяснили, что "абсолютно-упругой несжимаемой жидкости" формально соответствует значение коэффициента Пуассона  $\nu = 0.5$ . При таком значении  $\nu$  из (7.25) получаем:  $v_P/v_S \rightarrow \infty$ . Это обусловлено тем, что в жидкости (со скоростью  $v_P$ ) могут распространяться только продольные упругие волны, а скорость  $v_S = 0$ .

Рассмотрим простейшие примеры решения волновых уравнений (7.23)-(7.24,a).

### 7.10. Плоская продольная упругая волна

Воспользуемся тем же подходом, который применяли при рассмотрении решений волнового уравнения для компонент векторов переменного ЭМ поля в изоляторе (в разделе 6.5).

Пусть в декартовых координатах поле смещений  $\vec{U} = \vec{1}_x U(x, t)$ , то есть ненулевой является только  $x$ - компонента  $U$  вектора  $\vec{U}$ , которая (кроме времени  $t$ ) зависит от одной декартовой координаты  $x$ . Каковы в этом случае будут пространственные производные поля  $\vec{U}$ , связанные с вектором вращения  $\vec{\omega}$  и дилатацией  $\theta$ ? Согласно (1.9), (7.11), при  $\vec{U} = \vec{1}_x U(x, t)$

$$2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{U} = \vec{1}_x \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \vec{1}_y \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \vec{1}_z \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0. \quad \text{Согласно}$$

$$(1.7), \quad (7.12,a), \quad \text{при} \quad \vec{U} = \vec{1}_x U(x, t) \quad \text{дилатация}$$

$$\theta = \text{div } \vec{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x} = \epsilon_x. \quad \text{Итак, для такого переменного поля}$$

смещений  $\vec{U}$ , в соответствии с изложенным в разделе (7.5) имеем:  $\vec{U}_s = 0$ ,

$\vec{U} = \vec{U}_p$  и рассматриваемое здесь поле  $\vec{U}$  в однородной среде удовлетворяет

волновому уравнению (7.23,a):  $\nabla^2 \vec{U}_p = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_p}{\partial t^2}$ . При  $\vec{U} = \vec{1}_x U(x, t)$  из

этого уравнения получаем для компоненты  $U$  поля смещений известное нам уравнение струны, аналогичное (6.22):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \quad (7.26)$$

Одно из 2-х решений этого уравнения, подобно (6.24), можем представить в виде:

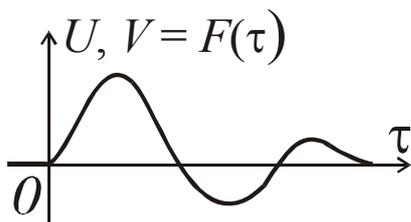
$$U = F(\tau), \quad \text{где} \quad \tau = t - x/v_p. \quad (7.27)$$

В этом случае поле  $\vec{U} = \vec{U}_p = \vec{1}_x U(x, t)$ - это плоская продольная упругая волна, распространяющаяся в направлении оси  $X$ .

Пусть функция  $U = F(\tau)$  имеет вид, показанный на рис. 7.13. Перейдём от функции  $U = F(\tau)$  к зависимостям  $U(t)$  при  $x=\text{const}$ - временная волна (график колебаний) и  $U(x)$  при  $t=\text{const}$ - пространственная волна ("профиль" волны).

Зависимость  $U(t)$  на рис. 7.14,a

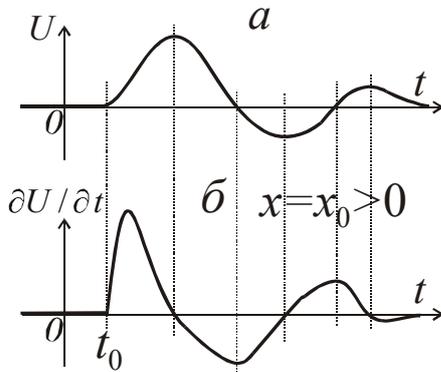
аналогична графику на рис. 6.5,б. В некоторой точке пространства (лежащей в плоскости  $x=x_0=\text{const}$ ) в момент времени  $t=t_0$  начинаются упругие колебания ( $t_0$ -момент "первого вступления" этих колебаний). Согласно (7.27)



**Рис. 7.13.** Пример зависимости компоненты  $U$  (или  $V$ ) вектора смещения от  $\tau$ .

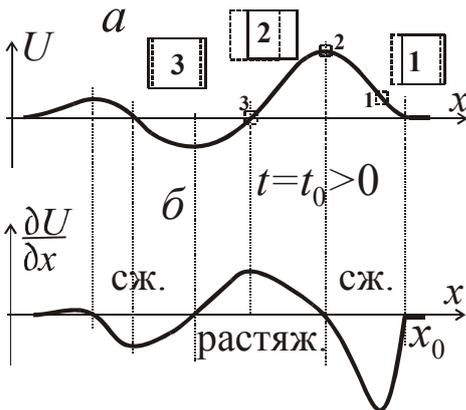
и рис. 7.13, время  $t_0$  тем больше, чем больше координата  $x$  по направлению распространения этих колебаний.

На рис. 7.14,б показана зависимость от  $t$  скорости смещения, равной производной  $\partial U / \partial t$ . Эта производная равна тангенсу угла между осью абсцисс  $t$  и касательной к графику на рис. 7.14,а. В те моменты времени, когда абсолютная величина смещения  $|U|$  максимальна, скорость смещения  $\partial U / \partial t = 0$ .



**Рис. 7.14.**

Соответствующие функции  $F(\tau)$  на рис. 7.13 зависимости компоненты  $U$  вектора смещения и скорости  $\partial U / \partial t$  изменения  $\vec{U}$  со временем  $t$  при  $x = x_0$ .



**Рис. 7.15.** Зависимости компоненты  $U$  вектора смещения и производной  $\partial U / \partial x$  от  $x$  при  $t = t_0$ .

На рис. 7.15,а приведена (соответствующая зависимости  $U = F(\tau)$  на рис. 7.13.) пространственная волна. Показано то, как меняется компонента  $U$  смещения в зависимости от координаты  $x$  в фиксированный момент времени  $t = t_0 > 0$ . Абсциссе  $x = x_0$  соответствует положение (переднего) фронта плоской продольной волны. Из (7.27) следует, что в более поздний, по сравнению с  $t_0$ , момент времени волна (без изменения формы колебания) перемещается в направлении оси  $X$  со скоростью  $v_p$ .

Выше мы установили, что при  $\vec{U} = \vec{1}_x U(x, t)$  дилатация  $\theta = \text{div } \vec{U} = \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ . То есть в рассматриваемом случае не только деформацию растяжения-сжатия  $\epsilon_x$  по направлению оси  $X$ , но и относительные изменения элементарных объёмов  $dV$  характеризует производная  $\partial U / \partial x$ . На рис. 7.15,б приведена зависимость этой производной от координаты  $x$ . При  $\partial U / \partial x > 0$  (в данный момент времени  $t = t_0$ ) происходит растяжение, а при  $\partial U / \partial x < 0$  - сжатие элементарных объёмов  $dV$  упругой среды по направлению оси  $X$ . Как видно на рис. 7.15,б в рассматриваемом примере у продольной упругой волны чередуются зоны сжатий и растяжений.

На рис. 7.15 показано также то, как меняются сечения координатных элементов объёма  $dV$  при прохождении продольной упругой волны в окрестности точек "1", "2", "3". Штриховой линией показано положение

этих сечений до прохождения волны, а сплошной линией - эти же сечения в момент времени  $t_0$ . Видно то, как влияет характер зависимости  $U(x)$  на деформации элементов  $dV$ . Абсолютные величины дилатации  $\theta$  и деформации

$\varepsilon_x$  тем больше, чем более "резко" меняется компонента  $U$  смещения в зависимости от  $x$ .

### 7.11. Плоская поперечная упругая волна

Пусть теперь в декартовых координатах поле смещений  $\vec{U} = \vec{1}_y V(x, t)$ , то есть ненулевой является только  $y$ -компонента  $V$  вектора  $\vec{U}$ , которая зависит от времени  $t$  и от одной декартовой координаты  $x$ . Определим для этого случая пространственные производные поля  $\vec{U}$ , связанные с вектором вращения  $\vec{\omega}$  и дилатацией  $\theta$ . Согласно (1.9), (7.11),  $2\vec{\omega} = \text{rot } \vec{U} =$   
 $= \vec{1}_x \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \vec{1}_y \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \vec{1}_z \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \vec{1}_z \frac{\partial V}{\partial x}$  (при  $\vec{U} = \vec{1}_y V(x, t)$ ).

Согласно (1.7), (7.12,a), дилатация  $\theta = \text{div } \vec{U} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$ . То есть,

для рассматриваемого переменного поля смещений  $\vec{U}$ , в соответствии с изложенным в разделе (7.5) имеем:  $\vec{U}_p = 0$ ,  $\vec{U} = \vec{U}_s$  и в этом случае поле  $\vec{U}$  в однородной среде удовлетворяет волновому уравнению (7.24,a):

$\nabla^2 \vec{U}_s = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 \vec{U}_s}{\partial t^2}$ . При  $\vec{U} = \vec{1}_y V(x, t)$  из этого уравнения получаем для  $y$ -компоненты  $V$  поля смещений аналогичное, (6.22), (7.26) уравнение струны:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \quad (7.28)$$

Одно из 2-х решений этого уравнения, подобно (7.27), запишем в виде:

$$V = F(\tau), \quad \text{где } \tau = t - x/v_s. \quad (7.29)$$

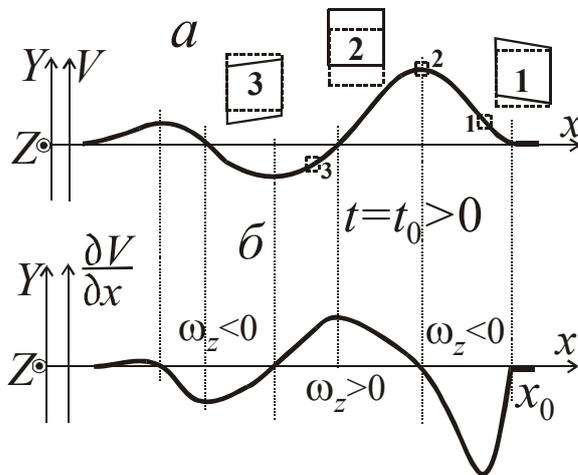
В этом случае смещения происходят в направлениях, коллинеарных оси  $Y$ , а их распространение - в направлении оси  $X$ , то есть такое поле  $\vec{U} = \vec{U}_s = \vec{1}_y V(x, t)$  - это плоская поперечная упругая волна.

Пусть функция  $V = F(\tau)$  имеет тот же, как показанный на рис. 7.13 для компоненты  $U = F(\tau)$  в предыдущем вопросе, вид. Не сложно перейти от функции  $V = F(\tau)$  к зависимости  $V(t)$  при  $x = \text{const}$ - графику колебаний и зависимости  $V(x)$  при  $t = \text{const}$ - пространственной волне. При этом функции  $V(t)$  и скорости смещения  $\partial V(t)/\partial t$  будут идентичны зависимостям  $U(t)$  и  $\partial U(t)/\partial t$ , приведенным на рис. 7.14.

На рис. 7.16 показаны зависимости компоненты  $V(x)$  и её производной  $\partial V/\partial x$ , а также направления осей  $Y$  и  $Z$ . Выше было показано, что при  $\vec{U} = \vec{1}_y V(x, t)$  имеем:  $2\vec{\omega} = \vec{1}_z \frac{\partial V}{\partial x}$ . Это означает, что в рассматриваемом

случае вектор вращения  $\vec{\omega} = \vec{1}_z \omega_z$ , где  $\omega_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$ . Кроме того, согласно

(7.10), для ненулевых компонент тензора чистой деформации сдвига для такого поля  $\vec{U}$  получаем:  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}$ . То есть производная  $\partial V / \partial x$



**Рис. 7.16.** Зависимости компоненты  $V$  вектора смещения и производной  $\partial V / \partial x$  от  $x$  при  $t = t_0$ .

одинаково характеризует в данном случае как чистую деформацию сдвига  $\gamma_{xy}$ , так и компоненту  $\omega_z$  вектора вращения. Ранее мы установили (рис. 7.8), что компонента  $\omega_z$  характеризует угол поворота элемента упругой среды вокруг оси  $Z$ . При  $\omega_z > 0$  или  $\omega_z < 0$  направление этого поворота образует соответственно правовинтовую или левовинтовую систему с направлением оси  $Z$ .

На рис. 7.16 показано также то, как меняется форма (лежащих в какой либо из плоскостей  $z = \text{const}$ )

сечений координатных элементов объёмов  $dV$  при прохождении поперечной упругой волны в окрестности точек "1", "2", "3". Как и на рис. 7.15, штриховой линией показано положение этих сечений до прохождения волны, а сплошной линией - в момент времени  $t_0$ . Видно, как влияет характер зависимости  $V(x)$  на деформации элементов  $dV$ . В окрестности точек "1", "3", где производная  $\partial V / \partial x \neq 0$ , элементы  $dV$  испытывают повороты вокруг оси  $Z$  и деформации сдвига. В окрестности точки "2", где смещение максимально, нет поворотов и деформаций сдвига.

### 7.12. Плоские однородные и неоднородные волны

У рассмотренных в предыдущих 2-х вопросах  $P$  и  $S$  плоских упругих волн в фиксированный момент времени смещения - одинаковы в пределах произвольной плоскости, ортогональной направлению распространения волны. Но есть и другие плоские волны, называемые неоднородными. Введём это понятие.

Пусть, например, плоская продольная упругая волна распространяется в однородной среде в некотором направлении  $L$ . Тогда, аналогично (7.27),  $\vec{U} = \vec{U}_P = \vec{1}_L F(t - l/v_p)$ , где  $l$  - координата, отсчитываемая по направлению  $L$ , а  $F$  - функция аргумента  $t - l/v_p$ . Полагая, что начало отсчёта координаты  $l$  совпадает с началом декартовых координат, получаем:

$$\vec{U} = \vec{1}_L F\left(t - \frac{n_x x + n_y y + n_z z}{v_p}\right), \quad \text{где} \quad n_x = \cos(L, X), \quad n_y = \cos(L, Y),$$

$n_z = \cos(L, Z)$  - "направляющие косинусы" для которых, как известно, справедливо равенство:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (7.30)$$

При выполнении условия (7.30) приведенное выше выражения для  $\bar{U}$  будет решением волнового уравнения (7.23,а).

Пусть поле  $\bar{U}$  - гармонически меняющееся. Тогда (при применении комплексной формы записи) имеем:  $\bar{U} = \bar{\mathbf{1}}_L U_0 \exp[-i\omega(t - l/v_p)] = \bar{\mathbf{1}}_L U_0 \exp[-i(\omega t - kl)]$ , где  $\omega$  - круговая частота,  $i$  - мнимая единица,  $U_0$  - амплитуда колебаний, а  $k = \omega/v_p$  - (действительное) волновое число. Выражая  $l$  через  $x, y, z$ , получаем:

$$\bar{U} = \bar{\mathbf{1}}_L U_0 \exp\{-i[\omega t - k(n_x x + n_y y + n_z z)]\}. \quad (7.31)$$

Выражение (7.31) будет являться решением волнового уравнения (7.23,а) (а также- решением уравнения Гельмгольца) при выполнении равенства (7.30).

Введём понятие плоской неоднородной волны, приняв формальное допущение о том, что равенство (7.30) остаётся справедливым, но величины  $n_x, n_y, n_z$  - комплексные:  $n_x = n_x' + in_x''$ ,  $n_y = n_y' + in_y''$ ,  $n_z = n_z' + in_z''$ . Тогда из (7.31) получаем:

$$\bar{U} = \bar{\mathbf{1}}_L U_0 \exp\{-i[\omega t - k(n_x' x + n_y' y + n_z' z)]\} \exp[-k(n_x'' x + n_y'' y + n_z'' z)],$$

или, переходя к действительной форме записи в соответствии с формулой Эйлера (6.42),

$$\bar{U} = \bar{\mathbf{1}}_L U_0 \cos[\omega t - k(n_x' x + n_y' y + n_z' z)] \exp[-k(n_x'' x + n_y'' y + n_z'' z)]. \quad (7.32)$$

Выражение (7.32) описывает гармоническую волну, распространяющуюся со временем в направлении  $L'$  с направляющими косинусами  $n_x', n_y', n_z'$ . Но амплитуда колебаний у такой волны экспоненциально убывает в направлении  $L''$  с направляющими косинусами  $n_x'', n_y'', n_z''$ . Выясним, какую взаимную ориентацию имеют направления  $L'$  и  $L''$ .

$$\text{Из (7.30) следует, что } (n_x' + in_x'')^2 + (n_y' + in_y'')^2 + (n_z' + in_z'')^2 = 1 \text{ или}$$

$$(n_x'^2 - n_x''^2 + n_y'^2 - n_y''^2 + n_z'^2 - n_z''^2) + i \cdot 2 \cdot (n_x' \cdot n_x'' + n_y' \cdot n_y'' + n_z' \cdot n_z'') = 1 + i \cdot 0.$$

Принимая во внимание то, что для равенства двух комплексных величин необходимы равенство их действительных частей и равенство их мнимых частей, получаем  $n_x' \cdot n_x'' + n_y' \cdot n_y'' + n_z' \cdot n_z'' = 0$ . Из этого выражения следует, что направление  $L'$  распространения такой плоской неоднородной волны и направление  $L''$ , в котором затухает амплитуда колебаний, взаимно ортогональны.

Формально полученное решение (7.32) волнового уравнения (7.23,а) упрощённо отражает главные особенности некоторых видов упругих волн на больших расстояниях от возбудителей упругих колебаний. В присутствии плоской границы некоторые типы волн распространяются вдоль этой границы, а амплитуда колебаний убывает с удалением от границы.

### 7.13. Одновременное возбуждение и распространение продольных и поперечных волн. "Сосредоточенный" источник

В некоторых учебниках по курсам "Сейсморазведка" или "Теория распространения упругих колебаний" рассмотрен возбудитель упругих колебаний в виде "взрывного очага". При этом в некоторый момент времени  $t_0$  к сферической поверхности  $S_{\text{сф}}$  приложен импульс нормального к ней (направленного радиально) давления  $P$ , одинаковый во всех точках поверхности  $S_{\text{сф}}$ . Это простейший пример сферического источника ("очага") продольных упругих волн (см., например, [10], с. 138- 151).

Другим, рассматриваемым в теории сейсморазведки, простейшим типом возбудителя упругих колебаний является *источник в виде "сосредоточенной силы"*. В этом случае полагают, что переменная сила  $\vec{F}(t)$  приложена к некоторой точке  $\theta$  -центру элементарного объёма  $dV$  упругой среды. Такой источник соответствует модели возбудителя упругих колебаний при помощи удара.

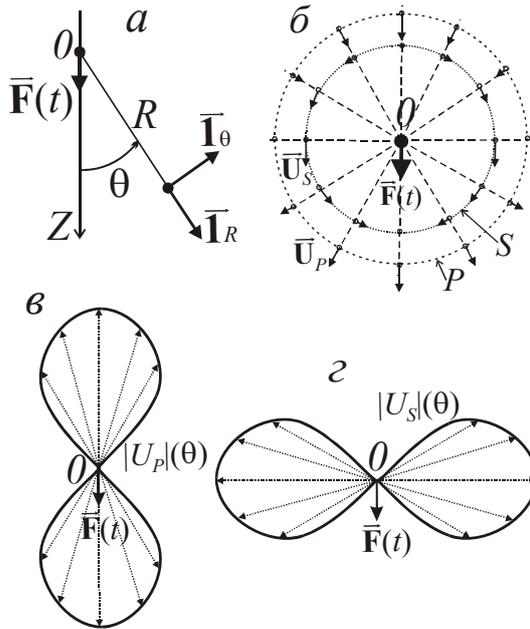
Приведём выражения для поля смещений  $\vec{U}$ , возбуждаемого таким источником, для случая, когда среда- однородна по параметрам  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ , сила  $\vec{F}(t)$ - гармонически меняющаяся с круговой частотой  $\omega$ , точка  $\theta$ - начало сферических координат  $(R, \theta, \varphi)$  с полярной осью по оси  $Z$  (декартовых, либо цилиндрических координат), и  $\vec{F} = \vec{1}_z F_z$ ,  $F_z = F_0 \cos(\omega t)$  (рис. 7.17,а). В этом случае, согласно решению соответствующей прямой задачи, поле  $\vec{U}$  определяют выражения:

$$\vec{U} = \vec{1}_R U_R + \vec{1}_\theta U_\theta, \quad U_R = \frac{F_0}{4\pi\rho v_P^2} \cdot \frac{\cos\theta}{R} \cos[\omega(t - R/v_P)],$$

$$U_\theta = \frac{-F_0}{4\pi\rho v_S^2} \cdot \frac{\sin\theta}{R} \cos[\omega(t - R/v_S)], \quad (7.33)$$

где, в соответствии с (7.23), (7.24),  $v_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  и  $v_S = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорости распространения продольных и поперечных упругих волн.

Из (7.33) следует, что действие силы  $\vec{F} = \vec{1}_z F_z(t)$  в однородной упругой среде приводит к возбуждению двух упругих волн, распространяющихся (с разными скоростями) в радиальном направлении  $\vec{1}_R$ . Об этом свидетельствует то, что содержащим время  $t$  аргументом функций  $U_R$ ,  $U_\theta$  является разность  $t - R/v_{P,S}$ . Эти упругие волны- продольная волна с полем смещений  $\vec{U}_P = \vec{1}_R U_R$  и поперечная волна (поле  $\vec{U}_S = \vec{1}_\theta U_\theta$ ). Согласно (7.33), амплитуды смещений (колебаний) этих волн по-разному зависят от угла  $\theta$  между направлением силы  $\vec{F}$  и направлением  $\vec{1}_R$  их распространения (рис. 7.17,б, в, г).



**Рис. 7.17.** Возбуждение продольных (P) и поперечных (S) волн "сосредоточенным источником" - силой  $\vec{F}(t)$  в точке  $O$ .

На рис. 7.17,б показано, какими могут быть векторы  $\vec{U}_P$  и  $\vec{U}_S$  на сферических поверхностях  $P$  и  $S$  с центрами в точке  $O$ , если косинусы  $\cos[\omega(t - R/v_{P,S})]$  в выражениях (7.33) для  $U_R$  и  $U_\theta$  - положительны. Из этих же выражений следует, что амплитуды  $P$  и  $S$  волн, возбуждаемых источником в виде "сосредоточенной силы", зависят от угла  $\theta$  между направлением силы  $\vec{F}$  в точке  $O$  и радиусом-вектором  $\vec{L}_{Oa}$ , где  $a$ - точка наблюдения. На рис. 7.17,в, з. показаны зависимости амплитуд продольной  $|U_R|$  и поперечной  $|U_\theta|$  упругих волн от угла  $\theta$ . Величины  $|U_R|$  максимальны при  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ , а  $|U_\theta|$  - при  $\theta=\pi/2$ .

### 7.14. О Формуле Кирхгофа и

#### принципе Гюйгенса-Френеля

Вспомним, что в разделе (2.13) были рассмотрены формулы Грина для потенциала  $U$  статического поля  $\vec{f}$ . В частности для скалярного поля  $U$  в области пространства  $V$  (ограниченной поверхностью  $S[V]$ ), где нет источников поля и  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа (2.21)  $\nabla^2 U(a) = 0$ ,

получили выражение (2.44): 
$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} U(p) d\omega.$$

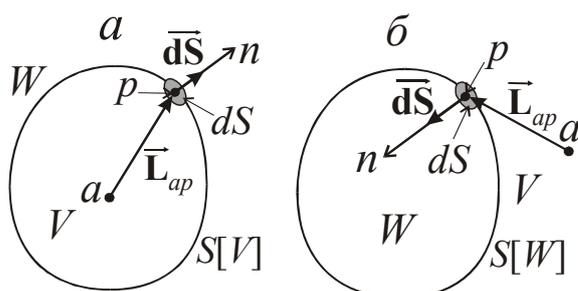
Здесь  $U(p)$ - потенциал в точках  $p$  на  $S[V]$ ,

$d\omega = d\omega(a) = \frac{(\vec{L}_{ap} \cdot d\vec{S})}{L_{ap}^3} = dS \cdot \cos(\vec{L}_{ap}, n) / L_{ap}^2$  - угол видимости (из точки  $a$ )

ориентированной элементарной площадки  $d\vec{S}$  на поверхности  $S[V]$  с

центром в точке  $p$  (см. раздел 2.3, выражение (2.5)), а  $n$ - нормаль к этой поверхности, наружная относительно области пространства  $V$  (см. рис. 7.18,а).

Выражение (2.44), как уже было отмечено, справедливо, если все источники поля расположены вне области  $V$  (в области



**Рис. 7.18.** К формуле Кирхгофа.

пространства  $W$ ). Оно остаётся справедливым, если область  $W$ - локальная, ограниченная поверхностью  $S[W]$ , а  $V$ - неограниченная "снаружи" область пространства (7.18,б). В соответствии с (2.44,а), выражение для  $U(a)$  можем представить в виде:

$$U(a) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[V]} \left[ \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial U(p)}{\partial n} + \frac{1}{L_{ap}^2} \frac{\partial L_{ap}}{\partial n} U(p) \right] dS.$$

Перейдём к случаю, когда в однородной по упругим параметрам области пространства  $V$  нет возбудителей вынужденных упругих колебаний, а все эти возбудители находятся в области пространства  $W$ . Тогда в области  $V$  поля, характеризующие распространение упругих колебаний, удовлетворяют однородным волновым уравнениям (7.23)- (7.24,б). В частности для скалярного потенциала  $\varphi$  поля смещений ( $\vec{U}_p = \text{grad } \varphi$ ) справедливо

однородное волновое уравнение (7.23,б):  $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ . От уравнения

Лапласа оно отличается наличием члена со второй производной по времени  $t$ . Для характеристик полей, удовлетворяющих такому (однородному волновому) уравнению, Кирхгофом было получено выражение, более общее по сравнению с формулой Грина (2.44) для поля, удовлетворяющего уравнению Лапласа. Например, формулу Кирхгофа для скалярного потенциала  $\varphi$  поля смещений в точке  $a$  области  $V$  (где нет вынужденных колебаний и для  $\varphi$  справедливо однородное волновое уравнение (7.23,б)) для случая, который иллюстрирует рис. 7.18,б, можно представить в виде:

$$\varphi(a, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S[W]} \left[ -\varphi(p, t') \frac{\partial(1/L_{ap})}{\partial n} + \frac{1}{L_{ap}} \frac{\partial \varphi(p, t')}{\partial n} + \frac{1}{v L_{ap}} \frac{\partial \varphi(p, t')}{\partial t} \frac{\partial L_{ap}}{\partial n} \right] dS, \quad (7.34)$$

где  $\partial L_{ap} / \partial n = \cos(\vec{L}_{ap}, n)$ , а (для потенциала  $\varphi$  поля смещений  $\vec{U}_p$ ) скорость  $v = v_p$  (см. 7.23),  $t' = t - L_{ap} / v$  и, следовательно,  $t - t' = L_{ap} / v$ . Разность  $t - t'$  зависит от расстояний  $L_{ap}$  и скорости  $v$ .

Согласно (7.34), поле  $\varphi(a, t)$  в точке  $a$  области пространства  $V$  в момент времени  $t$  определяют следующие значения  $\varphi$  в точках  $p$  на поверхности  $S[W]$  (рис. 7.18,б). Это- поле  $\varphi(p, t')$  в (более ранние по сравнению с  $t$ ) моменты времени  $t'$ , производные  $\partial \varphi(p, t') / \partial n$  по направлению нормали  $n$  в точках  $p$  и производные по времени  $\partial \varphi(p, t') / \partial t$  в этих точках в моменты времени  $t'$ . В соответствии с (7.34), при неизвестных возбудителях волнового поля, расположенных в области пространства  $W$  (рис. 7.18,б), можем определить это поле в произвольной точке  $a$  области  $V$  в момент времени  $t$ , если на границе области  $W$  известны значения  $\varphi(p, t')$ ,  $\partial \varphi(p, t') / \partial n$ ,  $\partial \varphi(p, t') / \partial t$ . Подробнее см. [1], с. 378- 382.

Выражение (7.34) может служить математическим обоснованием *принципа Гюйгенса*. Согласно этому принципу каждую точку пространства, охваченного волновым процессом можно рассматривать, как источник вторичных волн (колебаний). Этим принципом можно воспользоваться для определения положения фронта волны в различные моменты времени, если известно положение этого фронта в некоторый "начальный" момент времени (см. [1], с. 383, [8], с. 274- 276).

### 7.15. Зоны Френеля. Область, существенная при распространении волн

Наглядную интерпретацию принципа Гюйгенса и сравнительно простой способ определения волнового поля, являющийся следствием формулы Кирхгофа (7.34), дал Френель.

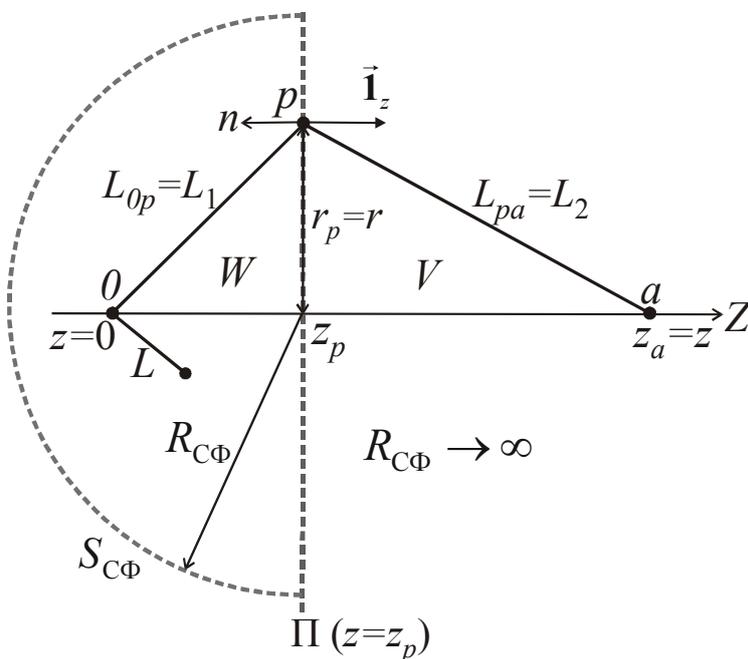


Рис. 7.19. К выражению (7.35).

Пусть область пространства  $W$  ограничена частью плоскости  $\Pi$  и полусферой  $S_{C\Phi}$  (рис. 7.18) с радиусом  $R_{C\Phi} \rightarrow \infty$ . В точке  $O$  области  $W$  расположен точечный источник гармонических волн. Временной фактор:  $\exp(i\omega t)$ . Точка наблюдения  $a$  находится вне  $W$  - в области  $V$ , причём точки  $O$  и  $a$  расположены по разные стороны плоскости  $\Pi$  и лежат на одной нормали  $Z$  к плоскости  $\Pi$ .

Пусть находящийся в точке  $O$  источник возбуждает сферическую гармоническую продольную волну с потенциалом  $\varphi(a, t) = C \frac{\exp[i(\omega t - k L_{Oa})]}{L_{Oa}}$ , где  $C = \text{const}$ . После преобразований (см. [1], стр. 384- 385), получаем для потенциала  $\varphi$  выражение, которое (переходя к действительной форме записи) можем представить в следующем виде:

$$\varphi(a, t) = C_0 \int_{\Pi} \frac{\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\Lambda}(L_1 + L_2)\right]}{L_1 \cdot L_2} \cos(\vec{i}_z, \vec{L}_{pa}) dS, \quad (7.35)$$

где  $C_0$  - множитель, не зависящий от расстояний  $L_1, L_2$ ;  $\Lambda$  - длина волны, связанная с (действительным) волновым числом  $k$  равенством  $\Lambda = (2\pi)/k$ , а выражение (7.35) получено при условиях:  $kL_1 \gg 1, kL_2 \gg 1$ . Это означает, что точки  $p$  на плоскости  $\Pi$  находятся в дальней зоне расположенного

в точке  $O$  возбудителя гармонических волн, а точка  $a$  находится в дальней зоне расположенных в точках  $p$  источников вторичных волн.

Согласно (7.35), поле  $\varphi$  в точке  $a$  определяет сумма волн, возбуждаемых всеми элементарными источниками на плоскости  $\Pi$ , расположенными на элементарных площадках  $dS$  с центрами в точках  $p$ . При фиксированных расстояниях  $L_1, L_2$  поле всех вторичных источников в точках  $p$  - одинаково в точке  $a$ . Это означает что такие площадки  $dS$  с центрами в точках  $p$  образуют кольца  $dS_k$  со средними радиусами  $r_k$  и с осью  $Z$ , проходящей через точки  $O$  и  $a$ . Согласно (7.35), если радиусы  $r_k$  и  $r_{k+1}$  колец  $dS_k$  и  $dS_{k+1}$  таковы, что суммы расстояний  $L_1, L_2$  от точек  $O$  и  $a$  до этих колец различаются на  $\Lambda/2$ , то вклады находящихся на  $dS_k$  и  $dS_{k+1}$  источников вторичных волн в величину  $\varphi(a, t)$  будут различаться на  $\pi$  ( $180^\circ$ ).

Представим себе множество цилиндрических колец на плоскости  $\Pi$  (рис. 7.20). Ширину колец выберем такой, чтобы при переходе от его внутренней границы к внешней сумма расстояний  $L_1+L_2$  менялась на  $\Lambda/2$  - половину длины волны:

$$\begin{aligned} (L_1^{(1)} + L_2^{(1)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) &= \frac{\Lambda}{2}, \quad (L_1^{(2)} + L_2^{(2)}) - (L_1^{(1)} + L_2^{(1)}) = 2 \frac{\Lambda}{2}, \\ (L_1^{(3)} + L_2^{(3)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) &= 3 \frac{\Lambda}{2}, \dots, (L_1^{(n)} + L_2^{(n)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) = n \frac{\Lambda}{2}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

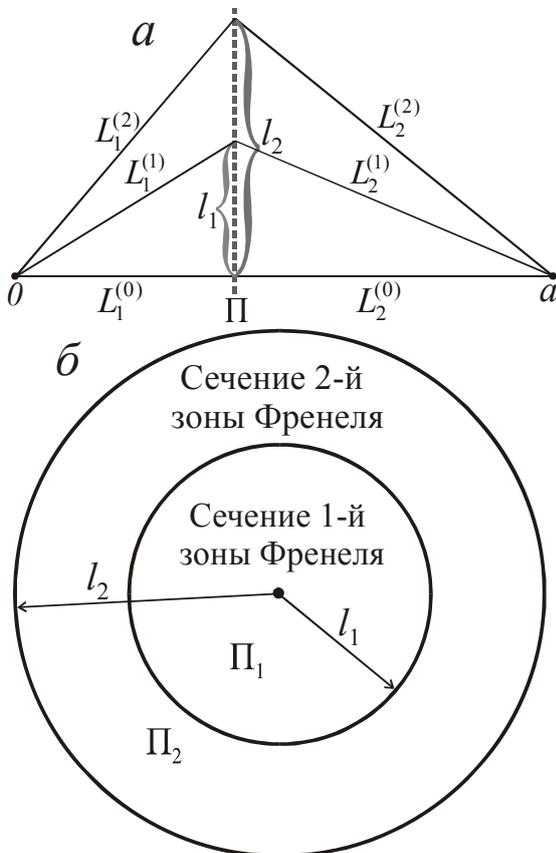


Рис. 7.20. К зонам Френеля.

где  $L_1^{(0)} + L_2^{(0)} = L_{Oa}$  - расстояние между точками  $O$  и  $a$ . Радиусы  $l_1, l_2, \dots, l_n$  (рис. 7.20,а) - границы колец Френеля, являющихся сечениями зон Френеля плоскостью  $\Pi$  (рис. 7.20,б). При условиях (7.36) в фиксированный момент времени  $t$  аргументы функции  $\cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\Lambda} (L_1 + L_2) \right]$  в (7.35) на границах соседних колец различаются на  $\pi$ .

Интеграл по плоскости  $\Pi$  в (7.35) можем представить, как сумму интегралов по кругу  $\Pi_1$  и кольцам,  $\Pi_2, \Pi_3, \dots$ :

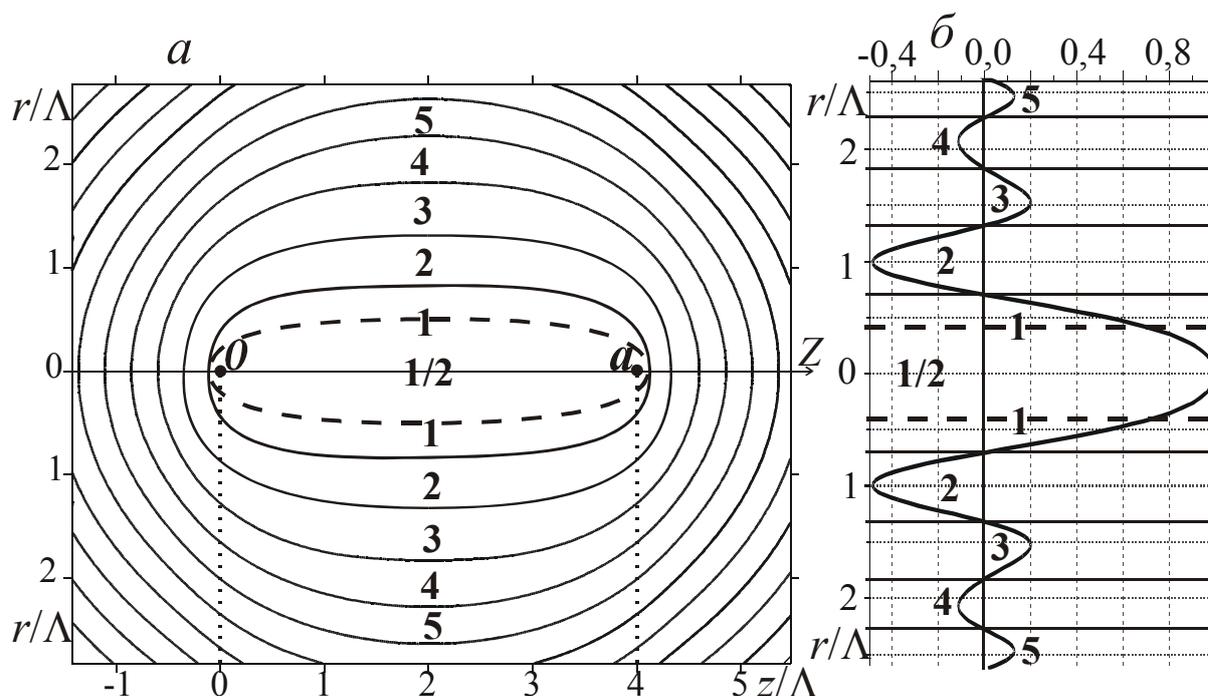
$$\varphi(a, t) = I_1 + I_2 + I_3 + \dots \quad (7.37)$$

где  $I_1 = C_0 \int_{\Pi_1} \dots dS$ ,  $I_2 = C_0 \int_{\Pi_2} \dots dS$ ,

$$I_3 = C_0 \int_{\Pi_3} \dots dS, \dots$$

На рис. 7.21,а сплошными линиями

показаны сечения зон Френеля плоскостью, проходящей через точку  $O$  (где находится возбудитель сферических волн) и точку наблюдения  $a$ . Результаты расчётов приведены для случая, когда расстояние  $L_{Oa}=4\Lambda$ . Координаты  $z$  (по оси  $Z$ , см. рис. 7.19) и расстояние  $r$  до оси  $Z$  на рис. 7.21 нормированы на длину волны  $\Lambda$ . Границы зон Френеля подобны поверхностям эллипсоидов вращения с фокусами в точках  $O$  и  $a$ , а показанные на рис. 7.21,*а* их сечения - эллипсы с центрами в этих точках. Цифры (1, 2, 3, 4, 5) на рис. 7.21 обозначают номера зон Френеля.



**Рис. 7.21.** Зоны Френеля и область, существенная для распространения волн.

На рис. 7.21,*б* показаны (одни из возможных для фиксированного момента времени  $t$ ) зависимости относительных вкладов в величину  $\varphi(a,t)$  источников вторичных волн на  $\Pi$  от (нормированного на  $\Lambda$ ) расстояния  $r$  до оси  $Z$ . Результаты расчётов на рис. 7.21,*б* получены для случая, когда плоскость  $\Pi$  расположена на одинаковых расстояниях от точек  $O$  и  $a$ . Как видно на этом рисунке, если в (3.37) интеграл  $I_1$  вида (7.35) по кругу  $\Pi_1 > 0$ , то интегралы  $I_3, I_5, \dots$  по кольцам  $\Pi_3, \Pi_5, \dots$  - также положительны, а интегралы  $I_2, I_4, \dots$  по кольцам  $\Pi_2, \Pi_4, \dots$  - отрицательны (и наоборот). Из-за множителя  $1/(L_1 \cdot L_2)$  в подынтегральной функции в (7.35) интегралы  $I_1, I_2, I_3, \dots$  убывают по абсолютной величине с увеличением номера кольца Френеля.

Представим выражение (7.37) в следующем виде:

$$\varphi(a,t) = \frac{I_1}{2} + \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_2 + I_3}{2} + \frac{I_3 + I_4}{2} + \dots \quad (7.37, a)$$

Как видно на рис. 7.21,*а* из за различия знаков интегралов  $I_n$  при чётных и нечётных индексах  $n$  абсолютные величины второго, третьего и последующих слагаемых в правой части (7.37,*а*) будут значительно меньше, чем первое слагаемое:  $I_1/2$ , то есть  $\varphi(a,t) \approx I_1/2$ . Поэтому принято полагать,

что потенциал  $\varphi(a, t)$ , а также поле смещений  $\vec{U}$ , зависят, в основном, от источников вторичных волн, расположенных в пределах "половины первой зоны Френеля", площадь сечения которой плоскостью  $\Pi$  в два раза меньше площади сечения этой плоскостью первой зоны Френеля. При этом радиус половины первой зоны Френеля  $l_{1/2} = l_1 / \sqrt{2} \approx 0.707 \cdot l_1$  (см. рис. 7.20). Эту (соответствующую половине первой зоны Френеля) часть пространства называют *областью, существенной для распространения волн*. На 7.21,а, б эта область обозначена "1/2", а её границы показаны штриховыми линиями. В рассматриваемом случае (точечный источник продольных упругих волн) она имеет форму эллипсоида вращения с фокусами в точках  $O$  и  $a$ .

Из (7.36), рис. 7.20,а и теоремы Пифагора следует, что радиус  $l_1$  1-ой зоны Френеля можно определить, пользуясь равенствами:  $(L_1^{(1)} + L_2^{(1)}) - (L_1^{(0)} + L_2^{(0)}) = \frac{\Lambda}{2}$ ,  $l_1^2 = (L_1^{(1)})^2 - (L_1^{(0)})^2 = (L_2^{(1)})^2 - (L_2^{(0)})^2$  и  $L_1^{(0)} + L_2^{(0)} = L_{Oa}$ . В частности, при  $L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = L_{Oa}/2$  (см. рис. 7.20,а) для максимального радиуса первой зоны Френеля получаем выражения:

$$l_1^{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\Lambda \left( \frac{\Lambda}{4} + L_{Oa} \right)}, \quad l_1^{\max} \approx \frac{\sqrt{\Lambda \cdot L_{Oa}}}{2}, \quad (7.38)$$

второе из которых справедливо при  $L_{Oa} \gg \Lambda$  (дальняя зона). Из (7.38) следует, что для максимального радиуса области, существенной для распространения волн, справедливы выражения:

$$l_{1/2}^{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{2} \left( \frac{\Lambda}{4} + L_{Oa} \right)}, \quad l_{1/2}^{\max} \approx \frac{\sqrt{\Lambda \cdot L_{Oa}}}{2\sqrt{2}}. \quad (7.38, a)$$

Согласно (7.38,а), поперечное сечение (и его радиус) области, существенной для распространения волн, тем меньше, чем короче длина волны  $\Lambda$ . При  $\Lambda \rightarrow 0$  имеем:  $l_{1/2}^{\max} \rightarrow 0$ . В этом случае (во однородной среде) волна распространяется от источника  $O$  по полупрямым - лучам. Такими ("лучевыми") представлениями о распространении упругих волн пользуются в геометрической акустике, а аналогичный подход к распространению ЭМ волн при очень малых  $\Lambda$  применяют в геометрической оптике.

### Литература

1. Альпин Л. М., Даев Д. С., Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. М., «Недра», 1985.
2. Альпин Л. М. Теория поля. М., «Недра», 1965.
3. Альпин Л. М. Практические работы по теории поля. М., «Недра», 1971.
4. Бурсиан В. Р. Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Л., «Недра», 1972.

5. Каринский А. Д. Теория полей, применяемых в разведочной геофизике. Статические поля. Стационарное электрическое поле. Изд-во РГГРУ, 2007 г. (Электронная версия, исправленная, 2011 г.).
6. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 1. Гравитационные, электрические и магнитные поля. М., «Недра», 1996.
7. Кауфман А. А. Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля. М., «Недра», 2000.
8. Кауфман А. А., Левшин А. Л. Введение в теорию геофизических методов. Часть 3. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. М., «Недра», 2001.
9. Кауфман А. А., Левшин А. Л., Ларнер К. Л. Введение в теорию геофизических методов. Часть 4. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. М., «Недра», 2003.
10. Кауфман А. А., Левшин А. Л. Введение в теорию геофизических методов. Часть 5. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. М., «Недра», 2005.
11. Кауфман А. А., Андерсон Б. И. Принципы методов наземной и скважинной Электроразведки. ООО «Издательство «Триада», Тверь, 2013.
12. Корн Г. и Корн Е. Справочник по математике. Изд. 2-е. М., «Наука», 1970.
13. Кудрявцев Ю. И. Теория поля и ее применение в геофизике. М., «Недра», 1987.
14. Овчинников И. К. Теория поля. М., «Недра», 1979.
15. Светов Б. С. Основы геоэлектрики. М. Издательство ЛКИ, 2008.
16. Рябинкин Л. А. Теория упругих волн. М., «Недра», 1986.